



Linnéuniversitetet

Kalmar Växjö

Examensarbete

För vem är det ett problem?

“Problemlösning i matematik kan jämföras med att spela schack. Det räcker inte med att lära sig pjäsernas rörelser. Den verkliga matematiken går ut på att spela spelet” (Berglund, 2005).



*Författare: Aida Mujak, Åsa Egier & Martin Bruveris
Handledare: Thomas Dahl
Examinator: Jeppe Skott
Termin: HT2019
Kurskod: 4GN02E
Ämne: Matematikdidaktik
Nivå: Avancerad*

Abstrakt

Denna systematiska litteraturstudie är uppdelad i två huvuddelar. Den första delen handlar om problemlösning där resultatet betonar vad som kännetecknar ett matematiskt problem och hur begreppet problemlösning definieras. Vidare redovisas resultat av vad olika forskare skriver om hur ett arbete med problemlösning bör användas i klassrummet och vilka fördelar som finns med detta arbetsätt. Den andra huvuddelen är inriktad på öppna problem. Denna del följer samma struktur där först en definition av begreppet öppna problem framkommer. Resultatet visar på många olika fördelar med ett arbete genom problemlösning och främst öppna problem i det matematiska klassrummet. Studien avser vara en hjälp till lärare som arbetar med problemlösning för att skapa en tydlighet i hur ett arbete genom problemlösning och öppna problem bör se ut.

Nyckelord

Problemlösning, öppna problem, slutna problem, matematikundervisning, matematik, grundskola

Innehållsförteckning

1. Inledning	3
2. Syfte	5
3. Metod	6
3.1 <i>Metod för datainsamling</i>	6
3.1.1 Google Scholar.....	6
3.1.2 Libris.....	7
3.1.3 Nominerat urval	7
3.2 <i>Manuellt urval</i>	8
3.3 <i>Etiska riktlinjer</i>	8
4. Begrepp	10
4.1 <i>Matematiska problem</i>	10
4.2 <i>Öppna problem</i>	10
4.3 <i>Slutna problem</i>	11
5. Problemlösning	13
5.1 <i>Vad är problemlösning?</i>	13
5.2 <i>Problemlösning i undervisningen</i>	15
5.3 <i>Fördelar med problemlösning</i>	20
6. Öppna problem	23
6.1 <i>Öppna problem i undervisningen</i>	23
6.2 <i>Fördelar med öppna problem istället för slutna</i>	26
7. Diskussion	31
7.1 <i>Resultatdiskussion</i>	31
7.1.1 <i>Problemlösning i matematiken</i>	31
7.1.2 <i>Öppna problem i matematiken</i>	32
7.2 <i>Metoddiskussion</i>	34
8 Sammanfattning	36
Referenser	37

1. Inledning

Studien kommer belysa vad problemlösning innebär samt hur öppna problem används i matematikundervisningen. I läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (2018) har problemlösning en central roll där det står följande:

“Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat” (Skolverket, 2018:54).

Anledningen till varför problemlösning är så central i studien är på grund av att problemlösning omfattar en väldigt stor del av matematikundervisningen. På senare år används problemlösningssuppgifter mer och mer i undervisningen. Det syns tydligt en stor skillnad i läroplanerna där problemlösning blivit ett större moment i undervisningen (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Skolverket (2018) menar att problemlösningssuppgifter som är kopplade till elevernas verklighet ger eleverna förutsättningar för framtiden när det handlar bland annat om att fatta välgrundade beslut (Skolverket, 2018). Norén (2010) anser att lärare måste ägna fler undervisningstimmar på att förklara uppgifter för eleverna så att de inte fastnar vid endast en strategi vid problemlösningssuppgifter. Läraren måste erbjuda en variation av strategier för att eleverna ska ges möjlighet att komma vidare i sin personliga utveckling. Författaren Norén (2010) styrker det Skolverket (2018) skriver om att lära för framtiden då hon menar att eleverna ska besitta fler strategier för att senare kunna lösa olika sorters problem i vardagen. De menar att detta är någonting som tränas och utvecklas vid ett arbete med problemlösning inom matematikundervisningen.

Forskningen skiljer på matematikuppgifter i dagens skola. De menar att en del är rutinuppgifter och en annan del är problemlösningssuppgifter (Chamberlin, 2010). Pettersson (2011) menar att skillnaden mellan dessa begrepp är att vid problemlösningssuppgifter har eleven ingen given strategi för hur problemet ska lösas. Vid rutinuppgifter har eleverna dock en tydlig inlärad strategi för hur uppgiften ska lösas. Studien kommer belysa bredden av problemlösning och att elever kan uppfatta problem på olika sätt. I problemlösning inom matematiken används idag ett flertal olika uppgifter såsom öppna- och slutna problem. Dessa begrepp kommer belysas mer ingående under rubriken begrepp. Det är viktigt att eleverna får ett brett arbetssätt för att få en vidgad syn

på problemlösningssuppgifter. Eleverna ska få möjlighet att se olika strategier för att kunna välja den mest lämpade för att klara uppgiften.

På senare år har användandet av så kallade öppna problem i matematikundervisningen blivit allt vanligare. Genom att arbeta med öppna problem finns det många vägar och strategier för att komma fram till svaret och även svaret kan variera. Thunholm (2004) menar att genom ett arbete med öppna problem är vägen fram till svaret det som utvecklar den matematiska kunskapen. Detta sker ofta genom diskussioner i grupp eller helklass vilket hjälper eleverna att utveckla en kommunikativ förmåga som blir allt viktigare i dagens matematik. Författaren menar att genom denna kommunikation kan eleverna lära genom varandra och få upp ögonen för nya strategier.

Anledningen till att problemlösning och speciellt öppna problem inom matematikundervisningen idag är så viktig är för att detta arbetssätt öppnar upp nya möjligheter hos eleverna. Genom att arbeta med öppna problem lär sig eleverna nya strategier för att bygga broar mellan olika matematiska områden. Detta kan bidra till att de ska kunna behärska sina matematiska kunskaper på ett mer effektivt sätt och i ett bredare perspektiv (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005).

2. Syfte

Syftet med litteraturstudien är att definiera begreppet problemlösning inom matematiken med hjälp av befintlig litteratur. Studien ska även belysa vad litteraturen säger om användandet av problemlösning och öppna problem i undervisningen. Studien avser också belysa eventuella fördelar som beskrivs genom ett arbete med problemlösning och öppna problem i matematikundervisningen.

Utifrån syftet har vi följande frågeställningar:

- Hur definieras problemlösning och hur används det inom matematikundervisningen?
- Vad är öppna problem och hur används öppna problem inom matematikundervisningen?
- Vilka fördelar finns med att använda problemlösning och öppna problem i matematikundervisningen?

3. Metod

I den här delen presenteras studiens gång vad gäller metod för insamling av material. Den första delen för studien har varit att göra systematiska litteratursökningar på olika sökplattformar. Rubriken manuellt urval kommer sedan beskriva hur just det material som använts inom studien har valts ut och behandlats. Slutligen kommer de etiska riktlinjer som studien förhållit sig till under dessa sökningar redogöras.

3.1 Metod för datainsamling

Då denna studie är en litteraturstudie har det samlats in, lästs och granskats en stor mängd skriven data i form av avhandlingar, vetenskapliga artiklar, böcker och tidigare examensarbeten. Efter att ha granskat en stor mängd material användes cirka 15 källor till studien som ansågs vara relevanta. Under arbetets gång tillkom även ett fåtal nya källor. Studien utgår från Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström (2013) beskrivningar för hur en litteratursökning kan genomföras. De beskriver olika sökmeter där *Google Scholar* har varit en viktig sökmotor för detta arbete. Utöver *Google Scholar* har sökningar efter material gjorts på *Libris*. Till dessa två sökmotorer gjordes även sökningar efter material på andra sökmotorer som *ERIC (Educational Resources Information Center)*, *SwePub* och *Onesearch*. Anledningen till att fokus legat på *Google Scholar* och *Libris* är att dessa två sökmotorer kändes enkla att använda och en stor mängd relevant data kunde samlas in från dessa. Sökningarna utfördes på de sökmotorer som kändes mest bekväma för att ge ett så bra sökresultat som möjligt.

3.1.1 Google Scholar

Google Scholar har varit den största källan till skriftligt material under denna litteraturstudie. På denna sökmotor finns tillgång till olika typer av vetenskaplig litteratur med olika publiceringsformat. På sökmotorn finns även många icke granskade publikationer vilket gör att det gäller att vara extra källkritisk (Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström 2013).

Sökningarna har skett genom att använda specifika sökord för att begränsa litteraturen till relevanta områden. Dessa sökningar har skett på både engelska och svenska. Exempel på sökord, som även översatts till engelska, har varit *problemlösning*, *öppna problem*, *slutna problem* och *matematik*. Sökningar har även gjorts på hela meningar för att försöka

specificera sökandet så mycket som möjligt. Detta har då utförts där rubriken innehåller fler än ett av de sökord som legat i fokus. Exempel på en sökning har då varit *problemlösning i matematik*.

3.1.2 Libris

Sökningarna på *Libris* gjordes vid ett tillfälle. Detta tillfälle var väldigt tidigt in under arbetsprocessen då sökandet fortfarande var väldigt brett. Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström (2013) beskriver olika strategier när man gör sökningar i en databas likt *Libris*. De skriver om hur det handlar om att begränsa sökningarna så effektivt som möjligt. Detta görs genom att använda till exempel "AND", "OR" och "NOT". Författarna beskriver även hur man kan bredda sitt sökresultat genom att använda en trunkering (*) i slutet av ett sökord. Detta görs genom att byta ut ändelsen på sökordet. Begränsningarna kan även göras genom att man exempelvis begränsar årtal och väljer vilken form av vetenskaplig text man vill ha som resultat, exempelvis avhandlingar. Det gäller att kombinera sökorden med de avgränsningar beskrivna ovan för att få så relevant data som möjligt. Sökningen som gjordes var "*problem solving*" AND "*mathematic**" samt avgränsat till avhandlingar vilket gav 44 sökträffar. Efter det manuella urvalet ansågs en av dessa innehålla forskning som var relevant för studien.

