Linnéuniversitetet Kalmar Växjö

Stabilisering/sidostagning av sadeltak med stora spännvidder uppbyggda av spikplåtsförbundna fackverkstakstolar av trä

Växjö 2020-11-27

ISBN: 978-91-89283-36-7

Förord

Det projektet som denna rapport är ett delresultat av initierades av Svenska Takstolsföreningen STAK. Centrum för byggande och boende med trä (CBBT) finansierade projektet. Beslut om genomförande av projektet togs vid CBBTs styrelsemöte den 18 februari 2014 och fick titeln ”Framtagning av handbok för stabilisering av takkonstruktioner med fackverkstakstolar av trä”. Projektet planerades pågå under perioden april 2014 till januari 2016, dvs. under knappt två år. Detta tidsschema kunde inte hållas och arbetet med att ta fram handboken avbröts våren 2018. Arbetet resulterade dock i den föreliggande rapporten där en transparent dimensioneringsgång för stabilisering av takkonstruktioner med fackverkstakstolar av trä presenteras.

Tidigt i projektet konstaterades att den europeiska normen för dimensionering av träkonstruktioner, Eurokod 5, inte fungerar tillfredställande för den aktuella typen av konstruktioner där man använder sig av stagande element med låga styvhetsvärden. Detta yttrar sig i att de effektiva knäckningslängderna för takstolarnas överramar i den böjveka riktningen blir längre, dvs. mindre gynnsamma, än vad som tidigare har förutsatts i samband takstolsdimensionering. Linnéuniversitetet tog upp detta problem med arbetsgruppen som svarar för revideringen av nästa version av Eurokod 5.

Ett värdefullt bakgrundsdokument i projektet har rapporten, ”Aussteifung von Nagelplattenkonstuktionen” från 2010 med Martin Kessel och Alexander Kühl som författare, utgjort. Dimensioneringsgången som presenteras här bygger till stora delar på den rapporten.

Det huvudsakliga arbetet i projektet utfördes av Bo Källsner i nära samarbete med Johan Vessby. Den senare verkade även som projektledare.

Under hösten 2020 färdigställs en handbok kring stabilisering av takkonstruktioner och med anledning av detta tillgängliggörs nu även detta bakgrundsarbete, genom publicering via Linnaeus University Press. Förutom detta förord, färdigställdes manuskriptet till denna rapport i samma form redan i juni 2018.

Johan Vessby och Bo Källsner

Innehållsförteckning

LISTA ÖVER VIKTIGA ANVÄNDA SYMBOLER

1 KONSTRUKTIONENS UPPBYGGNAD OCH VERKNINGSSÄTT VID BELASTNING....6

2 FÖRUTSÄTTNINGAR OCH BEGRÄNSNINGAR....10

3 DIMENSIONERINGSGÅNG....12

4 IMPERFEKTIONER....13

5 DIMENSIONERING AV PARALLELLFACKVERKEN....15

5.1 BESTÄMNING AV ÖVERRAMARNAS UTBÖJNING OCH TAKSTOLARNAS SNEDSTÄLLNING DÅ TAKKONSTRUKTIONEN BEFINNER SIG I DEFORMERAT TILLSTÅND....15
5.2 KRAFTEXCENTRICITETER I YTTERTAKETS TJOCKLEKSRIKTNING....16
5.3 LASTER PÅ PARALLELLFACKVERKEN I DEFORMERAT TILLSTÅND....17
5.4 FÖRDELNING AV LASTERNA TILL DE OLIKA PARALLELLFACKVERKEN....20
5.5 EKVIVALENT JÄMNT FÖRDELAD LAST FÖR DIMENSIONERING AV PARALLELLFACKVERKEN 20
5.6 KRAFTJÄMVIKTEN I YTTERTAKET....22
5.7 BESTÄMNING AV PARALLELLFACKVERKENS UPPLAGSREAKTIONER....23

