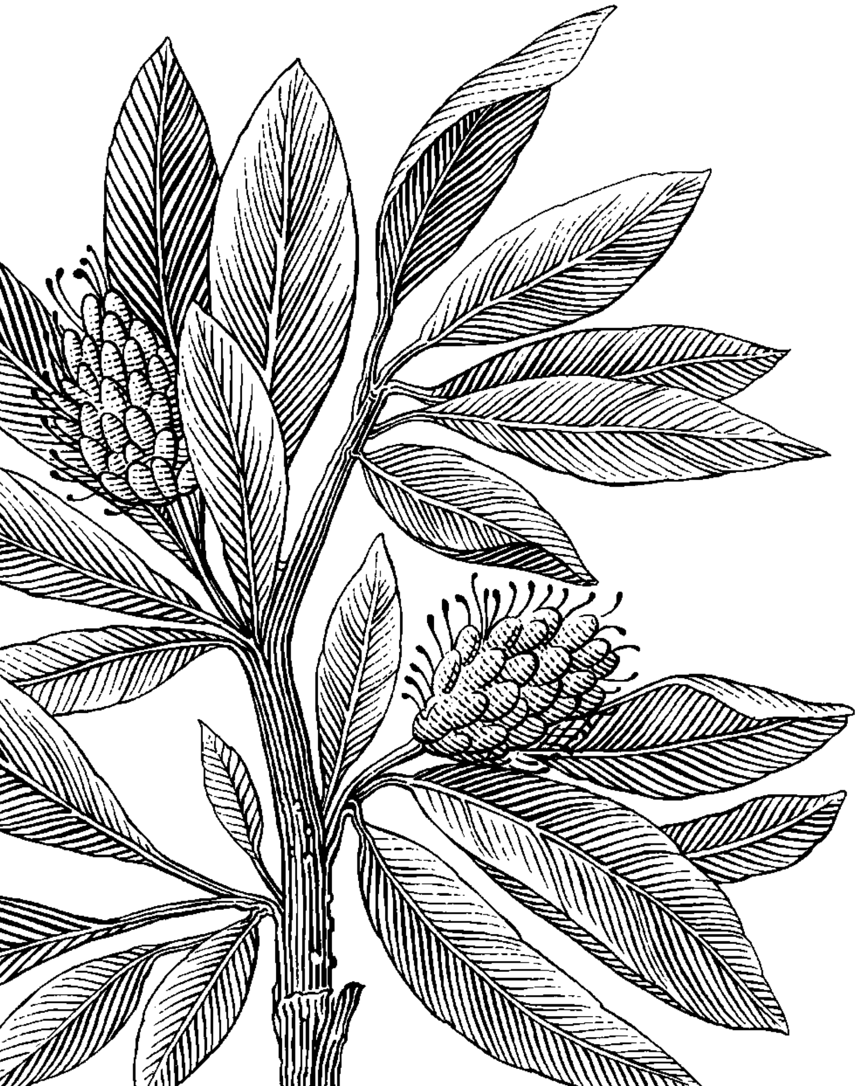
Linnéuniversitetet
Kalmar Växjö

Examenarbete

# Svårigheter med ekvationer

*En systematisk litteraturstudie om elevers svårigheter inom matematikområdet ekvationer*



Författare: Esin Demir, Matilda Torrång & Emelie Isenberg
Handledare: Oduor Olande
Examinator: Hanna Palmer
Termin: HT- 2018 Nivå: Avancerad Nivå Kurskod: 4GN02E

Abstrakt
Den här studien är en systematisk litteraturstudie med inriktning årskurs 1–3. Syftet är att granska vilka svårigheter elever kan uppleva när de arbetar med ekvationer i matematik. Studien syftar även att undersöka var i arbetet med ekvationer som elever stöter på svårigheter när de går från ett konkret till ett abstrakt arbetssätt. För att svara på studiens frågeställningar har 17 vetenskapliga artiklar granskats och analyserats. Till hjälp har Heddens (1986) teori om att gå från en konkret representation till en abstrakt representation använts. Genom resultatet har flertalet svårigheter som elever kan uppleva framkommit. Till exempel förståelsen för likhetstecknet samt tecken och symboler för okända tal. I studiens diskussion redogörs för hur viktigt lärarens roll i undervisningen är för att eleverna inte ska möta dessa svårigheter.

Nyckelord
Svårigheter, ekvationer, konkret, abstrakt, konkret stadie, semi-konkret stadie, semi-abstrakt stadie, abstrakt stadie, fallgrop.

# Innehållsförteckning

# 1 Inledning

Under praktiken i vår lärarutbildning upptäckte vi att elever har svårt att förstå när ett tal, ofta i form av bokstäver, introduceras i matematikundervisning för att symbolisera ett okänt tals värde. Vi har även sett att elever i stor utsträckning arbetar med öppna utsagor, till exempel 5 = 2 + __. När en symbol däremot är inkluderad (5 = 2 + x) har eleverna svårt att förstå vad det är de ska räkna ut. Det har också visat sig att eleverna har svårigheter med förståelsen när det är uppgifter där symbolen följer med till nästa uppgift. Det innebär bland annat om eleverna ska lösa ekvationer i två steg. I första steget har eleverna räknat ut att blomman är 3, men eleverna har sedan svårt att förstå att blomman i nästa steg i uppgiften också är talet 3. Att eleverna hade svårt med förståelsen för symboler märktes när eleverna arbetade med algebrauppgifter i sina matematikböcker.

När ekvationer introduceras för eleverna behöver läraren vara medveten om vad som kan vara viktigt att fokusera på. Genom att skapa en förförståelse för ekvationer tror vi att eleverna enklare kommer kunna hantera de utmaningar som de möter när de arbetar med området. Det innebär att eleverna redan i ett tidigare stadie behöver arbeta med bland annat likhetstecknets betydelse, olika räknesätt samt sambandet mellan de olika räknesätten. De förkunskaper som eleverna har ska de sedan använda i ett senare arbete med ekvationer.

I läroplanens centrala innehåll inom matematikämnet för årskurs 1–3, i avsnittet om algebra, ligger fokus på likhetstecknets betydelse samt att läsa ut och konstruera mönster. Vidare i årskurs 4–6 sker en progression inom algebran till att eleverna ska ha metoder för enkla ekvationslösningar, algebraiska uttryck och behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol. Det gör att det kan vara viktigt att eleverna tidigt får en god grund för algebra och ekvationer. Även i kunskapskraven syns progressionen i algebra. Enligt kursplanen ska eleverna när de slutar årskurs 3 kunna använda likhetstecknet och hantera matematiska likheter, medan de i slutet av årskurs 6 ska kunna lösa enkla rutinuppgifter i algebra genom att använda och välja matematiska metoder (Skolverket, 2018). Om eleverna redan i tidig ålder behärskar algebra och ekvationer öppnas möjligheterna upp för att elevernas intresse för matematik ökar.

Målet med den här studien är att få en tydligare bild av vilka svårigheter som är vanliga för elever att möta, när det kommer till algebra och ekvationer. Det handlar om hur eleverna ska kunna arbeta med dessa svårigheter, för att kunna utveckla sina matematiska kunskaper på bästa sätt. Kilborn och Löwing (2002) skriver att matematik är ett abstrakt ämne och att konkretisering är väldigt viktigt för att eleverna ska förstå matematik. Författaren påpekar att det innebär att eleverna har ett representationssätt eller en modell att falla tillbaka på när de möter svårigheter.

# 2 Syfte och frågeställningar

## 2.1 Syfte
Syftet med den systematiska litteraturstudien är att undersöka vilka svårigheter forskningen visar att elever upplever inom det matematiska området algebra, med fokus på ekvationer.

## 2.2 Frågeställningar:

- Vilka svårigheter upplever elever vanligen när de arbetar med ekvationer?
    - Var i arbetet med ekvationerna stöter eleverna på eventuella svårigheter?

# Begreppsdefinitioner

I begreppsdefinitionen förklaras några av de begrepp som är viktiga och återkommande i studien.

## Ekvation

En matematisk uppgift där ett eller flera tal är okända. Ekvationer karakteriseras av att de har ett högerled (HL) och ett vänsterled (VL). Dessa förbinds med ett likhetstecken vilket symboliserar att högerledet och vänsterledet har samma värde. Något som alltid förekommer är en eller flera bokstäver, exempelvis x, y eller z, i det ena eller båda leden. Ekvationen anses som löst när man har hittat det okända talet eller talen. (Nationalencyklopedin, 2005)

## Konkret

I texten kommer konkret att användas i samband med konkret material. Det innebär i följande text att eleverna får arbeta med fysiskt material som är till hjälp för eleverna när de arbetar med matematik (Heddens, 1986).

## Abstrakt

I studien är abstrakt kopplat till att eleverna arbetar med matematik genom siffror och bokstäver istället för att använda bilder och fysiskt material (Heddens, 1986).

## Symboler

Symbol för det okända exempelvis x, _, tom ruta, blomma, likhetstecknet, räknesymboler och andra tecken för ett okänt tal (Alibali, Stephens, Brown, Kao och Nathan, 2014).

## Likhetstecknet

Symbolen “=” som innebär att det ska vara lika mycket på båda sidor om tecknet (Knuth, Stephens, McNeil och Martha, 2006).

## Pre-algebra

Är ett förstadium till algebra där det arbetas med ett algebraiskt tänk på ett mer konkret sätt. Pre-algebra fokuserar på förståelsen av likhetstecknet och att eleverna kan lösa ekvationer med en okänd (Pillay, Wilss och Boulton-Lewis, 1998).