3.1.3 Nominerat urval

Utöver att leta material i sökmotorerna som beskrivits ovan användes tidigare examensarbeten inom samma område. Det gjordes ett nominerat urval utifrån flera examensarbeten, vilket ledde vidare till andra relevanta källor. Det gjordes liknande arbete utifrån handledarens förslag på relevanta källor. Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström (2013) skriver att det kan vara användbart att kolla i referenslistan på det relevanta material som redan valts ut till studien. Detta har visat sig vara en effektiv metod då det hjälpt oss att få med ytterligare referenser. Uppfattningen var även att detta sparade mycket tid då det fanns många relevanta källor samlade på ett koncentrerat ställe. Handledaren tipsade även om vissa namn som är relevanta inom forskningsområdet samt annan litteratur i form av böcker och artiklar som varit till hjälp inom området. Tack vare detta gick insamlingen av material relativt smidigt.

Ytterligare litteratur som legat till grund för datainsamlingen har varit kurslitteratur som har använts i tidigare kurser och pågående kurs. Eftersom vissa av dessa böcker har

använts som kurslitteratur i tidigare kurser fanns redan en viss förståelse för innehållet. Vilket gjorde att kurslitteraturen var smidig att få tag på. Det i sin tur gjorde att man kunde göra ett nominerat urval. Det vill säga att litteraturen har blivit läst och sedan har man sett över relevanta källor i denna.

3.2 Manuellt urval

När det manuella urvalet ur sökresultatet skulle utföras inleddes detta med att titta på de olika sökresultatens rubriker. Redan där gick det att se hur vissa av de resultat som sökningen gav inte var relevant för studien. Den data som fortfarande verkade vara intressant lästes abstraktet hos. Efter att abstraktet lästs hos dessa så gick det se att en stor del av sökresultaten inte var relevant. Här gjordes ännu en uteslutning av material som inte var relevant för arbetet. Av det material som nu återstod gjordes en snabb läsning av de delar inom materialet som kunde vara relevant för arbetet. Kunde materialet ge svar på denna studies frågor eller styrka annat insamlat material kunde det användas.

Studien har använts sig av forskartrianglering vilket Denscombe (2009) beskriver på ett sätt där en källa bekräftar en annan källa, det innebär att det en forskare har kommit fram till, bekräftas av en annan forskare. Författaren menar att det inte innebär att forskaren har rätt utan är en bekräftelse och att det kan styrka tillförlitligheten till materialet. Av det material som valdes till studien fanns material både på svenska och engelska. Detta för att bredda synen på forskning som gjorts då studiens område är densamma nationellt som internationellt.

3.3 Etiska riktlinjer

De etiska aspekterna handlar om att vara ärlig mot den litteratur som väljs för att kunna tolka det på ett korrekt sätt utan att dra egna slutsatser om vad som står. En annan viktig aspekt är att tänka på att vara källkritisk, vara ärlig mot materialet och inte övertolka det. En annan etisk del är att se om materialet är relevant för studiens forskningsfrågor och inte använda material som inte är relevant. Det är också viktigt att undvika plagiat och detta genom att göra en korrekt referering till den litteratur som använts (Vetenskapsrådet, 2017). Detta är något som även Eriksson Barajas, Forsberg & Wengström (2013) styrker då de talar om etiska överväganden inom systematiska litteraturstudier. De menar att forskningen inte får vinklas samt att inga personliga värderingar får synliggöras. Utifrån

etiska riktlinjer har vi även strävat efter att använda oss utav forskartrianglering som beskrivits i stycket ovan.

Studien förhåller sig till de tre steg som går att läsa i det Denscombe (2009) skriver vad gäller insamling av befintliga skriftliga källor. Utifrån dessa steg är den första auktoritativ, vilket innebär att de är tillförlitliga. Den andra är att de är objektiva, där inga personliga åsikter uttrycks. Den tredje är att de är faktabaserade. Studien förhåller sig till vetenskapligt granskade texter. Detta för att dessa texter förhåller sig till forskningsetiska principer vilket innebär att forskarna har förhållit sig och haft ett ansvar till deltagarna i deras forskning. Det handlar om att skydda deltagarnas intresse, undvika falska förespeglingar och oriktiga framställningar. Deltagare ska också ha gett forskarna ett godkännande för sitt deltagande. Utefter dessa principer går det att förlita sig på och känna sig trygg med att materialet är tillförlitligt (Denscombe, 2009). Studien kommer även att använda sig av andra källor i form av kurslitteratur, dock får man vara medveten om att vara källkritisk till dess innehåll. Dessa källor har främst använts för att styrka det forskningen säger och de resultat som framkommit.

4. Begrepp

I denna del kommer begreppen matematiska problem, öppna problem och slutna problem beröras. Detta för att skapa en tydligare förståelse för begreppen när dessa återkommer i arbetet. Begreppen kommer beskrivas på ett sätt så läsaren ser likheter och skillnader mellan öppna och slutna problem.

4.1 Matematiska problem

Schoenfeld (1985) beskriver begreppet matematiskt problem som en relation mellan en matematisk uppgift och eleven som ska lösa uppgiften. Han menar precis som många andra att ett matematiskt problem inte är ett problem för alla utan kan vara en rutinuppgift för vissa. Allt styrs av vilken förkunskap eleven som ska lösa uppgiften har. Om eleven har någon inövad strategi för att lösa uppgiften ses det mer som en rutinuppgift. Om eleven istället måste fördjupa sig i uppgiften för att komma fram till en lösningsstrategi ses detta som ett matematiskt problem. Ett matematiskt problem är alltså en uppgift som gör att eleven måste stanna upp och tänka extra för att hitta en fungerande lösningsstrategi. Eleven kan även behöva testa olika strategier för att hitta en relevant lösningsstrategi. Chamberlin (2010) diskuterar autentiska matematiska problem vilket han beskriver som problem som är verklighetsbaserade. Autentiska problem används till fördel vid introduktionen av matematiska problem. Det är dock viktigt att variera problemtypen så att eleverna inte enbart arbetar med autentiska matematiska problem. Detta för att eleverna ska få en möjlighet till abstrakt tänkande och en progressiv utveckling.

4.2 Öppna problem

Öppna problem har med åren blivit ett vanligare och populärare sätt att bedriva undervisningen. Med hjälp av öppna problemlösningssuppgifter kan verkligheten anknytas på ett konkret sätt och anses vara ett steg mot verklig matematik som används i det vardagliga livet. Detta innebär att eleverna övar på att lösa problem i matematik men de förbereder sig även på att lösa problem i det vardagliga livet (Wu, 1994). Att lära eleverna problemlösning för att de ska kunna använda strategier för att klara problem i framtiden, utanför skolans värld är någonting som även går att läsa om i nuvarande

läroplan. Där går det att läsa hur eleverna ska lära sig problemlösning för att i framtiden kunna fatta välgrundade beslut inom olika frågor (Skolverket, 2018).

Öppna problem beskrivs enligt Bais et al. (2012) som ett problem som kan bestå av flera olika svar. Det finns alltså inte bara ett svar utan flera svar och olika vägar för att komma fram till svaret. Elever får i öppna problem utmanas med att hitta olika vägar för att komma fram till svaret. Eleverna får en möjlighet att hitta lösningar efter sina förutsättningar. Bais et al. (2012) menar att elever växer om de får möjlighet att lösa en uppgift efter sina förutsättningar och de utmanas genom att de ska visa hur de har kommit fram till svaret. När eleverna visar för läraren hur de har kommit fram till svaret måste de använda matematiskt språk vilket kan indikera på hur långt eleven har kommit samt hur mycket eleven förstår.

Definitionen för öppna problem kommer i denna studie definieras som ett problem där det finns flera olika lösningsalternativ eller flera olika svar. Denna definition gäller för denna studie men kan skilja sig från hur andra forskare definierar öppna problem.

Ett exempel på ett öppet problem där det finns olika lösningsstrategier och flera olika svar kan vara följande:

“Tidigt en morgon när det var alldeles lugnt och tyst ute tittade Lasse ut genom fönstret. Han såg tre djur stå i mammas grönsaksland och äta. Hur många ben hade djuren tillsammans?” (Lektionsbanken, u.å).

Ser vi till problemet ovan kan eleverna tänka på olika sätt. För det första finns det inga anvisningar i problemet på vilka djur som står i grönsakslandet. Detta betyder att eleverna inte vet hur många ben djuren har utan de får tänka själva vilka djur det kan vara där. Ett antagande kan vara att en elev tänker att det är tre fåglar som står i grönsakslandet vilket skulle ge svaret sex ben. En annan elev kanske gör antagandet att det är tre rådjur som står i grönsakslandet vilket då ger svaret tolv ben.

4.3 Slutna problem

Slutna problem kommer i denna studie, till skillnad från öppna problem, innebära att det bara finns ett korrekt svar till uppgiften. Häggblom (2013) betonar att det även finns olika

lösningalternativ till slutna problem. Författaren menar att problemlösning handlar om att lära sig använda och utveckla olika strategier för att kunna lösa problem i vardagen. Detta är något som tränas inom alla typer av problem, alltså även de slutna problemen då problemlösaren måste försöka välja den mest effektiva strategin för att komma fram till det korrekta svaret.

Många är ganska kritiska till slutna problem då de anser att de slutna problemen till stor del begränsar elevernas inläring. En av dessa kritiker är Fox (1997). Hon menar, precis som Häggblom (2013), att slutna problem kännetecknas av att det enbart finns en korrekt lösning på problemet. Fox (1997) kritik till de slutna problemen grundar sig i att hon anser att slutna problem inte är anpassade till samhället då det sällan enbart finns ett korrekt svar till problem i verkligheten. Detta följer ett utvecklat lösningsmönster som utvecklar ett avgränsat kunnande. Hon menar att slutna problem ger ett mekaniskt tänkande istället för den undersökande och relationella tänkandet som vi borde sträva mot vid arbete med problemlösning.