6 BESTÄMNING AV STAGNINGSPUNKTERNAS FJÄDERSTYVHET LÄNGS ÖVERRAMARNA....25

7 BESTÄMNING AV MAXIMAL STAGNINGSKRAFT I BÄRLÄKTEN....28

8 KONTROLL AV ÖVERRAMARNA MED HÄNSYN TILL KNÄCKNING I BÖJVEKA RIKTNINGEN....31

8.1 DIMENSIONERING MED K_C-METODEN....31
1.1 8.2 DIMENSIONERING ENLIGT ANDRA ORDNINGENS TEORI....32

9 DIMENSIONERING AV DRAGBAND....34

10 DIMENSIONERING AV DRAGBANDENS ANSLUTNINGAR VID NOCK OCH TAKFOT....37

11 DIMENSIONERING AV NOCK- OCH TAKFOTSLINJERNA....40

A SIDOSTAGNING AV TRYCKT BALK PÅ ELASTISKT EFTERGIVLIGA UPPLAG....47

Lista över viktiga använda symboler

Latinska stora bokstäver

A_{bat}	Läktens (**bat**ten) tvärsnittsarea
A_{dia}	Dragbandets tvärsnittsarea
A_{top}	Överramens (**top c**hord) tvärsnittsarea
C	Upplagets fjäderstyvhet
C_{dia}	Dragbandets totala fjäderstyvhet
C_E	Minimal fjäderstyvhet hos upplaget för att uppnå Eulerlasten
E	Elasticitetsmodul
$E_{0.05}$	Elasticitetsmodulens 5 percentilvärde
E_d	Elasticitetsmodulens dimensioneringsvärde
E_{mean}	Elasticitetsmodulens medelvärde
F	Kraft
F_{br}	Stagningskraft (**br**acing)
F_{dia}	Kraft i dragstag (**dia**gonal)
$F_{dia,0}$	Kraftkomposant i dragstag verkande takfallets riktning
$F_{dia,x}$	Kraftkomposant i dragstagets x-riktning
$F_{dia,y}$	Kraftkomposant i dragstagets y-riktning
$F_{dia,z}$	Kraftkomposant i dragstagets z-riktning
$F_{tot,d}$	Total kraft som verkar längs med takfotslinjen
I	Tröghetsmoment
K_{ser}	Förskjutningsmodul i bruksgränstillståndet
K_u	Förskjutningsmodul i brottgränstillståndet
N	Normalkraft, axialkraft
N_{cr}	Kritisk axiallast
N_d	Normalkraftens dimensioneringsvärde
N_E	Eulerknäcklasten svarande mot andra knäckfallet ($N_E = \pi^2 EI / l^2$)
R_{heel}	Parallellfackverkets upplagsreaktion i takfoten
R_{ridge}	Parallellfackverkets upplagsreaktion i nocken

Latinska små bokstäver

a	Centrumavståndet mellan stagningspunkterna
a_{bat}	Centrumavståndet mellan bärläkten (**bat**ten)
a_{par}	Centrumavståndet mellan parallellfackverken
a_{truss}	Centrumavståndet mellan takstolarna (**truss**)
b_{bat}	Läktens (**bat**ten) tvärsnittsbredd
b_{top}	Överramens (**top** chord) tvärsnittsbredd
d	Förbindarens diameter
e	Initialkrokighet
h_{bat}	Läktens (**bat**ten) tvärsnittshöjd
h_{ridge}	Nockens höjd över underramsplanet (= $l_{top} \sin \theta$)
h_{top}	Överramens (**top** chord) tvärsnittshöjd
k	Elastiska bäddens fjäderstyvhet