# 3 Teoriavsnitt

För att förstå vad, hur och när elevers svårigheter uppkommer inom algebra finns olika teorier som belyser barn och ungas kognitiva tänkande. När barn ska gå från ett konkret till ett abstrakt tänkande inom matematik finns det några välkända teorier i ämnet, som är framskrivna av olika forskare. Det är bland annat Piagets (1968), Bruners (1966) och Heddens (1986) som har utvecklat teorier inom det kognitiva tänkandet. Forskarna menar att eleverna måste ta sig igenom alla fyra stadier i det kognitiva tänkandet för att kunna förstå matematiken och att det bör få ta tid.

Piagets (1968) utvecklingsteori handlar om att människan behöver skapa sig en förståelse av sin omvärld. För att människan ska kunna skapa sig en förståelse av sin omvärld behöver gamla erfarenheter kompletteras med nya, vilket är kopplat till begreppen assimilation och ackommodation, två begrepp som Piaget lyfter i sin utvecklingsteori.

Assimilation betyder att människan anpassar nya erfarenheter och intryck in i gamla tankemönster som redan finns. Assimilation handlar om att barn gradvis ökar sin kunskap i ett ämne eller område som de redan har kunskaper i. Det kan innebära att elever som arbetar med öppna utsagor exempelvis 5 = 2 + __ har lättare att lösa en sådan ekvation än när en variabel är inkluderad. Ackommodation handlar istället om att nya erfarenheter som kommer in inte stämmer överens med barnets tidigare erfarenheter, vilket leder till att tidigare erfarenheter behöver omprövas och omstruktureras hos barnet. När en variabel är inkluderad (5 = 2 + x) går det att koppla samman det med begreppet ackommodation, det är något nytt som behöver omstruktureras i elevernas tidigare erfarenheter gällande ekvationer. Piaget lyfter också i sin utvecklingsteori att det är genom nya erfarenheter som människans gamla scheman utmanas, vilket gör att nyfikenheten till ett fortsatt lärande är väsentligt för individens mentala och fortsatta utveckling (Piaget 1968).

Piaget (1968) utvecklingsteori handlar om att barns kognitiva tänkande utvecklas i olika stadier beroende på barnets ålder. Teorin framhäver fyra olika stadier; sensomotoriska stadiet, preoperationella stadiet, konkreta operationernas stadium och formella operationernas stadium. Dessa stadier kan ses som en trappa i barnets kognitiva utveckling. I de två sista stadierna vilket är det konkreta operationernas och formella operationernas stadium handlar det om övergången från konkreta till abstrakta operationer i barnens utveckling, vilket sker mellan 7–12 års ålder.

Leong, Kin och Pien (2015) skriver om *concrete*, *pictorial* och *abstract* model vilket också benämns som CPA-modellen. Författarna är inspirerade av Bruners (1966) teoretiska modell där han byggde vidare på Piagets (1968) teori gällande övergången mellan det konkreta till det abstrakta tänkandet. Modellen förklarar hur elever kan gå från ett konkret tänkande till ett mer abstrakt tänkande i sitt lärande i tre olika stadier. Det första stadiet som kallas för *the concrete stage* handlar om att eleverna arbetar med konkret material, vilket kan vara olika typer av föremål som eleverna fysiskt kan laborera med. *The pictorial stage* är det andra stadiet i den teoretiska förklaringsmodellen. Det här stadiet är en bro mellan det konkreta stadiet till det abstrakta stadiet i CPA-modellen. I det här stadiet arbetar eleverna med exempelvis bilder på klossar, istället för konkreta föremål som klossar. I det sista stadiet som benämns som *the abstract stage*, får eleverna möta ord och symboler istället för fysiska föremål.

## 3. 1 Heddens teori

Precis som Piaget (1968) och Bruner (1966) grundar sig Heddens (1986) teori i att eleverna ska ta sig igenom olika stadier för att kunna behärska matematik. Heddens (1986) och Bruner (1966) menar att eleverna lär sig matematik genom att gå från det konkreta till det abstrakta. För varje stadie som eleverna tar sig igenom minskar det konkreta och det abstrakta ökar. Stadierna som Heddens menar att eleverna måste ta sig igenom är det *konkreta, semi-konkreta, semi-abstrakta* och det *abstrakta stadiet.* Heddens (1986) teori är likt Bruners (1966) teori, men har delat in *pictorial stage* i två steg: det *semi-konkreta stadiet* och det *semi-abstrakta stadiet.*

Mellan det konkreta och det abstrakta stadiet finns en fallgrop (*The gap)* i lärande som Heddens (1986) menar att eleverna riskerar att hamna i om de inte befäster kunskaper och skapar en djupare förståelse. Om eleverna inte har en full förståelse för matematik i det konkreta stadiet kan de inte ta sig vidare till nästa stadie, eftersom de saknar den kunskap som krävs för att kunna arbeta i det kommande stadiet. Eleverna riskerar då att hamna i fallgropen. Här kopplar han till Piagets (1968) begrepp assimilation och ackommodation. Vissa elever assimilerar ny kunskap fort medan andra elever behöver ackommodera eller ompröva sina tidigare kunskaper för att kunna ta in ny kunskap, vilket kan ta tid. För det mesta fortsätter lärarna att presentera mer nytt material och ny kunskap för eleverna som gör att eleverna som behöver ackommodera tappas i undervisningen (Heddens 1986). Heddens (1986) förklarar även att eleverna behöver lärarens hjälp för att kunna komma över *The gap*, eftersom de har svårt att göra det själva. Han fortsätter med att förklara att eleverna måste assimilera ny kunskap i det konkreta stadiet och fortsätta att systematiskt utvecklas för att komma till den abstrakta representationsformen. Fortsättningsvis förklarar Heddens (1986) att lärarna kan hjälpa eleverna att komma över fallgropen genom att ställa frågor som hjälper eleverna att flytta från det konkreta till det abstrakta stadiet. Om det är för många frågor som kräver specifika svar minns eleverna oftast enbart fakta och elevernas tankesätt att komma till svaret ignoreras. Istället bör läraren ställa frågor som *hur* och *varför* och inte lägga lika mycket fokus på *vad*. Genom att läraren använder sig av dessa frågor kan eleverna utveckla ett tänkande i att själv ha frågorna i åtanke när de löser uppgifterna vilket leder till att eleverna kan komma över fallgropen.

*Konkreta stadiet*

Eleverna får i det första stadiet arbeta med konkret material för att skapa sig en förförståelse till området. Inom algebra har eleverna oftast fått börja med att arbeta med öppna utsagor, till exempel: 2 + __ = 5. Eleverna kan använda sig av klossar som konkret material för att lösa de algebraiska uppgifterna.

*Semi-konkreta stadiet*

I det andra stadiet övergår eleverna från konkret till lite mer abstrakt. Istället för att använda konkret material använder eleverna sig av visuella bilder på verkliga föremål som de är vana vid att använda. Till exempel om eleverna tidigare har arbetat med klossar som konkret material övergår de nu till att arbeta med bilder som material. I det här stadiet kan eleverna få använda sig av bilder på klossarna för att kunna förflytta sig till det semi-konkreta stadiet.

*Semi-abstrakta stadiet*

I det tredje stadiet får eleverna arbeta med symboliska och visuella representationsformer istället för konkreta föremål. Det innebär att eleverna arbetar med representationsformer som inte har någon direkt koppling till det konkreta material som eleverna är vana vid att arbeta med. Om eleverna i föregående steg arbetade med bilder på klossar, arbetar de nu istället med symboler som streck eller prickar istället för bilder klossar.

*Abstrakta stadiet*

I det slutliga stadiet arbetar eleverna med abstrakta representationsformer. Istället för att använda sig av symboler som i det tidigare stadiet kan dessa symboler nu istället ersättas med siffror och variabler, exempelvis genom att ersätta blomman med ett ”X”. För att eleverna ska ha uppnått stadiet ska de kunna förstå vad variabeln betyder utan att behöva använda sig av de tre tidigare stadierna.

# 4 Metodval och undersökningsupplägg
En systematisk litteraturstudie är en studie som handlar om att på ett systematiskt sätt söka litteratur, välja relevanta artiklar, diskutera, analysera resultatet och utifrån det göra en sammanställning av inhämtad data kopplat till ämnet (Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström, 2013). Denscombe (2016) beskriver vikten av att använda sig av rätt metod vid insamling av data och benämner ett antal olika metoder, exempelvis skriftliga källor, intervju och observation. Den metod som valts till detta arbete är skriftliga källor med fokus på avhandlingar och vetenskapliga artiklar. Vidare beskriver Denscombe (2016) fördelar med denna metod då den innehåller en stor del av information samt att den är lättillgänglig. I metodavsnittet kommer det redovisas hur litteraturen i den här systematiska litteraturstudien granskats, sökt och valts ut. Under den första rubriken som är *insamlingsmetod* presenteras metoden som ligger till grund för det här arbetet. Sedan presenteras i avsnittet *databassökning* vilka databaser som använts vid sökningarna och vart de olika publikationerna är hämtade. Därefter under *manuellt urval* beskrivs det hur litteratur valts ut genom olika manuella avgränsningar. Efter det kommer *övrig litteratur* att lyftas och motiveras. Därefter beskrivs *analysmetod* och till sist presenteras *etiska överväganden* i texten.

## 4.1 Insamlingsmetod
För att samla in data i form av vetenskapliga artiklar och avhandlingar har databaserna ERIC, OneSearch, Libris, Google scholar, Ulrichsweb och SwePub använts. De sökord som använts för sökningarna är equations, math, difficulties, solving equations, elementary school, algebra, equal sign, solving equations, difficult, arithmetic, problem solving, strategies, patterns, education, mathematics, mathematical, repeat, pattern element, early childhood. Utöver insamlingen av vetenskapliga artiklar via databaserna har litteratur i den här studien inhämtas från artiklarnas referenslistor samt böcker. Nedan kommer en mer ingående förklaring kring hur sökningarna i databaserna gått till, samt också hur de manuella sökningarna har genomförts. I bilagan nedan visas ett sökschema för den här systematiska litteraturstudien, där en mer ingående och detaljerad beskrivning finns kring hur dessa avgränsningar gått till i studien.