För att tydliggöra skillnaden mellan öppna och slutna problem har inspiration tagits från det öppna problemet ovan. Exempel på ett slutet problem:

“Tidigt en morgon när det var alldeles lugnt och tyst ute tittade Lasse ut genom fönstret. Han såg tre rådjur stå i mammas grönsaksland och äta. Hur många ben hade djuren tillsammans?”

I problemet ovan finns det enbart ett korrekt svar. Vilken strategi eller representationsform som ska användas är dock inte självklar utan upp till eleven att själv bestämma över. Någon kanske använder multiplikation $3 \times 4 = 12$. Någon annan kanske ritat upp djuren för att sedan räkna benen. En tredje kanske räknar addition $4 + 4 + 4 = 12$. Oavsett vilken strategi eller representationsform eleverna väljer att använda kommer svaret förbli detsamma.

5. Problemlösning

Under denna del kommer arbetet beröra problemlösning. Första delen kommer handla om vad problemlösning är utifrån vad olika författare säger. Den andra delen kommer handla om hur problemlösning kan användas i undervisningen. Under tredje delen kommer studien ta upp fördelar med problemlösning inom matematiken. I dessa delar kommer perspektivet ligga både på eleverna i undervisningen samt läraren i undervisningssituationen.

5.1 Vad är problemlösning?

“Genom att lösa problem kan man utveckla tankar, idéer, självförtroende, analysförmåga, kreativitet och tålamod. Man lär sig att planera, upptäcka samband, förfina det logiska tänkandet och skaffar sig beredskap att klara situationer i livet” (Emanuelsson et al. 1996:69).

Många författare har sin egen syn på vad problemlösning egentligen är och hur det ska definieras. De flesta verkar överens om att problemlösning till skillnad från att lösa rutinuppgifter, inte innebär att tillämpa en given lösningsstrategi. Så beskriver till exempel Häggblom (2013) problemlösning inom matematik. Hagland, Hedrén & Taflin (2005) skriver precis som Häggblom (2013) att en matematikuppgift kan vara ett problem för vissa, men för andra, som löst liknande uppgifter tidigare, är det bara en rutinuppgift. Taflin (2007) beskriver att problemlösning ska stimulera eleverna till att utveckla sin kreativa förmåga. Eleverna ska även lära sig att formulera egna problem då hon menar att det är ett utvecklande sätt att lära sig mer om problemlösningens grunder. Precis som många andra definierar Taflin (2007) ett problem inom matematiken genom att det inte finns någon särskild lösningsmetod. Hon menar att det krävs en särskild ansträngning hos den som ska lösa problemet för att hitta en fungerande strategi.

Chamberlin (2010) förklarar problemlösning som en uppgift som innehåller flera olika steg. Han skriver också att problemlösning innebär att få eleverna i rätt tankemönster. Taflin (2007) beskriver också problemlösning som en process som innehåller flera olika steg. För att det ska vara en problemlösningssuppgift så ska det inte finnas något givet tillvägagångssätt utan problemlösaren ska se uppgiften som en utmaning. Hon anser att ett varierande arbetssätt och en lämplig nivå på problemet har en stor påverkan på

elevernas lärande. Taflin (2007) ser betydelsen av att alla elevers olika lösningar ska bli viktiga och belysas i undervisningen.

Genom att eleverna får arbeta med problemlösningssuppgifter så utvecklar de förmågan att framförallt kunna tänka kreativt och självständigt vilket leder till att en sådan uppgift blir en utmaning för eleven. Hagland, Hedrén & Taflin (2005) skriver också om betydelsen av att eleverna får ta del av flera olika metoder samt hur viktigt det är att ge eleverna rätt verktyg för att främja förståelsen. Schoenfeld (1985) anser att problemlösning är baserat på elevernas uppfattningar och erfarenheter inom matematik. Han definierar begreppet genom att skriva "problem solving is relative" (1985:14). Vidare menar han att sådana uppgifter är svårare än andra. Schoenfeld (1985) lyfter också betydelsen av att ge eleverna rätt verktyg för att underlätta deras lärande. Detta är även något som Sidenvall (2015) diskuterar då han pratar om att ge eleverna rätt förutsättningar för att underlätta förståelsen för matematiska problem.

Skolverket (2017) har sammanställt ett material, gällande problemlösning, utifrån matematiklyftet som lärare i Sverige tillsammans arbetat med och har tagit fram. Där arbetade de med att försöka minska missuppfattningarna om att problemlösning måste vara en textuppgift. De menar att en textuppgift mycket väl kan vara en rutinuppgift på samma sätt som en uppgift med enbart matematiska symboler kan vara en problemlösningssuppgift. Ett exempel på en problemlösningssuppgift med matematiska symboler är följande:

$$\underline{\quad} + 16 = 7 + \underline{\quad} \quad \text{Vilka tal saknas?}$$

Ett exempel på en textbaserad rutinuppgift är följande:

Kim har 7 kr och får 3 kr till från farmor. Hur mycket har Kim sammanlagt?

De beskriver vidare hur ett problem kan bero på vem som ska lösa uppgiften. Det handlar om vilka förkunskaper som finns hos personen som ska förstå problemet och om hen har lärt sig någon strategi för att lösa problemet.

Hagland, Hedrén & Taflin (2005) skriver om vad som kännetecknar en problemlösningssaktivitet. Detta kan ses i tre olika steg.

- Det handlar om eleven eller problemlösaren som ska lösa uppgiften. Eleven ska känna lust till att vilja eller ett behov av att lösa problemet.
- I uppgiften finns ingen given lösningsmetod. Den som ska lösa problemet får själv hitta en lämplig strategi eller lösningsmetod till problemet.
- Det krävs en extra ansträngning av den som ska lösa problemet för att hitta en relevant metod för problemets struktur.

Skolverket (2017) diskuterar vidare vad som kännetecknar ett problem inom matematiken. De menar att ett problem inom matematiken är en uppgift där eleverna ska hitta en lösning utifrån vissa bestämda omständigheter. Dessa omständigheter behöver inte alltid vara presenterade i problemet utan kan dyka upp under tiden problemet ska lösas. Slutligen betonar Skolverket (2017) att ett problem inom matematiken också ska stimulera ett engagemang hos eleven för ett fortsatt utvecklat lärande.

5.2 Problemlösning i undervisningen

Lester (1988) diskuterar om fyra grundprinciper när läraren ska lära eleverna om problemlösning. Han menar att det är ingredienser som är viktiga för att klara av att lösa uppgifterna. De fyra grundprinciperna är följande:

- Eleverna måste lösa många problemlösningssuppgifter för att förbättra sin problemlösningss förmåga. Här menar författaren på att eleverna måste lösa många och liknande uppgifter för att lära sig att behärska dem, endast då kan de utmanas med nya problemlösningssuppgifter och utveckla samt fördjupa sin förståelse.
- Problemlösningss förmågor utvecklas långsamt och sker under en lång tid. Då det tar lång tid för eleverna att utveckla problemlösningss förmågan måste uppgifterna presenteras i tidig ålder för att sedan avanceras i äldre åldrar. Det är viktigt att det sker en progression i elevernas sätt att bemöta problemlösningssuppgifter och genom mängd och kontinuitet kan detta ske.
- Läraren måste belysa att problemlösning är en viktig del att behärska. När eleverna förstår vikten av att kunna behärska olika strategier blir det lättare för eleverna att ta till sig instruktioner. Lärarens entusiasm om problemlösning är en

viktig del då eleverna oftast smittas av om undervisningen är rolig och att eleverna ser på läraren hur betydelsefullt det är.

- Eleverna gynnas mest av att få en tydlig systematisk undervisning av problemlösningsuppgifter. Eleverna gynnas om det finns en tydlighet i hur eleverna ska lösa en problemlösningsuppgift.

Lester (1988) utesluter ingen av principerna utan anser att de är lika viktiga att ta hänsyn till. Det är viktigt att arbeta med alla fyra grundprinciper för att eleverna ska ges bästa möjlighet till att bli så bra problemlösare som möjligt. Skolverket (2017) beskriver istället en fyrstegsplan för problemlösning ur ett elevperspektiv. Lesters (1988) och Skolverkets (2017) fyra steg ska inte ställas mot varandra utan bör ses som ett komplement till varandra. Detta då Lesters (1988) fyra steg handlar om att få en djupare förståelse för vad problemlösning är och hur man utvecklar sin problemlösningsförmåga över tid. Skolverket (2017) ska ses som ett hjälpmedel för hur eleven ska gå tillväga för att lösa ett specifikt problem i olika steg. Skillnaden är att de ska ses ur olika perspektiv i problemlösningen, helheten och den specifika uppgiften. Skolverkets (2017) fyrstegsplan till att lösa och förstå ett problem är följande:

- Det första eleverna ska göra när de får en problemlösningsuppgift är att skapa en *förståelse* för problemet. Förståelse skapas genom att ställa frågor om problemet. Till exempel frågor som: *Förstår jag innebörden av problemet? Förstår jag relevanta begrepp i problemet? Finns det några speciella förutsättningar i problemet? Saknas något för att lösa problemet?*
- När eleven har fått sig en förståelse för problemet ska de göra upp en *plan* för hur de ska lösa detta. Här handlar det om att skapa sig en tydlig arbetsgång för att lösa problemet samt att hitta någon effektiv strategi som kan användas för att hitta en lösning. Detta görs genom att återigen ställa frågor för att skapa denna tydliga struktur och plan som ska finnas. Exempel på frågor som bör ställas är: *Kan jag dela in problemet i mindre delar? Vilken fråga bör jag ställa först för att komma vidare? Liknar problemet något jag arbetat med tidigare? Vilken strategi kan fungera här?*