l	Spannets längd; halvvågens längd
l_{dia}	Ståldragbandets/diagonalens längd
$l_{dia,x}$	Ståldragbandets längd projicerad i y-riktningen
$l_{dia,z}$	Ståldragbandets längd projicerad i z-riktningen
l_{ef}	Effektiv knäcklängd
$l_{ef,y}$	Effektiv knäcklängd i överramens böjstyva riktning
$l_{ef,z}$	Effektiv knäcklängd i överramens böjveka riktning
$l_{bat,ef}$	Läktens (**bat**ten) effektiva längd
l_{top}	Överramens (**top** chord) längd
m	Antal halvvågor
n	Antal
n_{dia}	Antal samtidigt verkande ståldragband (på ena taksidan)
n_{nail}	Antal spik (**nail**) i förbandet
n_{par}	Antal parallellfackverk (på ena taksidan)
n_{side}	Antal takstolar som stagas på ena sidan av parallellfackverket
n_{truss}	Antal takstolar (**truss**)
p	Resulterande (summan av) vindtryck på de båda gavlarna
q	Fördelad last
q_{vert}	Fördelad vertikal last som verkar per horisontell längdenhet överram
u	Förskjutning i det bärande elementets x-riktning (längdriktningen)
v	Tillskottsutböjning i det bärande elementets y-riktning (böjveka riktningen)
v_0	Initialutböjning
v_{dia}	Dragbandets förskjutning i längdriktningen
v_{ridge}	Nockens förskjutning
v_{tot}	Total utböjning ($v_{tot} = v_0 + v$)
w	Tillskottsutböjning i det bärande elementets z-riktning (böjstyva riktningen)
w_0	Initialutböjning
w_{tot}	Total utböjning ($w_{tot} = w_0 + w$)
x	Koordinataxel, koordinat i det bärande elementets längsriktning
y	Koordinataxel, koordinat i det bärande elementets böjveka riktning
z	Koordinataxel, koordinat i det bärande elementets böjstyva riktning

Grekiska bokstäver

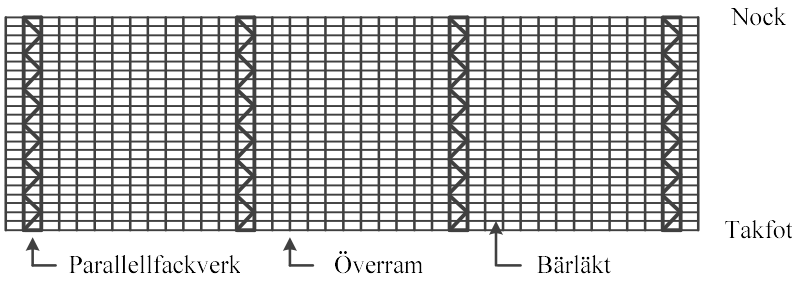
α	$= N / N_{cr}$
α_p	Reduktionsfaktor som beaktar inverkan av slumpmässiga variationer i initialkrokighet och initial snedställning vid stagning av flera tryckta parallella konstruktionsdelar
α_{steel}	Ståldragbandets längdutvidgningskoefficient
β_{dia}	Vinkeln i överramsplanet mellan ståldragbandet (**dia**gonal) och takfotslinjen
γ_M	Partialkoefficienter för materialegenskaper
φ	Tillskott i takstolarnas snedställning
φ_0	Initial snedställning

φ_{defl}	Snedställning orsakad av att ståldragbanden som hänger ner (**defl**ection) mellan takstolarna sträcks ut
$\varphi_{\Delta T}$	Snedställning orsakad av temperaturändring ΔT i ståldragbanden
φ_{tot}	Total snedställning ($\varphi_{tot} = \varphi_0 + \varphi$)
θ	Yttertakets lutning i förhållande till ett tänkt horisontalplan
ρ_m	Virkets medeldensitet

1 Konstruktionens uppbyggnad och verkningssätt vid belastning

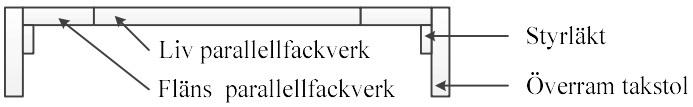
Detta kapitel ger en översiktlig bild av den sammansatta konstruktionens uppbyggnad och verkningssätt vid belastning.

Då ett tak är uppbyggt av flera fritt upplagda parallella fackverkstakstolar som spänner över en stor spännvidd uppstår det normalt betydande tryckkrafter i takstolarnas överramar. För att dessa tryckkrafter inte ska orsaka att överramarna knäcker ut i böjveka riktningen vinkelrätt mot de enskilda takstolarnas plan krävs det att överramarna sidostagas i ett betydande antal punkter i överramarnas längdriktning. Ett exempel på en sådan lösning visas i figur 1.1 där bärläkten i yttertaksplanet används för att överföra stagningskrafterna till i takplanet liggande parallellfackverk som sträcker sig från takfoten till nocken. Parallellfackverken förutsätts ha upplagspunkter i nocken och takfoten.