### 4.1.1 Databassökning
För att ta del av tidigare forskning har databaserna som nämnts ovan använts. På grund av att ERIC är en databas som är inriktad på undervisning valdes den för att söka på tidigare forskning till den här systematiska litteraturstudien. Denna databas är den som främst använts då den gett bra relevant forskning. Sökningarna genomfördes vid ett flertal tillfällen där olika avgränsningar och sökord användes. För att få en vidare förståelse och svar på frågeställningarna avvägdes och användes flera olika sökord, då det ger en fördjupad kunskap samt olika synsätt på svar till frågeställningarna.

### 4.1.2 Sökning i databasen ERIC
Vid den första sökningen i databasen ERIC användes sökorden *equations* AND *math* AND *difficulties*, det avgränsas till att artiklarna skulle vara peer-reviewed och att nivån skulle vara på grundskolenivå. Denna sökning gav sex träffar där rubrikerna till alla artiklarna lästes. Därefter lästes abstrakt till de artiklar som ansågs intressanta. Slutligen lästes tre artiklar varav en valdes ut, då den ansågs vara relevanta för studien efter läsningen.

Vid den andra sökningen i ERIC användes orden *solving* AND *equations*, även här avgränsades det till att artiklarna skulle vara peer-reviewed, att nivån skulle vara grundskolenivå och att ämnet är *equations mathematics*. Det blev 51 sökträffar där fyra artiklar valdes ut. För att göra ett urval i denna sökning lästes de 20 första rubrikerna till artiklarna, där abstrakt lästes om det ansågs relevant. Efter läsningen av abstrakt övervägdes det om artikeln fortfarande var relevant. Om det var fallet lästes artikeln och togs med i resultatet om den ansågs passande.

Till den tredje sökningen i ERIC användes sökorden ALL (*algebra)* AND ALL (*equations)* AND ALL (*difficulties)* AND ALL (*elementary school)*. Avgränsningarna var att artiklarna skulle vara peer-reviewed, att de skulle finnas tillgängliga i full text, publikationsdatumet skulle vara mellan 100101 – 181119 och att språket skulle vara engelska. Sökningen gav fem träffar där två artiklar valdes utifrån ovanstående kriterier.

Den fjärde sökningen i ERIC innehöll sökorden *algebra, difficult* och *elementary school* med avgränsning enbart till peer-reviewed. Sökning gav 17 träffar där en artikel valdes ut. Urvalet gjordes efter att alla rubriker lästs, därefter lästes abstrakt till de rubriker som ansågs intressanta. Efter det valdes en artikel ut.

Vid den femte sökningen i ERIC användes sökorden *equations, arithmetic* och *problem solving*. Avgränsningarna var att artiklarna skulle vara peer-reviewed, publicationsåret 2000-2019 samt ämnet, equations mathematics. Sökningen gav 52 träffar varav de tio första rubriker lästes. Därefter lästes abstrakt till en artikel som sedan valdes ut.

Den sjätte sökningen i ERIC innefattade sökorden *strategies, patterns, education, mathematics*. Denna sökning avgränsades med peer-reviewed, publication date 1998-2018, full text och article. Sökningen gav 72 träffar varav rubrikerna till de första tio lästes. Därefter valdes en artikel ut.

Till den sjätte sökningen i ERIC innehöll sökorden *mathematical*, repeat*, pattern element och early childhood* och avgränsades till peer-reviewed. Sökningen gav 9 träffar där alla rubriker lästes. Efter det valdes en artikel ut till studien.

#### 4.1.3 Sökning i databasen OneSearch

Vid sökningen i Onesearch användes sökorden *solving equations* equal sign* math** och gav 28 träffar. Här avgränsades sökningen med peer-review samt att “allt” ändrades till “artiklar”, sökorden ändrades från “var som helst i posten ’’till“ i abstrakt/beskrivningen”. Efter att de första 20 rubrikerna lästs och ett antal abstrakt lästes som verkade intressanta valdes en artikel ut.

#### 4.1.4 Sökning i övriga databaser

Swepub är en databas som testats att användas för sökning av vetenskapliga artiklar och avhandlingar. Denna gav inte det resultat som eftersträvades och har därför inte tagits med i sökschemat. Libris har använts för att hitta korrekta referenser. Ulrichsweb har använts för att se om tidskrifter är vetenskapliga och om de är peer-reviewed. Google Scholar har använt för att få fram artiklar som inte gått att få i fulltext i andra databaser.

## 4.2 Manuellt urval

När artiklarna söktes fram, gjordes en exkludering av publikationerna. Efter samtliga sökningar lästes ett antal titlar, beroende på hur många sökträffar det har gett. När det har varit få sökträffar lästes samtliga titlar, däremot lästes enbart abstrakten om titlarna verkade relevanta till arbetet. När det har varit många sökträffar lästes de första 20 titlarna och abstrakten lästes om titlarna var relevanta till arbetet.

Målsättningen med de utvalda artiklarna är att de ska vara relevanta idag. Därför har det strävats efter att använda artiklar som inte är äldre än 20 år. Om en äldre artikel har hittats har det övervägts noga om den är relevant och att det som påstås fortfarande är aktuellt. En annan aspekt som övervägts är året artiklarna publicerats, då en äldre artikel kan vara irrelevant eftersom att skolan och undervisningen kan ha förändrats på den tiden. På grund av detta blir därför en äldre artikel inte aktuell då den eventuellt inte är relevant längre. Dessutom har det övervägts om artiklarna är relevanta för lågstadiet. Därför har ett antal artiklar för högre eller lägre utbildning valts bort. Dessa har även vid vissa tillfällen ändå ansetts relevanta då de gått att koppla till lågstadiet.

Vissa artiklar i ERIC har inte gått att få i fulltext. Då har det sökts i databaserna Onesearch eller Google scholar. Det har vid flera fall visats att det varit framgångsrikt och att artiklarna då hittats i fulltext. Andra artiklar som inte kunnat hittas har då valts bort. Sökorden kopplat till de vetenskapliga artiklarna, har noggrant övervägts under sökningen av artiklarna. Det har övervägts om sökningarna besvarar frågeställningarna och vilka begrepp som skulle användas. De begrepp som har ansetts relevanta och viktiga samt gett en god validitet är: ekvationer, svårigheter, konkret, abstrakt och likhetstecknet. Validitet innebär enligt Denscombe (2016) att metoder och data är korrekta, där forskningen speglar verkligheten och sanningen. Begreppen har hjälpt oss att identifiera, få svar på och koppla samman syfte, frågeställningar samt teori med resultat.

### 4.2.1 Övrig litteratur

Det är främst publikationer från databasen ERIC som dominerat denna systematiska litteraturstudie. Däremot har även annan litteratur använts för att stärka studien. När en artikel sökts fram, har andra liknande artiklar kommit upp som förslag. Dessa artiklar har undersökts för att se om de kan användas till studien och har även använts som tidigare forskning. Det har även gjorts manuella sökningar vilket Eriksson Barajas, Forsberg och Wengström, (2013) beskriver som att referenslistan i olika artiklar har använts för att hitta mer referenser. Utifrån referenserna på utvalda artiklar har ytterligare fyra artiklar valts ut. Tre av dessa artiklar valdes ut från referenslistan från Vincent, Bardini, Pierce och Pearn (2015) artikel. Den fjärde artikeln hämtades från Powell, Kearns och Driver (2016) artikel.

Under arbetet med studien diskuterades litteraturen med författarnas handledare. Där det gavs ett tips på en artikel som ansågs passande för studien. Den artikeln valdes sedan med i arbetet.

## 4.3 Analysmetod och resultatbeskrivning

Till den här studien har ett deduktivt tillvägagångsätt använts. Vid den första övergripande läsningen av litteraturen lades fokus på vilka olika former av svårigheter med ekvationer eleverna stötte på samt vilka förkunskaper som saknades.

För att kunna svara på var i ekvationen som eleverna stöter på svårigheter har Heddens (1986) förklaringsmodell använts. Litteraturen som har lästs har kopplats ihop med de fyra stadierna som Heddens (1986) beskriver för att se var i förflyttningen, mellan stadierna, som svårigheterna uppstår för eleverna. Stadierna *the concrete level, semiconcrete* och *semiabstract level* samt *abstract level* har använts som rubriker i resultatet, dels för att underlätta för läsarna men även för att kunna svara på frågeställningarna på ett tydligt sätt. Eftersom svårigheterna inom *the semiconcrete level* och *the semiabstract level* liknar varandra valdes det att skriva ihop de två stadierna till en rubrik. I resultatet tas först generella svårigheter med ekvationer upp för att sedan gå in på Heddens (1986) förklaringsmodell.

## 4.4 Etiska överväganden

När en systematisk litteraturstudie skrivs är det av största vikt att etiska överväganden genomsyrar studien. Det innebär att litteraturen i den här systematiska litteraturstudien är analyserad och kritisk granskad. Vetenskapsrådet (2017) skriver om att det är viktigt att använda och studera originalkällor samt referera korrekt. Det är även viktigt att vara källkritisk.

Genom att den här studien inte är empirisk behövs det inget godkännande av exempelvis vårdnadshavare till elever. Det innebär att det inte finns några särskilda etiska aspekter att ta hänsyn till i projektet (Vetenskapsrådet, 2017). Litteraturen i den här studien är peer-reviewed, det betyder att litteraturen är vetenskapligt granskad vilket är viktigt för ett tillförlitligt resultat.

# 5 Resultat

I resultatet beskrivs inledningsvis svårigheter elever kan ha med ekvationer. För att besvara syftet och frågeställningar, har vetenskapliga artiklar använts. Frågeställningarna är: Vilka svårigheter upplever elever vanligen när de arbetar med ekvationer? Var i ekvationen stöter eleverna på eventuella svårigheter?