- När eleverna skapat sig en tydlig plan för hur de ska lösa problemet är det dags att göra ett *utförande*. Här ska eleverna följa den plan de gjort upp i tidigare steg.
- Den sista delen som Skolverket (2017) beskriver är *återkoppling*. Här ska eleverna kontrollera det resultat de kommit fram till. Det ska granskas noga för att försöka motverka eventuella fel som kan ha uppstått under lösningsprocessen. Återigen ställs frågor under återkopplingen för att göra denna kontroll. Exempel på frågor är: *Är resultatet rimligt? Kan det finnas fler lösningar till problemet? Skulle jag kunna löst problemet genom någon annan strategi? Har jag förhållit mig till de ramar och regler som finns i problemet?*

Skolverket (2017) skriver även om hur problemlösning i undervisningen skapar en djupare matematisk förmåga hos eleverna. De beskriver skillnaden mot matematikundervisningen med enbart rutinuppgifter då läraren lär ut samma matematikinnehåll till samtliga elever där kunskapen riskerar att bli relativt ytlig. Detta skulle i sin tur riskera att skapa svårigheter för eleverna när de ska se eller sätta in det matematiska innehållet i ett annat sammanhang eller kontext än vad eleverna är vana vid. Skolverket (2017) menar att skillnaden på undervisningen med rutinuppgifter och undervisning med problemlösning är stor. De beskriver att eleverna genom problemlösning skapar en djupare förståelse för det matematiska innehållet och hur detta faktiskt kan omsättas och anpassas till olika situationer. Skolverket (2017) menar att detta sker då elever arbetar med problemlösning och skapar sina egna strategier för att lösa dem. Då skapar eleverna en djupare förståelse för det matematiska innehållet som använts för att lösa uppgiften.

Ett arbetssätt som Lester (1988) nämner är att läraren först lyfter problemet i helklass. Författaren menar att det är viktigt att lyfta problemet i helklass för att alla tänker olika och då förs olika tankar och resonemang fram. Vidare ska eleverna arbeta i mindre grupper för att arbeta med problemet. Sen får eleverna i grupp visa olika sätt de kan lösa uppgiften på. Efter detta ska problemet lyftas i helklass, återigen för att belysa de olika strategierna som framkommit. Tanken med detta arbetssätt är att belysa gemensamt hur man kan lösa ett problem och höja elevernas självförtroende samt utveckla en kompetens för olika strategier (Lester, 1988).

Taflin (2007) skriver också om hur viktigt det är att skapa en diskussion med eleverna när de får arbeta med problemlösningsuppgifter. Författaren tar upp en skillnad mot Lester (1988) genom betydelsen av att eleverna får arbeta individuellt med problemlösning och inte enbart i helklass eller grupp. Taflin (2007) ser fördelen i att jobba individuellt då eleverna själva får välja metod och öva på den metod de själva behöver. Hon tar även upp hur viktigt det är att variera sitt arbetssätt och därför anser hon att det är viktigt att eleverna får jobba individuellt och i grupp med problemlösningsuppgifter. Författaren beskriver att lärarens uppgift i en sådan undervisning är att vara dirigent vilket innebär att varje enskild elev ska få chansen att visa vad de fått lära sig.

Lester (1988) diskuterar hur läraren måste vara aktiv under lektionen för att kunna stötta och leda eleverna rätt. När eleverna är aktiva så är det viktigt att observera för att se vad eleverna kan och hur de resonerar. Det är även ett viktigt tillfälle att se om de fastnar i sin läroprocess. Lärarens roll är då att leda, diskutera och stötta för att föra eleverna framåt i sitt lärande. Hur läraren bör arbeta med detta beskrivs tydligare i Lesters (1988) tre steg nedan. Om läraren inte är aktiv och stöttar eleverna kan det leda till att eleverna tycker att det är svårt och de kan då ge upp och tycka att problemlösning är svårt.

Sammanfattningsvis beskriver Lester (1988) lärarens undervisning i problemlösning som en process i tre steg.

- Det första steget han nämner är att innan eleverna på egen hand får arbeta med problemlösningsuppgifter så ska läraren läsa uppgiften för eleverna. De ska i helklass diskutera textens innehåll och dess innebörd. Läraren ska även ställa relevanta frågor till eleverna så att de förstår vad uppgiften efterfrågar. Det är även viktigt att tillåta eleverna att ge olika förslag på strategier för att pröva sig fram till mest lämpad metod.
- Det andra steget sker under arbetsprocessen då eleverna arbeta med problemlösningen. Det är då viktigt att läraren observera och ställer frågor till eleverna. Läraren ska vara en stötspelare som kan förse eleverna med förslag så att de inte fastnar och blir uppgivna om de inte förstår hur de ska gå tillväga.

- Det tredje och sista steget är att lyfta elevernas lösningar inför helklass för att identifiera olika lösningsstrategier. Det är viktigt att läraren belyser de olika strategierna som eleverna har påvisat för att utvidga elevernas syn på problemet och att de ser att problemet kan lösas genom olika strategier.

Lester (1988) menar även att det är viktigt att läraren belyser typiska drag som kan ses i problemlösningsuppgifter så att eleverna kan få en förståelse för vilken strategi de kan använda vid liknande problem. Detta hjälper eleverna att lära strategier för att i framtiden vara flexibla då de arbetar med problemlösning (Lester, 1988). Taflin (2007) styrker det Lester (1988) skriver om hur viktigt det är att eleverna får träna på att välja rätt metod och strategi. Detta sker genom att eleverna får ta del av olika tillvägagångssätt för att kunna se vad som passar problemet bäst. Detta lyfts med fördel av läraren där hen förklarar de olika strategier som eleverna har lyft för att skapa en tydlighet i de olika strategierna. Det är även till fördel att eleverna får förklara sina tillvägagångssätt då vi lär oss på olika sätt. Eleverna kan oftare förklara på sin nivå för en annan elev som inte förstår. Det är då viktigt att läraren styr eleverna så att innehållet blir tydligt och konkret när de förklarar sina lösningsstrategier. Genom helklasskommunikation så får eleverna möjlighet till att se och skapa sig en förståelse för fler strategier vilket de kan använda sig av vid problemlösning vid senare tillfällen.

Skolverket (2017) diskuterar i artiklar från matematiklyftet hur de ser på problemlösning i klassrummet. De menar att det är viktigt att eleverna ska kunna tolka problemet och kunna relatera det till tidigare erfarenheter samt tidigare inlärd kunskap. Även Taflin (2007) beskriver vikten av att eleverna har förmågan till att kunna förstå och tolka problemet för att kunna lösa det. Skolverket (2017) beskriver vidare hur problemlösning handlar mycket om diskussion mellan elever för att kunna förklara olika situationer och lösningsstrategier på problemet. De menar även att en viktig del av problemlösning, just under dessa diskussioner mellan elever, är att det ska stimulera eleverna till att använda sig av och utveckla både vardagsspråket och matematikspråket. Språkutvecklingen är en stor del av problemlösning där begreppsförståelsen utvecklas mycket då det krävs en stor förståelse för problemet och problemets innehåll vid diskussioner. Detta blir språkutvecklande då eleverna ges tillfälle till att lära sig begrepp och språk när de diskuterar innebörden av problemet (Skolverket, 2017).

5.3 Fördelar med problemlösning

Lester (1988) samt Skolverket (2017) menar att problemlösning till största del inte handlar om att komma fram till en korrekt lösning utan att eleverna ska lära under tiden de löser problemen. De menar att en viktig del inom matematiken är att eleverna ska hitta strategier för att kunna lösa problem ur det vardagliga livet. Detta är även något som går att läsa i LGR11 (Skolverket, 2018) där de beskriver just hur matematikämnet ska förbereda eleverna för att kunna lösa framtida problem i vardagen.

Hagland, Hedrén & Taflin (2005) skriver om att när elever utmanas genom problemlösning stimuleras eleverna och motiveras då till att lära mer. De beskriver även hur eleverna genom problemlösning utvecklas att tänka självständigt, kreativt, systematiskt och strukturerat. Vidare beskriver de hur viktigt det är för eleverna att höra varandras lösningsstrategier för att ta åt sig och lära av hur andra elever tänkt och resonerat kring problemet. Detta har visat sig vara viktigt då eleverna ska lära för att förbereda sig inför vuxenlivet där eleverna då ska klara av att lösa problem ifrån vardagen eller inom sitt yrke. Även Boaler et al. (2011) skriver om betydelsen av att eleverna får höra varandras lösningsstrategier då varje metod är lika viktig. Genom att använda sig av detta arbetssätt så leder det till att eleverna blir flexibla och kan använda sig av flera olika metoder. Författaren belyser även vikten av att jobba effektivt med dessa metoder genom exempelvis upprepning.

En annan stor och tydlig fördel med problemlösning är att det är språkutvecklande. Då mycket forskning menar att problemlösning i någon form ska ske genom diskussion i en mindre eller större grupp skapas en språkutvecklande arbetssituation. Skolverket (2017) beskriver det som ett språkutvecklande arbetssätt som kombinerar det matematiska språket med det vardagliga. De menar att en stor del av problemlösning är att lära sig tolka och förstå problem. Att tolka och förstå problem ger eleverna även språklig träning. Eleverna behöver förstå problemets innehåll och relevanta begrepp som finns med i problemet vilket då utvecklar språket.

Emanuelsson et al. (1996) beskriver lärarens roll inom det kommunikativa ämnet matematik. De menar att det inte räcker att ge eleverna tillfällen för att diskutera olika lösningsmetoder med varandra utan stöttning från någon lärare. Istället menar de på att elever behöver hjälp med att sätta ord på sina tankar för att få en ökad förståelse för vad

det egentligen är de gör eller tänker sig göra. Taflin (2007) diskuterar fördelarna med att föra diskussioner inom samarbetet under problemlösning. Hon betonar hur detta utvecklar elevernas matematiska resonemang och att de får träna på att skapa en matematisk diskurs. Taflin (2007) menar även på att det matematiska samtalet och samarbetet är en väsentlig del då eleverna ska utveckla matematiklärandet men även väsentligt för att utveckla matematikundervisningen i klassrummet.