Figur 1.1 Yttertaksplan bestående av överramar som sidostagas med hjälp av bärläkt och liggande parallellfackverk. Parallellfackverken förutsätts ha upplagspunkter i nocken och takfoten.

Parallellfackverken förutsätts nedsänkta mellan takstolarna på sådant sätt att parallellfackverkens ovansida ligger i samma plan som överramarnas ovansida enligt figur 1.2. Med detta utförande får vi små excentriciteter i kraftöverföringen mellan bärläkten och parallellfackverken. Detta gäller även kraftöverföringen mellan ståldragbanden och parallellfackverken som behandlas senare i denna rapport.



Figur 1.2 Schematisk tvärsektion av konstruktionslösning där parallellfackverket ligger nedsänkt mellan takstolarnas överramar.

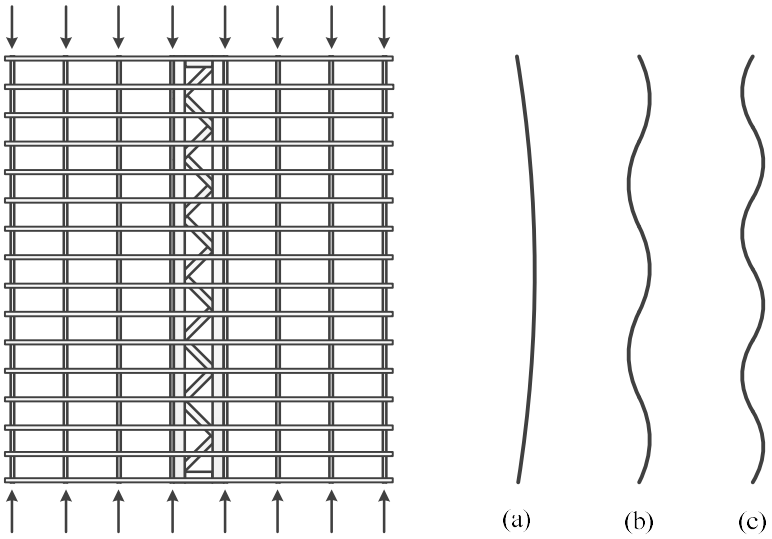
Hur överramarna kommer att knäcka ut i den verkliga konstruktionen hänger framför allt samman med vilka initiala utböjningsformer som uppträder i de tryckta överramarna och de stagande parallellfackverken i den färdigmonterade

takkonstruktionen. Principiellt ska man undersöka de initiala utböjningsformer som genererar de ”farligaste” knäckningsmoderna i konstruktionen.

Det generella sättet att bestämma de aktuella knäckningsmoderna är att genomföra en egenvärdesanalys av den sammansatta tredimensionella takkonstruktionen.

Det visar sig i detta sammanhang att olika knäckningsmoder är dimensionerande för olika delar av takkonstruktionen:

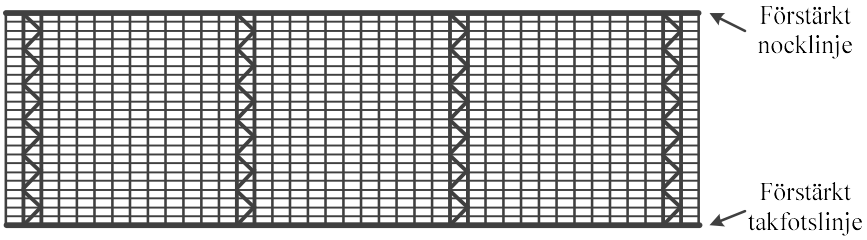
- Den ”farligaste” initiala utböjningsformen för de stagande parallellfackverken och dragbanden uppträder då samtliga överramar knäcker ut i en halvvåg enligt figur 1.3.a samtidigt som takstolarna är initialt snedställda.
- Utböjningsformen som ger upphov till störst krafter i bärläkten uppträder då samtliga överramar knäcker ut i flera halvvågor enligt figur 1.3.b.
- Utböjningsformen som är avgörande för dimensioneringen av överramarna uppträder då samtliga överramar knäcker ut i halvvågor enligt figur 1.3.c.