## 5.1 Elevers svårigheter i förståelse av ekvationer

Utifrån en kvalitativ studie där 33 högstadieelever intervjuats när de löst ekvationer samt aritmetiska uppgifter skriver Pillay, Wilss och Boulton-Lewis (1998) att det finns en fallgrop mellan algebra och aritmetik. För att elever inte ska hamna i fallgropen hävdar författarna att eleverna behöver arbeta på en operationell nivå när det kommer till pre-algebra. Powell et al. (2016) undersöker i sin kvantitativa studie sambandet mellan pre-algebra och aritmetik genom tester. Författarna hävdar att pre-algebra är bra för ett algebraiskt tänk, men att det även kan uppstå ”ett gap” mellan dessa. Powell et al. (2016) lyfter även att pre-algebra kan ses som en länk mellan algebra och aritmetik. Pillay et al. (1998) förklarar att barnen fokuserar på nummer och numeriska tillvägagångssätt när de arbetar med aritmetik, medan pre-algebra istället fokuserar på förståelsen av likhetstecknet och att eleverna kan lösa ekvationer med ett okänt värde.

Knuth, Stephens, McNeil och Martha (2006) har genomfört en kvalitativ studie där 177 mellanstadieelever fått svara på frågor om likhetstecknet samt där eleverna även har beräknat ekvationer. Studien genomfördes för att redogöra för elevernas kunskaper samt uppfattningar om likhetstecknet och ekvationer. Författarna skriver att:

> One concept that is fundamental to algebra understanding and that has received considerable research attention is that of equality and, in particular, understanding of the equal sign (s. 298).

Det handlar om att likhetstecknets betydelse är en faktor till att det uppstår svårigheter i den algebraiska räkningen. Utifrån en kvalitativ klassrumsstudie där elever i årskurs 1-3 genomförde ett spel, testades elevers förståelse för ekvationer. Författarna Baroody och Ginsburg (1983) beskriver likhetstecknet som en svårighet inom området algebra, vilket handlar om att eleverna stöter på svårigheter när det gäller likhetstecknets betydelse. Något som även Powell et al. (2016) håller med om. Vidare skriver Knuth et al. (2006) att:

> The concept of equality and its symbolic instantiation are traditionally introduced during students' early elementary school education, with little instructional time explicitly spent on the concept in the later grades (s-298).

Författarna menar att likhetstecknet introduceras tidigt i utbildningen men att läraren inte arbetar vidare med likhetstecknets betydelse även i de äldre åldrarna. De menar att det kan vara en faktor till att elever upplever svårigheter med ekvationer och symboler inom ekvationer.

Lee, Ng Bull, Pe och Ho (2011) har i sin kvantitativa studie undersökt 151 barns förståelse för mönster och algebra genom tester. Författarna kom fram till att elever som har svårigheter med algebra även har visat sig ha svårigheter med mönster. De menar därmed att det finns ett samband mellan svårigheter med algebraiska uppgifter och mönster.

I en kvantitativ studie genomfördes ett test med ekvationer på 91 barn i åldern 7–11 år, testet utfördes före och efter en lektion om ekvationer. I studien lyfter McNeil och Alibali (2005) orsakerna bakom barn och ungas svårigheter med ekvationer. Där de bland annat lyfter att eleverna inte har fått tillgång till eller har en fullständig förståelse för den logiska struktur som ligger bakom en ekvationslösning. McNeil och Alibali (2005) skriver även att barn i åldrarna 7–11 år har svårigheter när det kommer till att lösa och förstå ekvationer, vilket också handlar om ekvationer med operationer på båda sidor om likhetstecknet, till exempel 4 + 7 + 5 = 4 + ___. Fortsättningsvis skriver de att en orsak till att barn i den här åldern visar på svårigheter när det kommer till ekvationslösningar, kan vara att barn i dessa åldersgrupper har en lägre förståelse för generella, logiska strukturer. Andra orsaker till att elever kan ha svårigheter med ekvationer, går att koppla till att de inte har utvecklat ett fullständigt minnessystem, samt att de saknar en färdighet kopplat till grundläggande aritmetiska operationer. Det är nödvändigt för ett mer avancerat tänkande i relation till problemlösning i ämnet matematik (McNeil & Alibali, 2005).

**5.1.2 Okända symboler**

I en studie om feltolkning av likhetstecknet beskriver Vincent et al. (2015) vad symbolisk färdighet innebär. De menar att begreppet kan kopplas till *symbolisk känsla* och innebär att eleverna bland annat kan ”se igenom” symboliska uttryck. Eleverna måste förstå att en symbol kan ha olika roller i olika sammanhang, de måste därmed skapa en intuitiv känsla för dessa skillnader. Vincent et al. (2015) skriver om vikten av att eleverna har en förståelse för symbolers innebörd kopplat till algebra. Det handlar om att symbolen *x* exempelvis är något som kan variera beroende på ekvationen och att *x* inte är konstant. Till skillnad från en siffra som alltid har samma värde kan värdet på *x* variera. Det är kunskap som är väsentlig för eleverna, för att de ska kunna förstå och räkna med symbolen *x* i en ekvation.

Alibali, Stephens, Brown, Kao och Nathan (2014) genomförde en kvantitativ studie där 257 elever i sjätte och sjunde klass, testades för sin förståelse gällande ekvationer. Författarna lyfter fram vikten av att främja sambandet mellan symboler och deras referenser, det vill säga att förstå innebörden av symboler. Alibali et al. (2014) hävdar att eleverna i de högre årskurserna räknar med symboler utan att förstå vad de betyder. De beskriver hur eleverna behöver se symboler, vilket innebär att eleverna opererar för att få fram ett svar. Dessutom förstår eleverna att 3 _ 7 = 21 är en multiplikation för att 3 x 7 = 21. Författarna menar att det finns olika tecken för ett okänt tal och att eleverna behöver förstå den betydelsen. Det innebär att de ser genom symbolerna och därmed ser svaret direkt.

Alibali et al. (2014) menar även att elever kan ha svårt att förstå symbolers betydelse och vilket räknesätt som ska användas. För att undvika svårigheterna föreslår de att det ska läggas undervisningstid på att förstå symboler samt hur de hänger ihop. Dessutom menar Alibali et al. (2014) att det är viktigt att uppgifterna är kopplade till elevernas verklighet och att de under en längre tid får arbeta kontinuerligt med ekvationer.

Driver och Powells (2015) kvantitativa studie undersöker förståelse av ekvationer med och utan symboler hos 500 andraklass-elever. Författarna hävdar att ekvationer utan symboler eller bilder hjälper eleverna att förstå likhetstecknets betydelse. Vidare beskriver författarna att eleverna inte får tillräckliga instruktioner om symboler kopplat till ekvationer, där likhetstecknet är ett exempel. Det resulterar i att eleverna inte tolkar likhetstecknet som en balans i ekvationen, något som är viktigt att förstå när det kommer till ett pre-algebraiskt resonemang. Driver et al. (2015) förklarar fortsättningsvis att elever som är yngre än 6 och 7 år förstår själva begreppet balans, när ekvationerna presenteras i ett annat format, till exempel genom konkret material eller bildpresentationer.

I en kvalitativ studie där 63 stycken 13-åringar genomfört ett test med ekvationer, beskriver författarna Ngu och Phan (2015) tre viktiga faktorer för att kunna lösa en ekvation. De lyfter vikten av att eleverna har en förståelse för variabeln x som en viktig del i att kunna lösa en ekvation. I ekvationen x + 2 = 5 som de återger som ett exempel, står x för siffran 3. Eleverna behöver även förstå likhetstecknets betydelse, att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. När värdet är 5 på ena sidan bör det också vara 5 på andra sidan men uppdelat i olika tal, som exemplet ovan. När eleverna har en förståelse för att det bör vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet blir det lättare att lösa ut x som 3 när ekvationen är x + 2 = 5. Ngu et al. (2015) lyfter även vikten av balans, vilket också är kopplat till likhetstecknets betydelse, där det som görs på ena sidan också bör göras på andra sidan.

#### 5.1.3 Likhetstecknet

Likhetstecknet är en symbol som har visats sig vara problematisk när det kommer till svårigheter med ekvationer. Baroody och Ginsburg (1983) skriver att en del av svårigheterna som eleverna har med likhetstecknet är kopplat till icke-standardiserade uppgifter som t.ex: 13 = 7 + 6, 6 + 4 = 3 + 7 och 8 = 8. De förklarar även att eleverna har svårt att lösa uppgifter där svaret står i det vänstra ledet istället för det högra ledet i uppgiften, till exempel: __ = 7 + 5 eller 8 + __ = 7 + 5. Författarna menar att det är lika viktigt att arbeta med standarduppgifter som icke-standardiserade uppgifter för att markera jämlikhetsförhållandet i ekvationerna. Vidare förklarar Baroody och Ginsburg, (1983); men även Stacey och MacGregor, (1997) i sin kvantitativa studie att eleverna måste få lämpliga och tydliga instruktioner för att skapa en förståelse för hur de ska lösa ekvationer. Powell, Kearns och Driver (2016) skriver att:

> Many children interpret the equal sign as *"do something"* or *"write the answer"* instead of interpreting the equal sign as a balance between two sides of an equation (s. 944).

Författarna menar alltså att likhetstecknet innebär att eleverna tror att de måste skriva ett svar, istället för att förstå att det innebär balansen mellan de båda sidorna.

Utifrån tidigare studier i mellan- och högstadiet beskriver MacGregor och Stacey (1999) vikten av att förstå likhetstecknet, ha en god sifferkännedom och att ha aritmetiska kunskaper. Författarna hävdar att:

> The language of arithmetic focuses on answers. The language of algebra focuses on relationships (s. 1).