Emanuelsson et al. (1996) diskuterar vidare hur kommunikation inom matematiken i de tidiga skolåren med fördel kan ske genom teckningar och bilder. De menar att eleven kan rita upp en situation och förklara hur hen tänker inom problemet istället för att använda sig av matematiska tecken. Då fokus i denna situation ligger på att utveckla det matematiska resonemanget kan läraren även vända på situationen. Läraren kan då rita upp en situation för att skapa förståelse för problemet hos eleven och sen be eleven beskriva problemet och föra ett resonemang om detta för att komma fram till en lösning.

Emanuelsson et al. (1996) skriver även hur lärarens roll är viktig inom den kommunikativa delen inom matematiken från en annan vinkel inom språkutvecklingen. De menar att det är viktigt att eleverna beskriver för läraren hur de tänker för att öva på att beskriva och att sätta ord på sina egna tankar. Detta gör även att eleverna ges en möjlighet till att själva höra när de har ett resonemang som kanske inte håller hela vägen. Vid ett sådant scenario menar Emanuelsson et al. (1996) att det hjälper eleverna att uppmärksamma detta då de berättar för någon hur det tänker. Med fördel kan det vara för läraren då hen kan ge eleven rätt stöttning så eleven kommer på rätt tankebanor igen och skapa ett nytt och hållbart resonemang. På detta sätt skapas ett undervisningsinnehåll utifrån elevernas tankar och idéer.

Thunholm (2004) beskriver hur de på en skola har arbetat allt mer med problemlösningssuppgifter inom matematiken. De har gått ifrån ett arbete som varit mer styrt av rutinuppgifter och uppmärksammat flera fördelar med en matematikundervisning som haft mer fokus på problemlösning. Den mest uppenbara skillnaden som de uppmärksammat är att undervisningen nu är mer kommunikativ än den tidigare var då det till största del handlade om tyst och självständig räkning. Undervisningen har nu även blivit mer verklighetsanknuten vilket enligt Skolverket (2018) är en viktig del inom matematikundervisningen i dagens skola. Vidare beskriver Thunholm (2004) hur en

undervisning genom problemlösning har gjort så eleverna skapar sig en tydligare förståelse för det matematiska innehållet istället för att lära sig mycket utantill. Hon menar att detta uppkommit genom att ett arbete med problemlösning mer handlar om att lägga fokus på processen fram till svaret och inte så stor vikt vid själva svaret. Avslutningsvis ser Thunholm (2004) stora fördelar med detta arbetssätt för de framtida matematiska kunskaper eleverna ska utveckla då hon ser ett ökat intresse för matematikämnet vilket skapar en vilja att utveckla detta vidare.

6. Öppna problem

Under följande del kommer studien att beröra och gå djupare in på öppna problem. Det kommer handla om att beskriva öppna problem i undervisningen. Vidare kommer det handla om vilka fördelar som finns med att använda sig av och arbeta med öppna problem istället för slutna problem.

6.1 Öppna problem i undervisningen

Skolverket (2017) menar att i ett öppet problem kan det finnas fler lösningsalternativ till uppgiften. De skriver vidare om att elever med fördel arbetar i grupp när de arbetar med öppna problem. Detta för att eleverna får möjlighet till diskussion och reflektion kring de olika lösningsstrategierna de använt sig av. När eleverna får arbeta med öppna problem så ska inte svaret ligga i fokus utan hur eleverna måste arbeta vidare med problemet för att kunna lösa det. De måste ta reda på information som är relevant att veta för att lösa det samt välja en lämplig lösningsstrategi. Det är viktigt att eleverna kan förklara och motivera den valda metoden då detta utvecklar elevernas förståelse för problemlösning.

Skolverket (2017) fortsätter diskutera öppna problem inom matematikundervisningen och menar då på att den viktigaste delen är att dessa problem har olika lösningar. Detta skapar bra matematiska samtal då fokus hamnar på lösningen och inte svaret. Eleverna behöver under dessa diskussioner redogöra för hur de gått tillväga för att lösa problemet för att få bekräftat av de andra om de löst problemet eller inte, utefter problemets ramar. De menar att dessa diskussioner ökar motivationen hos eleverna och skapar bra tillfällen att utveckla deras resonemangsförmåga samt att de tränar på interaktion med andra. Skolverket (2017) menar även på att dessa matematiska samtal tydliggör problemets lösning och de olika strategierna som har använts för att komma fram till lösningen. De menar även att eleverna behöver få mycket kunskaper om olika strategier. Eleverna behöver lära sig om olika strategier och få erfarenheter av hur de kan användas inom olika områden.

Thunholm (2004) beskriver ett arbete med öppna problemlösningssuppgifter där en bakomliggande faktor till detta arbetssätt är att eleverna ska kunna påverka förutsättningarna i uppgifterna. Hon menar att det viktigaste inom ett arbete med öppna problem är att samtliga elever ska få känslan av att de kan och få möjlighet att lyckas.

Hon beskriver hur ett arbete genom öppna problem ger alla en möjlighet att lyckas genom olika lösningsstrategier samtidigt som de som vill och behöver utmanas mer kan få göra detta. En förutsättning som hon beskriver i detta arbete är att samtliga elever arbetar med samma problemlösningsuppgift. En annan förutsättning som hon beskriver är tiden. Hon menar att ett arbete med öppna problem måste ske under en längre tid, gärna ett problem under en hel lektion. Detta skapar i sin tur förutsättningar för att alla ska lyckas. De elever som behöver extra stöttning hinner få detta för att komma fram till en lösning. Samtidigt kan de elever som behöver mer utmaning hinna få detta. Då alla elever under lektionen arbetat med samma problemlösningsuppgift menar Thunholm (2004) att det är viktigt att i slutet av lektionen lyfta uppgiften i helklass. Eleverna får då ge sina förslag på lösningar. Hon menar att syftet med detta är att synliggöra de olika lösningsstrategierna och belysa likheter och skillnader mellan dessa.

Cooney (2004) skriver om att ett öppet problem ska bestå av fem olika delar. Dessa delar styrks även av Bais (2012) och är följande:

- Den första delen är att eleven utsätts för många olika matematiska delar som de ska värdera och kunna placera i olika steg för att veta vad som är viktigt eller inte. Eleverna får visa om de förstår det matematiska innehållet, de får även visa om de kan omvandla det matematiska språket till verkligheten.
- Den andra delen är att eleverna ska upptäcka att det finns olika sätt att lösa en uppgift på. Eleverna är oftast vana vid att det endast finns ett svar på en uppgift, men i öppna uppgifter finns det flera. Eleverna kan genom matematiska diskussioner utbyta kunskaper genom att lyssna på hur andra har löst samma uppgift men på olika sätt.
- Den tredje delen är kommunikation. När eleven måste förklara sin lösning kan läraren se hur mycket eleven förstår och om hen har flera olika lösningar till uppgiften.
- Den fjärde delen är att uppgiften ska vara tydlig, eleven ska förstå dess innehåll på ett klart och tydligt sätt trots att det finns olika lösningar. Då elever oftast inte är vana vid att förklara sitt matematiska resonemang är det viktigt att eleven vet vad som förväntas så att inga missförstånd uppstår.
- Den femte och sista delen är att eleverna skapar en matematisk kommunikation och att de matematiska diskussionerna blir synliga för dem. Det är viktigt att de

förstår att lärandet är kommunikationen och att de ser lösningar på olika sätt. När eleverna får träna på olika matematiska resonemang tillsammans lär de av varandra då alla tänker olika (Cooney, 2004) (Bais, 2012).

Skolverket (2015) skriver om hur betydelsefullt det är att arbeta med öppna problem i klassrummet. De definierar precis som andra författare att öppna problem är uppgifter där det inte finns någon given lösningsstrategi och där flera lösningar kan vara rätt. Vidare förklarar de att öppna problem kräver större engagemang från eleverna. De skriver också om hur bra det är för lärare att arbeta med öppna problem. Detta för att öppna problem kräver mycket från eleverna och kan vara till stor fördel för läraren då hen kan se hur mycket en elev kan och har förstått. Skolverket (2015) skriver vidare om hur läraren ska introducera öppna problem i klassrummet. När läraren introducerar kan eleverna till en början känna en viss osäkerhet och obegriplighet då det kan vara mycket nytt för eleverna. Det är därför viktigt att avsätta tillräckligt med tid för att skapa en möjlighet för alla elever. Vissa elever kan se en stor fördel med att få arbeta med öppna problem då det kan vara väldigt "fritt" samtidigt som andra elever kan uppleva öppna problem som att de aldrig får bekräftat att de har rätt på uppgiften. Genom att arbeta regelbundet med öppna problem skriver Skolverket (2015) att de kan förändra sociomatematiska normer i klassrummet. De menar att det kan leda till att eleverna fokuserar mer på de olika lösningsstrategier som använts för uppgiften. Genom att eleverna får ta del av dessa olika lösningsstrategier kan detta skapa mer uppmärksamhet och eleverna får viljan av att kunna skriva fler metoder. Det är viktigt att som lärare uppmärksamma alla lösningsstrategier oavsett om det är rätt eller fel. Detta för att eleverna ska våga chansa samtidigt som de utmanas.

Skolverket (2015) beskriver en arbetsgång där de går igenom hur ett öppet problem stegvis bör bemötas i undervisningen.

- Det första steget handlar om att läraren ska formulera uppgiften. Det är då viktigt att läraren tänker igenom hur problemet kan bemötas för att försöka undvika missuppfattningar och skapa tydlighet i uppgiften.
- Det andra steget handlar om att skapa en ramberättelse för uppgiften vilket innebär att väva in uppgiften i en berättelse för att skapa intresse för problemet. Det är då viktigt att berättelsen tydligt och på ett enkelt sätt framställer problemet.