Figur 1.3 En utskuren del av ett yttertaksplan omfattande åtta tryckbelastade överramar och ett stagande parallellfackverk. (a) Mod där hela systemet knäcker ut i en halvvåg. (b) Mod som genererar störst krafter i bärläkten. (c) Knäckningsmod som är dimensionerande för överramarna.

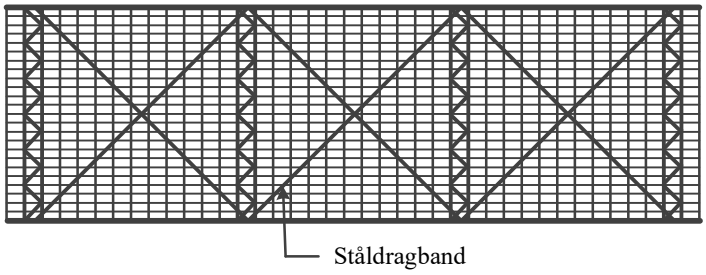
Det kan noteras att våglängden för knäckningsmoden enligt figur 1.3.c är något kortare än vad som gäller för knäckningsmoden enligt figur 1.3.b.

Vi har redan konstaterat att knäckningsmoden enligt figur 1.3.a utgör den ”farligaste” moden för parallellfackverken. Anledningen är att denna mod ger upphov till maximalt böjmoment i parallellfackverken. I detta sammanhang kommer att förutsättas att den sammansatta konstruktionen bestående av parallellfackverken, bärläkten och de tryckta överramarna utgör ett slutet kraftsystem där inte bara i de inre stagningspunkterna utan även upplagspunkterna vid takfot och nock är i jämvikt. För att denna förutsättning ska vara uppfylld appliceras längsgående förstärkningsplank utmed takfots- och nocklinjerna, enligt figur 1.4 som möjliggör att upplagsreaktionerna kan överföras mellan parallellfackverken och de tryckta överramarna och därmed uppfylla kravet på kraftjämvikt i riktningen vinkelrätt mot de enskilda takstolarnas plan.



Figur 1.4 Förstärkta upplagslinjer i nock och takfot används för att få ett slutet kraftsystem med hänsyn till knäckningsrisken i yttertaksplanet. De förstärkta upplagslinjerna används även för överföring av krafter orsakade av vind och snedställning av takstolar.

På grund av att takstolarna i praktiken alltid monteras med en viss snedställning samtidigt som takstolarna snedställs ut ur sina plan på grund av att överramarna förutsätts ha en viss initialkrokighet, ger de fördelade vertikala lasterna som verkar på överramarna upphov till tillskottskrafter i byggnadens längdled vilka tillsammans med inverkan av vind mot gavlarna påverkar yttertaket. För att ta hand om dessa krafter monteras diagonalt placerade ståldragband enligt figur 1.5 mellan parallellfackverkens upplagspunkter.



Figur 1.5 Yttertaksplanet förstärks med ståldragband för att krafterna som verkar längs med nocken, orsakade av vind och snedställning av takstolarna, ska kunna föras ner till den förstärkta takfotslinjen.

För att få en gynnsam kraftöverföring i yttertaksplanen bör bärläkten, ståldragbanden och parallellfackverken orienteras så att avstånden mellan de olika kraftplanen blir så små som möjligt.

Krafterna från ståldragbanden som förankras i parallellfackverken delas upp i komposanter som verkar i byggnadens längd-, tvär- och höjdriktning. Komposanterna som verkar i byggnadens längdriktning överförs via kortlingar vid parallellfackverkens upplag till hammarbandets ovansida. Kraftkomposanterna som verkar i byggnadens tvärriktning kan överföras till byggnadens tvärväggar via skivverkan i underramsplanet eller via exempelvis fackverk som är monterade i underramsplanet i byggnadens längdriktning.