De menar till exempel att om "=" är involverat så tror eleverna att det innebär att de ska hitta ett svar, de förstår alltså inte att en ekvation även kan ha ett förhållande, till exempel likvärdighet. Det innebär att det inte behöver bli ett svar i ekvationen utan att eleverna förstår att det finns ett förhållande, till exempel att 2 + 2 = 3 + 1. I detta fall tänker eleverna att svaret blir fyra och att det ska med i beräkningen. Det eleverna däremot behöver förstå är att svaret på båda sidorna blir fyra, men att det är förhållandet mellan termerna som är viktigt i exemplet ovan. För att eleverna ska förstå förhållandet tar MacGregor et al. (1999) även upp att eleverna bör arbeta med uppgifter där svaret istället står i vänsterledet, till exempel _ = 3 + 2.

Powell et al. (2016) påstår att det egentligen inte är själva beräkningen av ekvationen som är svårt, utan bristen på förståelse av likhetstecknets betydelse. Knuth et al. (2006) instämmer att elevers svårigheter med ekvationer beror på att de har fel förståelse av likhetstecknet. De beskriver att många elever ser likhetstecknet som en del av aritmetiken, där det är ett svar på högra sidan av talen på vänstra sidan. Detta ger inte en tillräcklig förståelse för likhetstecknet, vilket är en symbol för likhet, att det ska vara lika mycket på båda sidor. Det är något som har visat sig att elever har svårigheter med upp i hög ålder. Detta kan kopplas till Ojose (2008) vars studie beskriver och analyserar Piagets olika stadier. Ojose (2008) påstår att eleverna inte får hoppa över något utvecklingsstadie då det kan leda till en bristande förståelse.

**5.1.4 Förkunskaper**

Hinton, Stroizer och Flores (2015) utförde en kvalitativ studie där 5 barn i åldern 4–7 år deltog. I studien undersöktes det om individuella instruktioner kunde förbättra elevernas svårigheter med sifferkännedom. Författarna påstår att den viktigaste grunden för matematik är att kunna räkna. Vidare hävdar de att en viktig faktor för att lösa ekvationer kan vara att eleverna har sifferkännedom.

Författarna beskriver olika steg i progressionen som exempelvis en till en, talordning, koordinalprincipen, ‘’svar’’, och irrelevansprincipen. Irrelevansprincipen innebär att 5 + 3 = 8 inte beräknas från början utan från ett tal. Det innebär att barnen i nuläget till exempel räknar till fem på fingrarna för att sedan lägga till tre fingrar till. Det barnen istället ska göra är att utgå från talet fem och sedan lägga till tre fingrar till. Vidare förklarar författarna att eleverna ska klara av bevarandet av siffror, vilket innebär att eleverna sparar beräkningar i huvudet oavsett hur arrangemanget ser ut, till exempel att 6 + 4 = 10 och att 4 + 6 = 10. Dessutom benämner Hinton et al. (2015) vikten av att använda ett flexibelt sätt att räkna på för att förbättra de matematiska kunskaperna och sifferkännedomen. Ett sätt för eleverna att lära sig använda ett flexibelt sätt att räkna på är riktade instruktioner, som innebär att eleverna kan använda objekt och bilder.

Utifrån en kvantitativ studie där 70 elever i årskurs 4 genomfört individuella test om problemlösningsuppgifter, som innehåller likhetstecknet, struktur och strategier beskriver McNeil och Alibali (2004) olika strategier för att lösa okända tal och effekterna av att använda olika strategier. Till exempel kan strategin att följa ett visst mönster eller metod när det exempelvis alltid ska vara ett svar i högerledet, leda till problem vid uppgifter som inte ser ut på det sättet.

I en kvantitativ studie undersöktes 315 elever i åldern 7 till 11 år, och deras förståelse för siffermönster och den kognitiva process detta behandlar. Eleverna fick, genom en arbetsbok, möjlighet till att arbeta med olika typer av uppgifter som innehåller mönster. Författarna Hargreaves, Shorrocks-Taylor och Threlfall (1998) skriver att en av byggstenarna som matematiken vilar på är begreppet struktur. Struktur handlar bland annat om att eleven kan förstå samband, i exempelvis ett mönster och dess uppbyggnad. Hargreaves et al. (1998) skriver även om vikten av att elever tidigt får arbeta med mönster, då det kan användas som en förståelse för den kommande algebraiska räkningen. Mönster är därmed ett viktigt förstadium till räknesättet algebra.

I en kvalitativ klassrumsstudie av Warren (2005) där totalt 45 stycken 9-åriga elever deltog, genomfördes ett experiment i två klassrum. Studien fokuserade på att undersöka läraråtgärder som till exempel användning av konkreta material, registrering av data och frågor som ställdes som gav stöd till unga barns utveckling av sam-variationella resonemang. Författaren skriver att när elever får arbeta med mönster i olika former, leder det till ett abstrakt tänkande, vilket också bidrar till upptäckandet av strukturer. Att som elev kunna tänka abstrakt och förstå strukturer, är grundläggande delar inom matematiken.

# 6 Analys

I det här avsnittet har resultatet analyserats genom att gå från ett konkret till ett abstrakt arbetssätt när det kommer till algebraisk räkning och ekvationer.

Som det tidigare beskrevs i resultatet menar Pillay et al. (1998) att det finns en fallgrop mellan aritmetik och algebra. Även Heddens (1986) beskriver att det finns en fallgrop som eleverna riskerar att hamna i, men menar att fallgropen består av att eleverna behöver lärarens hjälp. Heddens (1986) menar även att svårigheterna mer består av att eleverna behöver ackommodera redan befintliga kunskaper och därmed inte kan assimilera den nya kunskapen som presenteras. Det innebär att läraren behöver handleda eleverna genom de olika stadierna och ge eleverna den tid de behöver i varje stadie för att eleverna inte ska hamna i fallgropen.

## 6.1 *Det konkreta-stadiet*

Hinton et al. (2015) beskriver riktade instruktioner, där eleverna får arbeta med konkret material som objekt och bilder. Detta har visat sig kunna hjälpa elever med allt från platsvärde till algebraiska ekvationer.

Ojose (2008) skriver om Piagets olika utvecklingsstadier och trycker på Piagets tro om att alla barn går igenom varje stadie och att de inte hoppar över något stadie. Han förklarar även att äldre barn eller vuxna som inte har gått igenom något av de senare stadierna bearbetar information på samma sätt som ett barn vid samma utvecklingsstadium. Det har observerats att eleverna behöver använda mycket konkret material när de arbetar med algebra, men genom att introducera variabler tidigt i skolan är tanken att få över eleverna till det formella operationernas stadium, som är mer abstrakt. Därför är det viktigt att eleverna verkligen förstår det konkreta stadiet för att sedan koppla det till de andra stadierna och förstå dem.

Knuth et al. (2006) hävdar att det är viktigt att förstå likhetstecknet på en konkret nivå. Vidare beskriver de vikten av att börja tidigt med likhetstecknets betydelse för att eleverna ska förstå och greppa begreppet. Ett exempel för eleverna att förstå likhetstecknet på en konkret nivå är att eleverna får arbeta med en fysisk våg. Att använda vågen som ett konkret material gör att eleverna får en förståelse för att det ska vara lika mycket på båda sidorna av vågen. Genom att eleverna arbetar med likhetstecknet på ett konkret sätt lär sig eleverna att det ska vara en balans, till exempel kan eleverna på ett tydligt sätt se att 1 kg är lika mycket på båda sidor om vågen.

Hargreaves et al. (1998) beskriver begreppet struktur och att det kan observeras genom exempelvis mönster och relationer. Författarna menar att eleverna ska förstå att det finns samband i exempelvis ett mönster och dess uppbyggnad. Vidare förklarar Hargreaves et al. (1998) att det är viktigt att eleverna redan i tidig ålder börjar arbeta med mönster, eftersom det leder till en förståelse för den kommande algebraiska räkningen. Det betyder alltså att algebra är en grund till att förstå räknesättet algebra. Warren (2005) beskriver att grundläggande delar inom matematiken är att eleverna kan tänka abstrakt och förstå strukturer. Författaren menar att det sker genom att eleverna i olika former får arbeta med mönster, och att det bidrar till att eleverna upptäcker strukturer. Det här kan kopplas till det konkreta stadiet genom att eleverna får skapa egna mönster av konkret material, som exempelvis klossar.

Hinton et al. (2015) hävdar att en viktig faktor för att lösa ekvationer kan vara att eleverna har sifferkännedom samt att de kan använda ett flexibelt sätt att räkna. Det som kan vara svårt för eleverna i det konkreta stadiet är om de inte har en tillräcklig sifferkännedom. Om eleverna inte har en förståelse för siffror och hur de används blir det svårt för dem att lösa ekvationer.

## 6.2 *Det semi-konkreta* och *semi-abstrakta stadierna*

Driver och Powell (2015) skriver om elever i en andra klass som löst icke-standardiserade ekvationer, som var presenterade med hjälp av symboler. Eleverna fick möta ekvationer som innehöll siffror och tecken, exempelvis 3 + 4 =___ + 5. Eleverna fick sedan möta samma typ av uppgifter, men presenterade med hjälp av bilder och berättelser istället, det vill säga icke-symboliska ekvationer. Elever med och utan matematiksvårigheter visade ett märkbart högre resultat på de icke-symboliska uppgifterna. Författarna lyfter också att elever trots allt får en större förståelse för matematik när de får arbeta och möta icke-symboliska uppgifter. Det visar sig gälla både elever med och utan matematiska svårigheter, men att det främst stärker och gynnar elever som befinner sig i matematiska svårigheter.