- Det tredje steget handlar om att fundera på hur eleverna ska arbeta med problemet. Ska de arbeta enskilt, i par eller i grupp? Under arbetets gång får läraren tillfälle att förstå vilket matematiskt innehåll eleverna använder sig utav för att skapa sig en förståelse för vilken kunskap eleverna besitter.
- Det fjärde steget handlar om att presentera gruppernas olika lösningar. Läraren ska då lägga fokus på de olika lösningarna som framkommit och visa att det finns en stor variation. Det är även lärarens uppgift att tydliggöra för elevgruppen hur de olika resonemangen leder fram till lösningen. Det är viktigt att läraren visar på likheter och olikheter mellan de olika resonemangen.
- Det femte steget handlar om att det ska finnas en tydlighet i problemet rent konkret och praktiskt för att eleverna ska kunna komma igång med problemlösningen. Här blir en viktig del för läraren att vara stöttande och ge ledtrådar till de elever som kräver detta för att komma vidare, men även ställa utmanande frågor till de elever som snabbt kommit fram till en lösning.
- Det sjätte steget handlar om att kunna dela upp problemet i mindre delar för att skapa en tydlig arbetsgång. Detta i form av att erbjuda exempelvis laborativt material. Syftet med detta är att skapa en förståelse för eleverna så de kan arbeta vidare självständigt med problemet.
- Det sjunde och sista steget handlar om att utmana eleverna när de anser sig vara färdiga med problemlösningssuppgifterna. Detta kan då göras genom att ställa utmanande frågor i form av till exempel: *Hittar ni fler lösningar? Kan problemet lösas på fler sätt?* (Skolverket, 2015).

6.2 Fördelar med öppna problem istället för slutna

Skolverket (2017) skriver att eleverna genom att få arbeta med problemlösning utvecklar olika strategier då de under sådana uppgifter får möjlighet till mycket diskussion och interaktion. Till skillnad från slutna problem så kan öppna problem ha flera lösningar med olika svar, vilket leder till att eleverna får en utmaning när de löser öppna problem. Skolverket (2015) skriver dock att elever kan vara väldigt bekväma vid att få arbeta med slutna problem då de får bekräftat att svaret är rätt då det enbart finns ett rätt svar. De ser större fördelar med att eleverna får arbeta med öppna problem då det leder till större diskussion samt att eleverna får lära sig att använda fler tillvägagångssätt. Skolverket (2015) betonar vikten av att utmana eleverna och detta genom att de får arbeta med öppna

problem. En annan fördel de tar upp är att eleverna utifrån att få arbeta med öppna problem kan få arbeta med dessa uppgifter oavsett förutsättningar och kunskapsnivå.

Thunholm (2004) tar också upp fördelen med att alla elever ska få arbeta med samma problem oavsett kunskapsnivå. Elever som behöver extra stöd eller mer utmaning ska få möjlighet till detta. Genom att alla elever får arbeta med samma problem så kan det leda till ett matematiskt resonemang där alla elever får visa sina kunskaper. Författaren skriver vidare om att eleverna ska förklara i helklass hur de kommit fram till den lösningen. Hon menar, genom att belysa detta i helklass så kan eleverna få en förståelse för hur andra tänker och därmed utveckla sitt matematiska tänkande. Det är viktigt att få med alla elever och att alla elever ska få reflektera över sin valda lösningsstrategi.

Skolverket (2017) fortsätter diskutera om hur ett arbete med öppna problem skapar tillfälle för att utveckla det matematiska resonemanget hos eleverna. De menar att ett arbete med öppna problem riktar fokus ifrån att hitta ett rätt svar då det inom dessa uppgifter finns flera möjliga svarsalternativ. På detta sättet skapas ett bra tillfälle för att lyfta de olika lösningsstrategierna för att få igång ett matematiskt resonemang i klassrummet. Skolverket (2017) menar att förmågan att resonera blir central då eleverna måste förklara och motivera sitt val av strategi för de övriga i klassen eller i gruppen. På detta vis synliggörs det matematiska innehållet för samtliga inblandade i uppgiften. Detta gör i sin tur att de gemensamt kan komma fram till om det är en hållbar lösningsstrategi och om resultatet är rimligt. Ett arbete med öppna problem på detta vis menar författarna ökar elevernas förutsättningar för interaktion med andra och skapar ett kommunikativt klassrum. Det möjliggör ett motiverande arbetssätt där eleverna i större utsträckning får möjlighet till att utgå från sig själva.

Hägglom (2013) diskuterar arbete med problemlösning i grupp där öppna problem utvecklar elevernas matematiska resonemang. Författaren belyser även betydelsen av att alla i gruppen medverkar i lösningsprocessen. Detta för att alla elever ska få en förståelse för problemet. Även Skolverket (2017) diskuterar grupparbetets betydelse inom arbetet med öppna problem. De menar att ett arbete med öppna problem nästan uteslutande bör ske genom grupparbete då detta hjälper eleverna till vidare utveckling. De kan genom att hjälpas åt skapa ett engagemang för uppgiften och skapa en gemensam kreativitet inom uppgiften.

Ett arbete med öppna problem handlar om att utveckla ett matematiskt tänkande för att kunna föra resonemang om hur eleverna gått till väga för att lösa uppgifterna. Emanuelsson et al. (1996) diskuterar problemlösning i skolans tidiga år och lägger stort fokus på att eleverna med fördel kan rita eller måla upp sina tankar. Detta skulle vara ett bra underlag för att skapa matematiska diskussioner inom klassrummet med de yngre eleverna. Det skulle då kunna ske jämförelse mellan olika lösningar och lösningsförslag beroende på hur eleverna ritat upp detta. Fokus hamnar på det matematiska innehållet och resonemanget istället för att lägga fokus på att eleverna ska skriva ut sin matematiska lösning med matematiska symboler. Genom detta arbetssätt som Emanuelsson et. el. (1996) beskriver finns det en stor fördel med att börja att arbeta med öppna problem i de tidiga skolåren. Detta för att väcka elevernas intresse för matematiken och visa på vilka variationer som finns för att lösa olika uppgifter.

Bais et al. (2012) skriver om fördelar med öppna problem och menar att dessa problem hjälper eleverna att bygga upp sitt självförtroende. När eleverna får möjlighet att träna på olika problemlösningssuppgifter känner de sig säkra på att ta sig an dem på ett självsäkrare sätt. Författarna menar att eleverna lär sig på flera olika sätt och att elever visar upp sin kunskap på olika sätt och får möjlighet att lära av varandra. Öppna problem ger eleverna möjlighet att utgå från sin egen kunskap för att kunna lösa problemet vilket bidrar till att självförtroendet ökar. När eleverna ser att de kan lösa uppgifterna utifrån sin egna kunskap blir det som författarna menar mer självsäkra och det i sin tur leder till att de kan lösa svårare problem där det krävs en mer avancerad strategi.

Bais et al. (2012) beskriver olika forskares tankar angående öppna problem och de menar att det är en effektiv metod för utvärdering av elevens lärande. Forskarna menar att dessa uppgifter ger en bättre bild av elevernas prestationer, genom att elevernas diskussioner, resonemang och tankar blir tydligare på ett annat sätt än om de skulle lösa rutinuppgifter. Bais et al. (2012) beskriver vidare om den största fördelen med öppna problem och det är att uppmuntra eleverna till ett djupare lärande genom problemlösningssuppgifter. De menar att detta arbetssätt förespråkar ett djupare inlärningskoncept istället för rutinlösningar. Detta bidrar till att det blir enklare att använda sig av dessa tankemönster och strategier i andra situationer från verkligheten vid senare tillfällen. Författarna menar vidare att ett arbete genom öppna problem ska vara utmanande för tankeverksamheten

men på en tillräckligt avancerad nivå för att eleverna fortfarande ska behålla intresset för problemet.

Skolverket (2015) skriver om fördelarna med att använda sig av öppna problem och de menar att synen på matematiska uppgifter genom öppna problem kan ändras sitt fokus på det som är rätt och fel. De beskriver att normerna i klassrummet kan ändras genom att belysa tillvägagångssätten istället för att belysa svaren som rätt eller fel. Fokus ska ligga på flera olika lösningar, inte svaret. Vidare menar de att det även är viktigt att lära sig att räkna men att det matematiska resonemanget där de resonerar, kommunicerar och argumenterar är minst lika viktigt att lära sig. Thunholm (2004) diskuterar känslan av att lyckas inom matematiken i samband med öppna problem. Hon menar på, precis som Skolverket (2015), att fokus inte ska ligga på vad som är rätt och fel då det inte enbart finns ett rätt svar eller en lösningsstrategi inom öppna problem. Detta ger alla elever en känsla av att de lyckats när de hittat en lösning de anser stämmer och kan argumentera för.

Emanuelsson et al. (1996) belyser lärarens roll när eleverna ska försöka lösa ett öppet problem, vilket är att vara stöttande och leda eleverna fram i sitt lärande. Även Häggblom (2013) tar upp lärarens roll i en undervisning där eleverna får arbeta med öppna problem. Författaren tar upp betydelsen av att ha kontroll över undervisningssituationen och vikten av att varje elev förstår problemet som presenteras. Hon diskuterar ett arbetssätt där varje elev får en arbetsuppgift så att alla blir delaktiga i lösningsprocessen. Författaren beskriver arbetssättet genom att eleverna blir indelade i grupper, mellan två till fyra i varje grupp. Tanken är att alla elever får ett uppdragskort där de antingen är ledaren, materialförvaltaren, räknemästaren eller sekreteraren. Detta arbetssätt är inkluderande för samtliga gruppmedlemmar och bidrar till att alla elever får vara ansvarstagande till gruppens lösning. Eleverna ska genom detta arbetssätt kunna stötta varandra och kunna redogöra för lösningsprocessen individuellt. Hon belyser även vikten av att uppmärksamma elevernas arbete genom att motivera och lyfta fram positiva moment i elevernas lösningar. Även Thunholm (2004) tar upp detta arbetssätt med att eleverna har olika roller inom grupparbetet för att göra alla engagerade i problemet. Även hon lägger fokus på att samtliga i gruppen ska kunna argumentera för lösningsprocessen.