För en detaljerad genomgång av förutsättningar och dimensioneringsprinciper hänvisas till kommande kapitel.

2 Förutsättningar och begränsningar

Byggnadens takkonstruktion förutsätts uppbyggd av symmetriska frispännande takstolar av sadeltyp. För att förhindra att takstolarnas tryckta överramar knäcker ut i sidled, i förhållande till sina vertikalplan, monteras parallellfackverk mellan överramarna på i storleksordingen var 12 takstol. För kraftöverföringen mellan de enskilda takstolarnas överramar och parallellfackverken utnyttjas bärläkten. De i yttertaksplanet liggande parallellfackverken antas vara fritt upplagda i nock- och takfotslinjen med hänsyn till krafter verkande i byggnadens längdriktning. Upplagslinjerna antas förstärkta så att de inre krafterna härrörande från stagningen av överramarna och upplagskrafterna verkande på parallellfackverken håller varandra i jämvikt och utgör ett slutet kraftsystem. Notera att det slutna kraftsystemet endast avser krafterna orsakade av att överramarna har en viss initialkrokighet samtidigt som de är normalkraftsbelastade. Parallellfackverken kommer dessutom att påverkas av bl.a. vindlast som verkar mot byggnadens gavlar och snedställningskrafter som uppstår på grund av att takstolarna initialt lutar något. För att fixera parallellfackverkens upplagspunkter längs med nocken appliceras diagonaler som förankras i takfoten. Vid stora spännvidder på takstolarna är det sannolikt enklast att använda ståldragband som diagonaler.

Endast lastkombinationer som har betydelse för sidostagningen av de tryckta överramarna analyseras nämligen

1) Egentyngd, vind, snö och nyttig last. Vindlasten verkar mot gaveln och är huvudlast.
2) Egentyngd, vind, snö och nyttig last. Vindlasten verkar mot gaveln. Snön är huvudlast.

Detta innebär att någon dimensionering av underramsplanen med hänsyn till laster verkande i byggnadens längd- och tvärriktning inte redovisas. Ett alternativ för att ta upp dessa laster är att utnyttja skivverkan i eventuellt befintligt undertak. Ett annat alternativ är att applicera fackverk som verkar i underramsplanen tillsammans med eventuella kraftöverförande diagonaler.

Normalkrafternas fördelning i takstolarna hämtas från en separat takstolsanalys där endast deformationer i takstolsplanet beaktas. Som indata vid denna analys anges bland annat överramarnas knäckningslängd med hänsyn till knäckning i den böjveka riktningen. Det är viktigt att denna längd inte är mindre än den knäckningslängd som bestäms i kapitel 8 där överramen behandlas som en balk på en elastisk bädd.

Ett antal förenklingar har gjorts vid den statiska analysen av vilka följande bör nämnas:

1. Vid analysen av takstolarna förutsätts att normalkrafter och böjmoment bestäms med utgångspunkt från virkesdelarnas tyngdpunktslinjer. Vid dimensioneringen av de tryckta överramarnas sidostagningar har inte beaktats att krafterna i parallellfackverken, ståldragbanden (diagonalerna)

och bärläkten verkar i plan som är excentriskt placerade i förhållande till planet som genereras av överramarnas tyngdpunktslinjer.

2. Vid beräkningen av snedställningskrafterna i kapitel 5 förutsätts att underramarna inte förskjuts i sidled dvs. att det finns någon form av skivor på glespanel eller dylikt som förhindrar att underramarna deformeras i byggnadens längdriktning.
3. Vid analysen i kapitel 8 har inte beaktats att den elastiska bädden (bärläkten) är excentriskt placerad i förhållande till överramens tyngdpunktslinje. Jämför punkt 1.
4. Vid dimensioneringen av dragbanden i kapitel 10 har inte beaktats att överramarna förkortas av axialkrafterna i virket.