Driver och Powell (2015) belyser vikten av att arbeta med icke-symboliska ekvationer i form av exempelvis bilder, då det ger eleverna en större förståelse och ett bättre resultat. Det är viktigt att inte gå direkt till symboliska ekvationer som är abstrakt utan att stegvis gå från konkret till abstrakt där ekvationer med bilder är ett steg emellan.

Powell et al. (2016) hävdar att pre-algebra är bra för algebraiskt tänk, samtidigt som det kan bli ett ''gap'' mellan dessa. Pre-algebra kan ses som en länk mellan aritmetik och algebra, men även som en bro mellan det konkreta och det abstrakta, där aritmetiken upplevs som konkret och algebran som abstrakt. Det gör att pre-algebran blir en bro mellan aritmetiken och algebran och som istället kan delas in i semi-konkret och semi-abstrakt stadium.

Powell et al. (2016) beskriver även att detta leder till att eleverna kan förstå standardiserade ekvationer som 5 + 4 = ___. Däremot stöter eleverna på svårigheter när det exempelvis blir olika operationer på båda sidorna av likhetstecknet och inte bara ett ''svar''. Vilket även Baroody och Ginsburg (1983) påstår. Aritmetiska färdigheter kan exempelvis vara att gå från en till en, till att lägga ihop.

Vincent et al. (2015) beskriver vad symbolisk färdighet innebär. De menar att begreppet kan kopplas till *symbolisk känsla* och innebär att eleverna bland annat kan ”se igenom” symboliska uttryck. Eleverna måste förstå att en symbol kan ha olika roller i olika sammanhang, de måste alltså skapa en intuitiv känsla för dessa skillnader. Det författarna beskriver ovan kan kopplas till det semi-abstrakta stadiet, där eleverna inte arbetar med konkreta föremål utan bilder och symboler.

Knuth et al. (2006) påstår att likhetstecknet introduceras tidigt i lågstadiet och att det därefter ägnas väldigt lite tid åt likhetstecknet. Deras studie visar ett samband mellan förståelsen av likhetstecknet och att lösa ekvationer, där likhetstecknet blir en strategi för algebra. Det är viktigt att inte glömma bort likhetstecknet utan att alltid kontrollera att eleverna förstått dess betydelse när arbetssättet varierar inom ekvationer. Heddens (1986) beskriver att när eleverna enbart förstår en uppgift, som likhetstecknet, på ett konkret stadie, kan eleverna inte gå vidare till det semi-abstrakta stadiet. Att eleverna inte kan ta sig vidare till nästa stadie beror på att de inte har lärt sig att behärska uppgifter med likhetstecknet utan att använda konkret eller semi-konkret material.

Matematiska uppgifter med mönster har visat sig vara en av byggstenarna för algebra och att det har en viktig del i elevers kognitiva förmåga att kunna ta till sig algebraisk uttryck. Lee et al. (2011) skriver om att elever som har svårigheter med algebra även har visat sig ha svårigheter med mönster. Det handlar om att det finns ett samband mellan svårigheter med algebraiska uppgifter och mönster. Författarna skriver om vikten av att eleverna får möta mönster i undervisningen som en förberedelse för algebraiska uppgifter. När eleverna får arbeta med mönster ger det dem en förståelse för algebrans grunder. Enligt Heddens (1986) kan det bli svårt för eleverna att förstå det semi-konkreta och det semi-abstrakta stadiet om de inte har en förståelse för mönster, då det är en grund som eleverna behöver förstå i det konkreta stadiet för att kunna gå vidare mot det mer abstrakta räknandet. Det kan också kopplas till Heddens (1986) teori som belyser att elever behöver ta sig igenom alla stadier för att få en fullständig förståelse för det abstrakta räknandet.

## 6.3 *Det abstrakta stadiet*

Knuth et al. (2006) lyfter likhetstecknet som en avgörande roll för elevers förmåga att kunna förstå och lösa en ekvation korrekt. När det kommer till abstrakt räkning, handlar det om att konkret material som klossar och andra hjälpmedel tas bort. Eleverna räknar endast med matematiska symboler när det kommer till den abstrakta räkningen. Detta kan skapa förvirring hos elever som haft svårigheter i de tidigare stegen. Här handlar det om att eleverna behöver förstå övergången från det konkreta till det abstrakta, för att kunna operera på en abstrakt nivå (Heddens, 1986).

Powell et al. (2016) samt Ngu och Phan (2015) beskriver också likhetstecknet samt aritmetiken som svårigheter kopplat till algebra och ekvationer. Det handlar om att eleverna har en förståelse att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. När en elev löser en ekvation visar det också att eleverna vet hur symboler ska hanteras, att de ser samband och förstår tillvägagångssätten. Powell et al. (2016) lyfter att när en elev löser en ekvation på ett korrekt sätt, visar eleven på kunskap och förståelse för likhetstecknets betydelse. Vidare hävdar de att eleverna förväntas lösa ekvationer inom addition och subtraktion redan i första klass, dessutom lyfter de att eleverna bör kunna tillämpa sina aritmetiska färdigheter till algebra, då det krävs för att lösa ekvationer.

När elever löser ekvationer på en abstrakt nivå behöver de ha en korrekt förståelse för likhetstecknets betydelse (Knuth et al., 2006) samt ha aritmetiska färdigheter och förstå symboler (Vincent et al., 2015 & McNeil & Alibali, 2005). Fortsättningsvis beskriver författarna att eleverna inte letar efter ett svar, utan strävar efter att det ska bli lika mycket på båda sidorna av likhetstecknet, det vill säga att eleverna förstår att det finns ett samband. Dessutom har eleverna en förståelse för vad olika symboler betyder och hur de opererar med olika räknesätt.

McNeil och Alibali (2005) hävdar att många elever inte fått tillgång till eller har en fullständig förståelse för den logiska struktur som ligger bakom en ekvationslösning. Dessutom beskriver författarna att barn i åldrarna 7–11 har svårigheter med ekvationer som har operationer på båda sidor om likhetstecknet. Svårigheterna kan även bero på att eleverna saknar en färdighet kopplat till grundläggande aritmetiska operationer, som är nödvändigt för ett mer avancerat tänkande i relation till problemlösning i ämnet matematik.

McNeil och Alibali (2004) skriver också om olika strategier för att lösa okända tal och effekterna av att använda olika strategier. Ett exempel är strategin att följa ett specifikt mönster eller en metod, där det alltid ska vara ett svar i högerledet. Det är något som kan leda till svårigheter vid andra typer av uppgifter, som inte ser ut på det sättet. I en sådan situation behöver eleven gå från assimilation till ackommodation, det vill säga att elevernas kunskaper förbättras genom att stegvis öka svårigheten på uppgifterna. Deras studie visar att de elever som hade olika strategier gjorde färre fel vid kodning av uppgifterna. Däremot hade eleverna som bara använde en strategi färre sifferfel. Elever med goda kunskaper i aritmetik kan få svårare att övergå till algebra. Det är därför viktigt att tidigt arbeta med likhetstecknets betydelse, vilket innebär att eleverna behöver börja med likhetstecknets betydelse i lågstadiet.

# 7 Diskussion

I det här avsnittet av studien kommer teori, metod och resultat att diskuteras. Avsnittet avslutas med förslag till fortsatt forskning.

## 7.1 Teoridiskussion

Den kognitivistiska teorin är en av grundstenarna i den här systematiska litteraturstudien. Den är framtagen av Piaget (1968) och fokuserar på bland annat begreppen assimilation och ackommodation. Dessa två begrepp är kopplade till hur människan behöver skapa, men även skapar sig en förståelse av sin omvärld. Utifrån Piagets teori om det kognitiva tänkandet påträffades ytterligare två teorier inom den kognitivistiska teorin. Dessa teorier var Bruner (1966) och Heddens (1986) teori.

Bruner (1966) valdes med i studien då den inkluderar begreppen konkret och abstrakt tänkande. Eftersom algebra är ett abstrakt ämne, är Bruners (1966) teori passande då den synliggör vikten av att gå från ett konkret till ett abstrakt tänkande. Utifrån både Piaget (1968) och Bruners (1966) teori har Heddens (1986) teori växt fram, en teori som i fyra stadier synliggör vägen från det konkreta till det abstrakta. Heddens (1986) är den teori som ligger till grund för den här studien, och ger en bild av elevernas väg från ett konkret till ett abstrakt tänkande. Heddens fyra olika stadier som använts för att analyserat resultatet är *konkret, semi-konkret, semi-abstrakt* och *abstrakt* stadie. I analysen har också samband mellan de olika stadierna och fallgropar tagits upp.

## 7.2 Metoddiskussion

Som tidigare nämnt innebär en systematisk litteraturstudie att tidigare forskning granskas. Det genomfördes ett antal försök till sökningar där olika ord och avgränsningar användes. Eftersom detta upplevdes som svårt bokades ett möte in med en bibliotekarie, där olika databaser och avgränsningar behandlades. Detta hjälpte oss framåt i vårt arbete med sökningar som ansågs vara relevant tidigare forskning.

Till den här studien har vetenskapliga artiklar använts från databaserna ERIC, OneSearch och Google Scholar. Det är databasen ERIC som dominerat när det kommer till de vetenskapliga artiklarna som valts ut till den här systematiska litteraturstudien. Det beror på att databasen ERIC inriktar sig mot pedagogiskt arbete. Sökorden som använts har varit på engelska, eftersom det ger fler sökträffar och även fler publikationer som kan vara användbara till arbetet. Även litteratur från andra länder kan skilja sig från verkligheten i Sverige, detta är något som kan göra att resultatet inte är helt tillförlitligt inom den svenska skolan.