Fox (1997) diskuterar hur lärarens undervisning inom ett arbete med öppna problem kan se ut. Hon menar precis som många andra att arbete i grupp är till stor fördel inom dessa uppgifter. Hon beskriver hur grupparbete då både kan ses som ett mål men även som ett medel för att skapa tydlighet för problemet. Detta leder då till att gruppen blir en hjälp för varandra för att kunna lösa problemet på ett effektivt sätt. Vidare menar hon att det är viktigt att arbeta med grupper då det hjälper eleverna att skapa diskussioner för att utveckla matematiska processer i samband med andra. Fox (1997) fortsätter diskutera lärarens roll i undervisningen med öppna problem och grupparbete. Hon menar att det är viktigt att försöka kombinera grupper så att utvecklingsnivån inom gruppen är någorlunda lika. Detta gör då att de kan lära och ta hjälp av varandra på ett effektivt sätt. Hon beskriver även hur detta gör att läraren kan utnyttja denna situation till att skapa en förståelse för vilka styrkor och svårigheter eleverna har då de arbetar inom dessa grupper. Slutligen beskriver hon hur lärare har en viktig roll inom elevernas grupparbete då hen måste hitta rätt stöttning till de olika grupperna för att det ska skapas högsta tänkbara kvalitet på samarbetet och den matematiska utvecklingen.

Emanuelsson et al. (1996) lyfter fram fördelar med att "tala matematik" inom öppna problem och anser att det finns några viktiga moment som ska beaktas. De diskuterar vikten av att läraren ska hjälpa eleverna i sin språkutveckling. Det hjälper inte endast för eleverna att "tala matematik" utan läraren måste även stötta dem i sina tankar. När läraren stöttar eleverna i sin tankeprocess och resonemang så stötts elevernas språkutveckling samt deras matematiska tänkande. När eleverna synliggör sitt resonemang för läraren så menar författarna på att det matematiska innehållet eleverna lyfter blir ett undervisningsinnehåll. På detta sätt guidas eleverna på rätt väg samt belyser läraren de olika tankar och strategier som lyfts. Detta i sin tur leder till att eleverna ser olika tillvägagångssätt. Emanuelsson et al. (1996) menar att om eleverna får lyfta sin egen strategi så kan missuppfattningar och misstolkningar klagöras. De menar även att eleverna oftast hör om deras lösning och strategi kan vara rimliga. I detta läge finns möjlighet för eleverna genom sitt resonemang att utveckla en ny tankeprocess om vad som kan vara rimligt. En annan fördel Emanuelsson et al. (1996) belyser är att "skriva matematik". De menar att läraren då kan se hur eleverna tänker genom att skriva sina matematiska förklaringar eller att de använder symboler. Författarna menar att genom att använda diskussion och skrivning kompletterar de varandra och bidrar till ett lärande.

7. Diskussion

Studiens avslutande del är uppdelad i en resultat- och metoddiskussion. Detta för att knyta ihop studien och dess delar. Under rubriken resultatdiskussion kommer vi diskutera problemlösning och öppna problem utifrån vad studien kommit fram till. Under metoddiskussion kommer vi diskutera varför vi haft detta tillvägagångssätt och om detta har varit relevant utifrån ett kritiskt förhållningssätt.

7.1 Resultatdiskussion

Syftet med denna studie var att skapa en förståelse för definitionen av problemlösning och öppna problem samt hur de används inom matematikundervisningen. Studiens första forskningsfråga besvaras genom att vi undersökte begreppet problemlösning utifrån vad olika författare och studier säger om detta. Studien besvarar även vilka fördelar som finns med att använda problemlösning inom matematikundervisningen. För att besvara studiens andra och tredje forskningsfråga började vi med att ge svar på vad öppna problem är. Därefter undersökte vi hur öppna problem används inom matematikundervisningen samt vilka fördelar som finns med dem. Även här har vi läst många författares tankar och idéer om detta samt hittat ett flertal fördelar med att använda öppna problem inom matematikundervisningen. Studien kommer även ge exempel på uppgifter som ligger till grund för att skapa en tydlig diskussion och en koppling mellan matematiska uppgifter och studiens resultat.

7.1.1 Problemlösning i matematiken

Utifrån studien handlar problemlösning om att lösa ett matematiskt problem vilket är en uppgift där eleven inte har någon given lösningsstrategi till uppgiften. Vad som är ett problem kan därför variera beroende på vem som löser uppgiften. Detta beror på vilka förkunskaper eleven har och vilka inövade lösningsstrategier de besitter. Problemlösning innebär ett arbete där eleven får göra en ansträngning för att utveckla sin kreativa förmåga. Det ska bidra till att föra matematiska diskussioner utifrån elevens tillvägagångssätt fram till en lösning. Problemlösning kan ske stegvis vilket hjälper eleven att uppmärksamma relevanta lösningsstrategier för att komma fram till en lösning. Problemlösning ska vara stimulerande, engagerande och bidra till ett fortsatt utvecklat lärande.

Att utveckla sin problemlösningsförmåga beskrivs enligt (Skolverket, 2017) i fyra steg. Dessa innebär att eleverna måste lösa många problemlösningsuppgifter, problemen bör presenteras i tidig ålder för att ge eleverna tid till utveckling, läraren behöver ge stöttning för att hjälpa eleverna att utveckla olika strategier samt att det behöver finnas en tydlig struktur för hur problemet kan lösas. Samtliga dessa behövs för att utveckla problemlösningsförmågan. Ett effektivt sätt som belysts är att problemen lyfts gemensamt i klassen för att alla ska skapa en förståelse för problemet för att sedan kunna arbeta vidare. Detta skapar en tydlighet så att eleverna får utmanas och hitta en lösningsstrategi. Det är också viktigt att läraren är aktiv för att kunna ge rätt stöttning för eleverna under problemlösningsprocessen. Lärarens stöttning kan hjälpa eleverna framåt i sitt lärande. Det bidrar till ökad motivation och ett ökat intresse för problemlösning. Problemlösning handlar även om att lära sig för framtiden då människor hela tiden ställs inför problem i vardagen som ska lösas. Därför är det viktigt att ha kunskap om flera olika lösningsstrategier. När eleverna utvecklar olika lösningsstrategier sker detta med fördel genom diskussioner. Diskussionerna bidrar även till ett språkutvecklande arbete där både vardagsspråket och matematikspråket utvecklas.

Genom att arbeta med problemlösning stimuleras eleverna och motiveras till ett vidare lärande. Problemlösning utvecklar även eleverna till att ha ett självständigt tänk, vara kreativa, tänka systematiskt och vara strukturerade i sin arbetsgång. En annan del som belysts i litteraturen är vikten av att eleverna diskuterar sina lösningar. När eleverna har lärt sig flera olika lösningsstrategier blir eleverna mer flexibla och mer anpassningsbara vid framtida problemlösningssituationer. Det är viktigt att föra det matematiska samtalet under problemlösningsuppgifter för att utveckla ett matematiskt resonemang i kombination med det vardagliga språket, vilket blir utvecklande i dubbel bemärkelse. Matematiken i problemlösning har även visat sig vara mer verklighetsanknuten vilken är en stor bidragande orsak till att eleverna känner en ökad motivation och ett ökat engagemang för matematiken. Problemlösning handlar om processen fram till lösningen och inte själva svaret på uppgiften.

7.1.2 Öppna problem i matematiken

Utifrån studien handlar öppna problem om uppgifter som kan ha flera olika svarsalternativ eller olika lösningar fram till svaret. Dessa uppgifter har olika lösningsalternativ och strategier för att hitta en lösning. I dessa uppgifter ligger inte svaret

i fokus utan istället vägen fram till svaret. Eleverna måste kunna förklara och motivera sina valda metoder de har använt sig av. Öppna problem ger eleverna möjlighet till att utgå mer från sig själva och sin kunskapsnivå. Det i sin tur gör att fler elever kan få möjlighet till att utvecklas och känna tilltro till sin förmåga samt få en känsla av att de kan och har lyckats.

Ett öppet problem kräver ett större engagemang från eleverna då det handlar om att hitta egen information för att kunna lösa problemet. Då öppna problem handlar om att lära sig om olika lösningsstrategier och inte själva lösningen sker detta ofta genom diskussioner och samarbeten. Det är viktigt att eleverna får förklara och motivera sina tankar i arbetet vilket då bidrar till en utvecklad förståelse. Genom detta sker ett stort utvecklande av elevernas resonemangsförmåga samtidigt som de tränar på att samarbeta med andra. Genom att eleverna får samtala och diskutera med varandra synliggörs deras olika lösningsstrategier vilket bidrar till ett nytt lärande. Diskussionerna bör ligga i fokus under ett arbete med öppna problem då de synliggör vägen fram till lösningen vilket är en viktig del med arbetet kring öppna problem. Inom en klass kan man med fördel arbeta med samma problem en hel lektion för att lyfta de olika lösningsstrategierna som finns inom klassen. Genom att lyfta de olika lösningar eleverna har kommit fram till då detta skapar en tydlighet till att det finns olika lösningsstrategier till samma problem.

Ett arbete med öppna problem kan vara till stor fördel för läraren då det synliggör elevernas matematiska kunskaper på ett tydligt sätt. Läraren kan utmana eleverna till att hitta olika lösningsstrategier och svar till samma problem och ställa mer utmanande frågor inom öppna problem. Genom detta arbete kan normerna i ett klassrum förändras då det fokuseras på olika lösningar istället för svaret. Detta kan bidra till att alla kan lyckas utifrån sina förutsättningar och känna ökad motivation. Läraren har en viktig roll då de ska ge rätt stöttning för att ge en hög kvalite på samarbetet vilket bidrar till bättre matematisk utveckling. Genom att samarbeta kring öppna problem finns en stor fördel då läraren tydligt kan skapa sig en uppfattning om styrkor och svagheter inom elevernas matematiska kunskaper.