Vissa kontroller har inte redovisats:

5. Knäckavstyvning av tryckta diagonaler i takstolar har inte behandlats. Denna kontroll förutsätts ske i samband med dimensioneringen av takstolarna.

3 Dimensioneringsgång

Dimensioneringen omfattar översiktligt följande steg:

- Dimensionering av parallellfackverk
- Bestämning av maximal stagningskraft i bärläkten
- Kontroll av överramarna med hänsyn till knäckning i böjveka riktningen
- Dimensionering av ståldragband
- Dimensionering av ståldragbandens anslutningar vid nock och takfot
- Dimensionering av de förstärkta nock- och takfotslinjerna

Dimensioneringsgången följer till stor del framställningen i referensen /1/ författad av Kessel & Kühl (2010). Vissa detaljer i dimensioneringsgången behandlas dock på avvikande sätt.

4 Imperfektioner

I samband med dimensionering av tryckta bärverksdelar brukar det förutsättas att bärverksdelarna har en sinusformad initialutböjning $v_0(x)$ eller $w_0(x)$ som beskrivs av sambandet

$$v_0(x) = e_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \tag{4.1}$$

där e_0 betecknar den aktuella halvvågens mittutböjning, x längdkoordinaten och l halvvågens längd. I Eurokod 5 anges att

$$e_0 = \begin{cases} l/300 & \text{för konstruktionsvirke} \\ l/500 & \text{för limträ} \end{cases} \tag{4.2}$$

Notera att värdet e_0 som anges för konstruktionsvirke är kopplat till sorterat virke med längden 2 m och har därför mycket lite att göra med den initialkrokighet som kan förväntas då halvvågens längd avser hela den tryckta överramens längd. För dessa stora knäcklängder styrs initialkrokigheten i hög grad av noggrannheten i samband med takstolarnas montering. Eftersom överramarna kommer att riktas in i förhållande till de i de båda överramsplanen liggande parallellfackverken förefaller $e_0 = l/400$ vara ett rimligt värde. Detta värde överensstämmer med vad som anges i den tyska DIN-normen.

Takstolarna förutsätts monterade med en initial snedställning φ_0 som representerar vinkeln mellan det plan som går genom takstolens nock och de båda upplagen och ett tänkt vertikalplan genom samma båda upplag. Med hänsyn till att takstolarnas överramar blir uppriktade av parallellfackverken kan det vara rimligt att förutsätta att snedställningen blir av samma storleksordning som gäller för plana ramar enligt avsnitt 5.4.4 i Eurokod 5 dvs.

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0.005 & \text{för } h \leq 5 \text{ m} \\ 0.005\sqrt{\dfrac{5}{h}} & \text{för } h > 5 \text{ m} \end{cases} \tag{4.3}$$

varvid vinkeln φ_0 uttrycks i radianer. Även detta överensstämmer med den tyska DIN-normen.

I Eurokod 3 avsnitt 5.3, den allmänna delen för stålkonstruktioner, medges det vid analys av stabiliserande system som sidostagar flera parallella tryckta bärverksdelar, att det får införas en reduktionsfaktor $\alpha_{p,}$ som beaktar inverkan av slumpmässiga avvikelser när det gäller initialkrokigheten e_0 hos bärverksdelarna. Reduktionsfaktorn uttrycks som

$$\alpha_p = \sqrt{0.5\left(1 + \frac{1}{p}\right)} \tag{4.4}$$

där p anger antalet parallella bärverksdelar som stagas. Samma reduktionsfaktor kan användas i samband med att snedställningen hos flera parallella bärverksdelar beaktas.