Till den systematiska litteraturstudien har totalt 17 vetenskapliga artiklar valts ut. Artiklarna har använts som en del i framställningen av studiens resultat. Dessa vetenskapliga artiklar ger svar på studiens syfte och frågeställningar, samt stärker resultatets trovärdighet. Eftersom det är ett stort antal artiklar som valts ut till den här studien, bidrar det till olika synsätt i studien. När artiklarna valdes ut började författarna, av det här arbetet att läsa rubrikerna för varje artikel. Ifall rubrikerna ansågs vara relevanta, lästes sedan den abstrakta delen i den vetenskapliga artikeln. Om även den abstrakta delen i den vetenskapliga artikeln ansågs vara relevant, lästes publikationen noga och användes i studien. Varje artikel som är med i den här studien är vetenskapligt granskad, vilket innebär att den är peer-reviewed.

När artiklarna söktes fram, gjordes en exkludering av publikationerna. Det innebär att om artiklar inte hittades i full text eller om de kostade pengar, gjordes ett medvetet val att inte ta med dem i studien på grund av ekonomiska skäl. Det gjordes också andra exkluderingar när artiklarna söktes fram till den här studien. Exempelvis valde författarna att inte ta med artiklar som var äldre än tjugo år gamla, eftersom målet med artiklarna var att de skulle vara relevanta till hur skolan ser ut idag. Det hittades däremot tre artiklar som var äldre än tjugo år, då övervägdes det noga om artiklarna var relevanta och om innehållet fortfarande var aktuellt.

## 7.3 Resultatdiskussion

Från resultatet framkom det ett antal olika svårigheter med ekvationer. Det konstateras där att likhetstecknet samt förståelse av symboler och aritmetiken, har en stor betydelse för elevers förståelse för ekvationer.

### 7.3.1 Förkunskaper

Författarna Pillay et al. (1998) lyfter att en av svårigheterna med ekvationer handlar om att det blir en fallgrop mellan algebra och aritmetiken. För att elever inte ska hamna i den här fallgropen, är det viktigt att de får arbeta med uppgifter på en operationell nivå när det kommer till pre-algebra. Själva begreppet pre-algebra syftar till att vara en form av förförståelse till den kommande algebran. Precis som Powell et al. (2016) skriver är pre-algebra viktigt för eleverna i utvecklandet av det algebraiska tänkandet. Eleverna behöver alltså få en stabil grund när det kommer till ekvationer och pre-algebra är en av de byggstenar som ger stabilitet kopplat till ekvationer. Om eleverna inte får arbeta med pre-algebra finns det en risk att eleverna inte får en förståelse för ekvationer, eftersom det inte blir någon bro mellan det konkreta och abstrakta. Utan pre-algebra missar eleverna alltså det semi-konkreta och det semi-abstrakta stadiet. Därför är det viktigt som lärare att se till att eleverna får arbeta med pre-algebra för att få goda förkunskaper och förstå algebraiskt tänk och räkning.

Författaren Powell et al. (2016) menar att en annan grund för att beräkna ekvationer är elevens aritmetiska färdigheter som även Ngu och Phan (2015) samt Hinton et al. (2015) hävdar. De menar att en viktig faktor för att lösa ekvationer kan vara att eleverna har sifferkännedom. Författarna beskriver även att det är viktigt att stegvis gå från konkret material till ett mer abstrakt tänkande. Ytterligare en faktor som kan vara problematisk är elevens strategier enligt McNeil och Alibali (2004). De menar att eleverna kan använda strategier som inte fungerar vid alla typer av ekvationer, vilket kan innebära att beräkningen av uppgifterna blir felaktiga. Därför är det viktigt som lärare att tydligt visa korrekta strategier som fungerar för alla typer av ekvationer, för att förhindra att eleverna riskerar att hamna i fallgropen. Som lärare är det därför även viktigt att lära ut rätt strategier och ha inblick på vilka strategier eleverna vanligtvis använder sig av. Läraren behöver stämma av med eleverna så att de använder sig av rätt strategier samt har de färdigheter som krävs för att lösa ekvationer. Om läraren har koll på förkunskaperna som likhetstecknet och förståelse av symboler, blir det lättare för läraren att lägga upp sin undervisning samt att ge eleverna de kunskaper som krävs för att utvecklas i matematiken.

Det är viktigt att ha elevernas förkunskaper i åtanke för att förstå elevers svårigheter med ekvationer. För att få en förståelse för algebra är mönster en viktig förkunskap (Lee et al, 2011). Hargreaves et al. (1998) påstår att arbetandet med mönster bidrar till ett abstrakt tänkande. Författarna Knuth et al. (2006) beskriver fördelen med att kunna lösa en abstrakt uppgift då deras undersökning visade att alla som använde sig av algebra för att lösa en ekvation, löste den korrekt. Därmed är algebraiska metoder för att lösa ekvationer ett tillförlitligt räknesätt som även går lätt att kontrollera.

### 7.3.2 Likhetstecknet och andra symboler inom ekvationer

Knuth et al. (2006) samt Baroody och Ginsburg (1983) skriver att svårigheterna med ekvationer hos eleverna är en bristande förståelse för likhetstecknet och även symbolers betydelse. Alibali et al. (2014) beskriver vikten av att ha en förståelse för symboler för att kunna räkna ekvationer. Det har visat sig att det är väldigt viktigt att eleverna förstår vad symbolerna betyder och hur de ska räkna med dem (Vincent et al. (2015). Det innebär exempelvis att *x* är en symbol för något okänt, precis som en tom ruta eller en blomma för ett tal. När eleverna arbetar med sådana uppgifter behöver de förstå att *x* är ett tecken för ett okänt tal. Dessutom belyser flera artiklar förståelsen av likhetstecknet som en svårighet med ekvationer som Driver och Powell (2015) bland annat skriver om. Eleverna behöver förstå att det ska bli lika mycket på båda sidorna, därför är det viktigt att eleverna inte bara lär sig uppgifter som 1 + 3 = 4 utan även 1 + 3 = 2 + 2. Det ger eleverna en förståelse för betydelsen av likhetstecknet och hur det kan användas samt räknas med.

Knuth et al. (2006) beskriver svårigheter med att eleverna tror att de ska hitta ett svar. Det stärks av Mcneil och Alibali (2005) samt Baroody och Ginsburgs (1983) studier som visar att eleverna har svårare med ekvationer där det okända är i det vänstra ledet än i högerledet. Baroody och Ginsburg (1983) beskriver detta som icke-standardiserade uppgifter. Svårigheterna kan även bero på att läraren inte kontinuerligt repeterar likhetstecknet utan enbart introducerar det i början av grundskolan (Knuth et al, 2006) Det är viktigt att läraren stämmer av och har koll på att eleverna förstår likhetstecknets innebörd för att de inte ska uppleva svårigheter med ekvationer. Det förstärks av Stacey och MacGregor (1997) som betonar vikten av att ge tydliga instruktioner vid introduktion till ekvationer.

Ett flertal författare har belyst likhetstecknet som en svårighet när det kommer till ekvationer, något som har visat sig vara en svårighet som är genomgående i alla stadier. Ett flertal författare har uttryckt att eleverna behöver förstå hur de räknar med likhetstecknet från ett konkret till abstrakt stadie för att i ett senare stadie kunna behärska algebraiska uppgifter och ekvationer.

Om eleverna i det konkreta stadiet använder sig av en våg och vikter, ska eleverna utifrån Heddens (1986) i det semi-konkreta stadiet använda sig av samma material fast som en visuell bild, det vill säga att uppgiften innehåller en bild på en våg. I det semi-abstrakta stadiet ska eleverna däremot inte behöva använda sig av just våg och vikter, utan ska kunna använda andra representationsformer för att förstå likhetstecknet.

### 7.3.3 Lärarens roll

När det kommer till lärarens roll i klassrummet, har det visat sig vara en viktig del i elevernas grundläggande attityd till matematik, något som citatet nedan belyser:

> Det är lärarna i låg och mellanstadiet som lägger den viktiga grunden för elevernas kunskaper i matematik och samtidigt grundlägger elevernas attityder till ämnet (Kilborn & Löwing, 2002, s. 75).

Enligt Heddens (1986) behöver läraren handleda eleverna för att de inte ska hamna i fallgropen. Här kan begreppen assimilation och ackommodation kopplas in. Läraren behöver veta vilken kunskapsnivå som eleverna ligger på för att kunna handleda de på ett bra sätt. För att eleverna inte ska hamna i just fallgropen och tappa motivationen till matematik behöver läraren hjälpa elever som behöver ackommodera den redan befintliga kunskapen innan de kan assimilera den nya kunskapen. Samtidigt behöver läraren utmana elever som har lätt för att assimilera den nya kunskapen för att de ska ha fortsatt motivation till matematik.

Av resultatet kan det konstateras att likhetstecknet samt dess betydelse ofta är något som introduceras tidigt i grundskolan. Däremot är det lätt att det glöms bort i de högre åldrarna (Knuth et al, 2006). Det handlar om att lärarna förmodligen redan förväntar sig att eleverna har en förståelse för likhetstecknets betydelse. Detta har visat sig vara en fallgrop inom ekvationer då likhetstecknet har en stor betydelse vid svårigheter med ekvationer. Det vill säga att eleverna inte förstår likhetstecknets betydelse. Därför är detta en aspekt som är väldigt viktig att repetera och se till att alla elever har en korrekt förståelse av likhetstecknet, för att inte hamna i svårigheter med ekvationer.

Utifrån resultatet kan det konstateras att det borde fokuseras mer på pre-algebra i läroplanen och i skolan än vad det gör då deras undersökning visade på låga resultat. Egentligen är det inte själva ekvationerna eller beräkningen av dem som är svårt, utan det är bristen på förståelse av likhetstecknet som gör det svårt för eleverna.

## 7.4 Fortsatt forskning

I den här studien har det försökts få svar på vilka svårigheter elever har med ekvationer och vart i ekvationen dessa svårigheter uppstår.