Ett exempel på ett öppet problem som nämnts i studien är följande:

“Tidigt en morgon när det var alldeles lugnt och tyst ute tittade Lasse ut genom fönstret. Han såg tre djur stå i mammas grönsaksland och äta. Hur många ben hade djuren tillsammans?” (Lektionsbanken, u.å).

I detta exempel är det tydligt hur ett öppet problem inte enbart har ett korrekt svar. Detta då det inte finns några bestämda djur och därmed inte hur många ben ett djur har. Eleverna får här själva bestämma vilka djur som står i grönsakslandet. Vilket leder till att eleverna kommer få olika lösningar. Detta skapar ett bra tillfälle för diskussion där eleverna gemensamt kan tydliggöra likheter och skillnader då de presenterar sina lösningar. Läraren kan uppmärksamma varför dessa likheter och skillnader kan uppstå samt hur de olika eleverna tänkt. Det i sin tur hjälper eleverna att ta åt sig av varandras lösningar för att ge ett bredare sinne för liknande problem.

7.2 Metoddiskussion

Anledningen till varför vi valt att göra en systematisk litteraturstudie grundar sig i ett eget intresse för problemlösning och dess användning i klassrummet. Vi ville få fram vad forskningen säger om problemlösning, öppna problem och dess användning i klassrummet. Detta då vi av erfarenhet från vår verksamhetsförlagda utbildning sett att det finns brister inom detta och att utvecklingspotentialen för användningsområdet är brett. Anledningen till att vi valt att fokusera på problemlösning är för att elever ska kunna lära sig hitta flera lösningar till samma problem. Detta bidrar till att eleverna utvecklar många strategier vid problemlösning som senare kan användas i det vardagliga livet.

För att hitta den relevanta litteratur som behövdes utfördes sökningar på relevanta sökmotorer såsom Libris och Google Scholar. På dessa sökmotorer använde vi relevanta sökord för det forskningsområde vi intresserat oss för. Dessa sökord har kombinerats, satts ihop och bildat meningar för att hitta så tydlig och begränsad litteratur som möjligt. Vi har granskat sökträffarna vi fått fram genom olika steg. Vi har bland annat sett till rubriken, gått vidare till abstraktet och även läst hela texten. Av den litteratur som ansågs vara relevant för forskningsområdet och som kunde knytas till forskningsfrågorna gjordes ett manuellt urval. Utifrån detta urval hade vi sedan källor som kunde användas i arbetet med att besvara våra forskningsfrågor. Därtill gjordes även ett nominerat urval från den relevanta litteratur vi hittat vilket gjorde att vi kunde hitta flera relevanta källor. De källor

vi hittat efter dessa steg ansågs vara tillräckliga för att besvara våra forskningsfrågor på ett bra och rättvist sätt.

Utifrån dessa källor kunde vi hitta underlag till studien vilket gjorde att vi senare kunde sammanfatta och skapa oss en förståelse för olika källors innehåll. Denna förståelse bidrog till att vi kunde arbeta vidare med studien och få relevant fakta. Vårt syfte med studien och metodens val var hela tiden att skapa oss en förståelse för vad forskningen säger om detta forskningsområde. Kunskapen vi får kan bidra till att vi som lärare får en ändrad syn på matematikundervisningen och problemlösningens påverkan på den.

8. Sammanfattning

Denna vetenskapliga litteraturstudie har handlat om problemlösning inom matematikundervisningen i skolan. Studien har berört begrepp som matematiskt problem, problemlösning, öppna problem och slutna problem för att skapa en förståelse för dessa. Det ligger även stort fokus på att undersöka och komma fram till hur problemlösning och öppna problem bör användas inom matematikundervisningen enligt olika forskningsresultat. Granskning av forskning har sammanställts för att se samband och hitta olika framgångsfaktorer inom problemlösning. Studien har definierat olika fördelar med att använda sig av problemlösning och öppna problem i matematikundervisningen. Det har framkommit ett flertal olika steg som kan användas för att känneteckna ett matematiskt problem. Det har även framkommit olika steg som visar hur eleverna kan gå tillväga för att kunna lösa dessa. Studien har avsett att skapa en förståelse för arbetet med problemlösning i matematikundervisningen för lärare. Detta då dagens läroplan har tydliga ingångar till ämnet samtidigt som mycket forskning visar på stora fördelar med matematisk utveckling genom problemlösning.

Ur ett lärarperspektiv kan studiens resultat hjälpa lärare som behöver ett stöd i sin undervisning med problemlösning inom matematiken. Detta för att skapa en tydligare förståelse för vad problemlösning egentligen är och hur det bör användas i klassrummet. Den belyser även vikten av att lärare måste ha god kunskap inom olika problemlösningstrategier för att kunna motivera och engagera eleverna. Genom detta skapar läraren möjligheter för eleverna att kunna utveckla ett matematisk och kritiskt tänkande vilket hjälper dem tolka och lösa vardagliga matematiska situationer. Ur ett elevperspektiv kan vi se genom studiens resultat att ett arbete med problemlösning och främst öppna problem ger eleverna möjlighet till individuell utveckling. Studiens resultat visar även att ett arbete med öppna problem skapar en bredare undervisning vilket gör att undervisningen blir mer individanpassad och kan ge möjlighet till att fånga alla elever. Studien visar även på stora fördelar med att arbeta tillsammans med andra inom problemlösning och främst öppna problem. Detta då forskningen visat på vikten av att höra andras lösningsstrategier och att eleverna utvecklas genom matematiska diskussioner.

Referenser

Bais, B., Hussain, A., Hussain, H. & Samad, A. S (2012). *How to construct open ended questions*. Procedia – Social and Behavioral Sciences. Hämtad: 2018-12-03. Tillgänglig på internet: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187704281203861X>

Berglund, D (2005). *Problemlösning är # 1*. 1. uppl. Stockholm: Liber

Boaler, J (2011). *Elefanten i klassrummet: att hjälpa elever till ett lustfyllt lärande i matematik*. 1. uppl. Stockholm: Liber

Chamberlin, S. A (2010). *Mathematical Problems That Optimize Learning for Academically Advanced Students in Grades K-6*. Journal of Advanced Academics, v22 n1 p52-76. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ906121.pdf>

Cooney, T.J., Sanchez, W.B., Leatham, K. & Mewborn, D.S (2004). *Open-ended assessment in math: A searchable collection of 450+ questions*. Hämtad: 2018-11-04. Tillgänglig på internet: <http://books.heinemann.com/math/about.cfm>

Denscombe, M (2009). *Forskningshandboken: för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. 2. uppl. Lund: Studentlitteratur.

Emanuelsson, G, Emanuelsson, L, Wallby, K, Ahlström, R, Bergius, B, Holmquist, M, & Rystedt, E (1996). *Nämnamn Tema (1996). Matematik- ett kommunikationsämne. Arbetssätt och arbetsformer (s.11-17)*. Göteborg: Institutionen för ämnesdidaktik: Göteborgs universitet.

Eriksson Barajas, K, Forsberg, C, & Wengström, Y (2013). *Systematiska litteraturstudier i utbildningsvetenskap: vägledning vid examensarbeten och vetenskapliga artiklar*. 1. utg. Stockholm: Natur & Kultur

Fox, R (1997). *Femåringar upptäcker matematik*. Nämnamn, nr 1 1997. Hämtad: 2018-11-18. Tillgänglig på internet: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/0308_97_1.pdf

Hagland, K, Hedrén, R & Taflin, E (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. 1. uppl. Stockholm: Liber

Hägglom, L (2013). *Med matematiska förmågor som kompass*. 1. uppl. Lund: Studentlitteratur

Lektionsbanken. (u.å). *Lös öppna problem med bilder*. Hämtad: 2012-11-20. Tillgänglig på internet: <https://lektionsbanken.se/lektioner/los-oppna-problem-med-bilder/>

Lester, F (1988). *Teaching mathematical problem solving*. Nämnamn, nr 3 1988. Hämtad: 2018-11-26. Tillgänglig på internet: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3243_88_3.pdf

Norén, E (2010). *Flerspråkiga matematikklassrum [Elektronisk resurs] : diskurser i grundskolans matematikundervisning*. Diss. (sammanfattning) Stockholm : Stockholms universitet, 2010.

Pettersson, E (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. Diss. Växjö : Linnéuniversitetet, 2011. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-11578>

Schoenfeld, A. H (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press

Sidenvall, J (2015). *Att lära sig resonera: om elevers möjligheter att lära sig matematiska resonemang*. Licentiatavhandling (sammanfattning) Linköping : Linköpings universitet, 2015

Skolverket (2018). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2018*. (2011). Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2017). *Didaktiska perspektiv på matematikundervisningen 2*. Stockholm: Skolverket. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Grunds%C3%A4rskola/461_didaktiskaperspektivpamatematikundervisninge_n2_SAR/5_problemlosning/5.%20Probleml%C3%B6sning.pdf

Skolverket (2015). *Att arbeta med öppna problemen*. Stockholm: Skolverket. Hämtad: 2018-11-26. Tillgänglig på internet: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:875699/FULLTEXT01.pdf>

Taflin, E (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällen till lärande*. Diss. Umeå : Umeå universitet, 2007. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: <http://umu.diva-portal.org/smash/get/diva2:140830/FULLTEXT01.pdf>

Thunholm, M (2004). *Meningsfull matematik*. Nämnaren, nr 3 2004. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2831_04_3.pdf

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed [Elektronisk resurs]. Reviderad utgåva (2017)*. Stockholm: Vetenskapsrådet. Hämtad: 2018-11-20. Tillgänglig på internet: <https://publikationer.vr.se/produkt/god-forskningssed/>

Wu, H (1994). *The role of open-ended problems in mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior. Hämtad: 2018-12-03. Tillgänglig på internet: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0732312394900442>