Då den här studien är en litteraturstudie, skulle det vara intressant att göra en empirisk studie på samma område för att se om forskning stämmer överens med verkligheten i den svenska skolan idag. Eftersom att forskningen inte är utförd på svenska skolor skulle det vara av intresse att undersöka om forskningen stämmer överens med den svenska skolan. I den empiriska studien skulle en lektion kunna planeras där eleverna ges förutsättning för att kunna räkna och lösa ekvationer. Litteraturen har visat att det är läraren som behöver hjälpa eleverna genom Heddens stadier för att de inte ska hamna i *The gap*. I en empirisk studie skulle det därför vara fokus på hur pedagogen lär ut samt hur elever kan ta till sig och förstå ekvationer. Genom att både göra en litteraturstudie och en empirisk studie kan resultatet förstärkas om resultaten stämmer överens, eller få en större variation om resultaten varierar.

# Referenser


Alibali, M. W., Stephens, A. C., Brown, A. N., Kao, Y. S., & Nathan, M. J. (2014) Middle School Students' Conceptual Understanding of Equations: Evidence from Writing Story Problems. *International Journal of Educational Psychology*, 3(3), 235-264.

Allwood, Carl Martin & Erikson, Martin G. (2017). *Grundläggande vetenskapsteori: för psykologi och andra beteendevetenskaper*.

Baroody, J. & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the equals sign. *The Elementary School Journal*, 84(2), 198–212.

Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass.,: Belknap Press.

Denscombe, Martyn (2016). *Forskningshandboken för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. Johanneshov: MTM.

Driver, M. K. & Powell, S. R. (2015) Symbolic and Nonsymbolic Equivalence Tasks: The Influence of Symbols on Students with Mathematics Difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(3), 127-134.

Eriksson Barajas, K., Forsberg, C. & Wengström, Y. (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. (1. utg.) Stockholm: Natur & Kultur.

*God forskningssed [Elektronisk resurs]*. Reviderad utgåva (2017). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315-331. doi: 10.1080/0305569980240305

Heddens, J. (1986). Bridging the Gap between the Concrete and the Abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 14-17.

Hinton, V., Stroizer, S & Flores, M. (2015) A Case Study in Using Explicit Instruction to Teach Young Children Counting Skills. *Investigations in Mathematics Learning*, 8(2), 37-54.

*Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). Matematikdidaktik i praktiken - att undervisa i årskurs 1-6. Malmö: Gleerups AB.*

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Martha W. (2006) Does Understanding the Equal Sign Matter? *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

Lee, Kerry ; Ng, Swee Fong ; Bull, Rebecca ; Pe, Madeline Lee ; Ho, Ringo Ho Moon (2011). Are Patterns Important? An Investigation of the Relationships Between Proficiencies in Patterns, Computation, Executive Functioning, and Algebraic Word Problems, *Journal of Educational Psychology*, 103(2), 269 –281. doi: 10.1037/a0023068

Leong, Y. H., Kin, H. W., & Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: *Surveying its origins and charting its future. The Mathematics Educator*, 16(1), 1-19.

http://math.nie.edu.sg/wkho/Research/My%20publications/Math%20Education/Yew%20Hoong%20et%20al%20(Final).pdf (Hämtad 21-11-2018)

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik: för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1999). *A flying start to algebra. Teaching Children Mathematics*, 6(2), 78–85.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2004) You'll See What You Mean: Students Encode Equations Based on Their Knowledge of Arithmetic. *Cognitive Science*, 28(3), 451-466. doi:10.1016/j.cogsci.2003.11.002

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005) Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child development*, 76(4), 883-889. doi:10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

*Nationalencyklopedin*, ekvation. http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/ekvation (hämtad 2018-12-13)

Ngu, B. H., & Phan, H. P. (2015) Comparing Balance and Inverse Methods on Learning Conceptual and Procedural Knowledge in Equation Solving: A Cognitive Load Perspective. *Pedagogies: An international Journal*, 11(1), 63-83. doi:10.1080/1554480X.2015.1047836

Ojose, B. (2008) Applying Piaget's Theory Applying Piaget's Theory of Cognitive Development to Mathematics Instruction. *The Mathematics Educator*, 18(1), 26–30.

Piaget, J. (1968). *Barnets själsliga utveckling*. (2. uppl.) Gleerups förlag.

Pillay, H., Wilss, L., & Boulton-Lewis, G. (1998). Sequential development of algebra knowledge: *A cognitive analysis*. *Mathematics Education Research Journal,* 10(2), 87–102. http://dx.doi.org/10.1007/BF03217344

Powell, S. R., Kearns, D. M., & Driver, M. K. (2016) Exploring the Connection between Arithmetic and Prealgebraic Reasoning at First and Second Grade. *Journal of Educational Psychology*, 108(7), 943-959. doi:10.1037/edu0000112

Skolverket. (2005). *En sammanfattning av TIMSS 2003*. Stockholm: Skolverket.

Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Building foundations for algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2(4), 252–260.

Sverige. Skolverket (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2018*. Stockholm: Norstedts Juridik AB.

Tillgänglig på Internet: http://www.skolverket.se/publikationer?id=3975

Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., & Pearn C. (2015). Misuse of the equals sign: An entrenched practice from early primary years to tertiary mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, 29(2), 31 – 39. https://search-proquestcom.proxy.lnu.se/eric/docview/1826525007/5E53AFDCEBB842A4PQ/1?accountid=14827 (Hämtad: 26 – 11 – 2018).

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P Clarkson et al (Ed.), *Proceedings of the 28 conference of Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, 759-766.

# Bilagor

## Bilaga A - Sökschema

| **databas & datum** | **sökord/sökfråga** | **avgränsningar** | **sökträffar** | **utvalda referenser** | **publikationstyp** |
|---|---|---|---|---|---|
| ERIC 181119 | Equations AND math AND difficulties | Peer-reviewed<br><br>Education level: Elementary education | 6 | Hinton, V., Stroizer, S & Flores, M. (2015) A Case Study in Using Explicit Instruction to Teach Young Children Counting Skills. *Investigations in Mathematics Learning*, 8(2) 37-54. | Vetenskapiga artiklar |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ERIC 181119 | Solving AND equations | Peer-reviewed<br><br>Education level: Elementary education<br><br>Subject: Equations mathematics | 5 1 | Driver, M. K. & Powell, S. R (2015) Symbolic and Nonsymbolic Equivalence Tasks: The Influence of Symbols on Students with Mathematics Difficulty. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(3), 127-134.<br><br>Alibali, M. W., Stephens, A. C., Brown, A. N., Kao, Y. S., & Nathan, M. J. (2014) Middle School Students' Conceptual Understanding of Equations: Evidence from Writing Story Problems. *International Journal of Educational Psychology*, 3(3), 235-264.<br><br>McNeil, N. M. & Alibali, M. W (2004) You'll See What You Mean: Students Encode Equations Based on Their Knowledge of Arithmetic. *Cognitive Science*, 28(3), 451-466. doi:10.1016/j.cogsci.2003.11.002<br><br>Ngu, B. H., & Phan, H. P. (2015) Comparing Balance and Inverse Methods on Learning Conceptual and Procedural Knowledge in Equation Solving: A Cognitive Load Perspective. *Pedagogies: An international Journal*, 11(1,) 63-83. doi:10.1080/1554480X.2015.1047836 | Vetenskapliga artiklar |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ERIC 181119 | ALL(algebra) AND ALL(equations) AND ALL(difficulties) AND ALL(elementary school) | Peer-reviewed<br><br>Full text<br><br>Publication date: 100101 - 181119<br><br>Language: English | 5 | Powell, S. R., Kearns, D. M., & Driver, M. K. (2016) Exploring the Connection between Arithmetic and Prealgebraic Reasoning at First and Second Grade. *Journal of Educational Psychology*, 108(7), 943-959. doi:10.1037/edu0000112<br><br>Vincent, J., Bardini, C., Pierce, R., Pearn, C. (2015) Misuse of the Equals Sign: An Entrenched Practice from Early Primary Years to Tertiary Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, 29(2), 31-39. | Vetenskaplig artikel |
| Onesearch 181127 ed | solving equations* equal sign* math* | allt-artiklar var som helst i posten. i abstract/beskrivingen peer-review | 28 | Eric J. Knuth, Ana C. Stephens, Nicole M. McNeil and Martha W. (2006) Does Understanding the Equal Sign Matter? *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312. | Vetenskaplig artikel |
| Eric 181129 | Algebra difficult elementary school | Peer-review | 17 | Lee, Kerry; Ng, Swee fong; Bull, Rebecca; Pe, Madeline Lee; Ho, Ringo Ho Moon (2011).<br>Are Patterns Important? An Investigation of the Relationships Between Proficiencies in Patterns, Computation, Executive Functioning, and Algebraic Word Problems, *Journal of Educational Psychology*, 103(2), 269–281. doi: 10.1037/a0023068 | Vetenskaplig artikel |
| ERIC 181121 | Equations, arithmetic, problem solving | Peer-reviewed<br><br>Publication date 2000-2019<br><br>Subject- equations | 52 | McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005) Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations, *Child development*, 76(4), | Vetenskaplig artikel |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | (mathematics) | | 883-889. doi:10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x | |
| ERIC 181129 | Strategies, patterns, education, mathematics | Peer-reviewed Publication date 1998-2018 Full text Article | 72 | Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315-331. doi: 10.1080/0305569980240305 | Vetenskapl ig artikel |
| ERIC 181129 | Mathematical *, repeat*, pattern element, early childhood | Peer-reviewed | 9 | Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P Clarkson et al (Ed.), *Proceedings of the 28 conference of Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, 759-766. | Vetenskapl ig artikel |

Linnéuniversitetet
Kalmar Växjö

Fakulteten för teknik
391 82 Kalmar | 351 95 Växjö
Tel 0772-28 80 00
teknik@lnu.se
Lnu.se/fakulteten-for-teknik