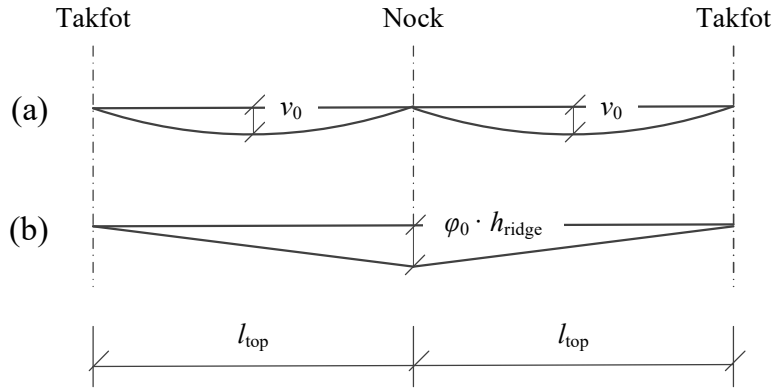
I samband med dimensioneringen av de stagande parallellfackverken är det parallellfackverken som i hög grad styr initialkrokigheten hos de stagade överramarna. Följaktligen bör p i detta sammanhang sättas lika med antalet parallellfackverk per yttertaksplan.

5 Dimensionering av parallellfackverken

5.1 Bestämning av överramarnas utböjning och takstolarnas snedställning då takkonstruktionen befinner sig i deformerat tillstånd

Vi konstaterade redan i kapitel 1 att den ”farligaste” knäckningsmoden med hänsyn till dimensioneringen av de stagande parallellfackverken uppträder då takstolarnas överramar antas knäcka ut i en modform som svarar mot en enda stor halvvåg från takfoten till nocken. I samband med denna denna knäckningsmod blir normalt förskjutningarna i bärläktsförbanden förhållandevis små i förhållande till utböjningarna som uppträder i parallellfackverken. Därför kan det vanligtvis förutsättas att takstolarnas överramar och de stagande parallellfackverken följs åt med samma sidoförskjutning vinkelrät mot takstolarnas längdriktning.

Vid dimensioneringen av de stagande parallellfackverken förutsätts att takstolarnas överramar knäcker ut i en modform som initieras av att samtliga överramar har en sinusformad initialkrokighet med amplituden v_0 enligt figur 5.1.a samtidigt som samtliga takstolar har en initial snedställning φ_0 som i nocken ger upphov till förskjutningen $\varphi_0 \cdot h_{\text{ridge}}$ enligt figur 5.1.b där h_{ridge} anger nockens höjd över underramsplanet och l_{top} betecknar överramens längd.



Figur 5.1 Förutsatta initiala förskjutningar i överramarnas böjveka riktning. (a) Inverkan av sinusformad initialkrokighet som i mitten av de båda överramarna ger upphov till förskjutningen v_0. (b) Inverkan av initial snedställning φ_0 som i nocken ger upphov till förskjutningen $\varphi_0 \cdot h_{\text{ridge}}$.

En komplikation är att såväl initialkrokigheten hos överramarna som takstolarnas snedställning ger upphov till andra ordningens deformationer som måste beaktas. För att lösa problemet med en analytisk metod är det lämpligt att utgå från att såväl överramarnas tillskottsutböjning v som takstolarnas tillskott i snedställning φ utgör kända storheter. I Eurokod 5 (avsnitt 9.2.5.3) rekommenderas att tillskottsutböjningen v hos det stagande systemet inte ska överstiga l /500. I Tyskland begränsas tillskottet i takstolarnas snedställning orsakat av

dragbandens förlängning (inklusive bidragen från förbandens eftergivlighet i dragbandens ändar) till $\varphi = 0.01$ radianer.

Överramarnas totala utböjning i mittsnittet v_{tot} kan därmed uttryckas som

$$v_{\text{tot}} = \alpha_p v_0 + v \tag{5.1}$$

varvid reduktionsfaktorn α_p hämtas från ekvation (4.4) och parametern p betecknar antalet stagande parallellfackverk per takhalva.

Takstolarnas totala snedställning φ_{tot} förutsätts inkludera följande bidrag till snedställningen

$$\varphi_{\text{tot}} = \alpha_p \varphi_0 + \varphi_{\Delta T} + \varphi_{\text{defl}} + \varphi \tag{5.2}$$

där $\varphi_{\Delta T}$ betecknar takstolarnas snedställning orsakad av temperaturhöjningen ΔT °C i ståldragbanden och φ_{defl} betecknar takstolarnas snedställning orsakad av att dragbanden initialt hänger ned mellan takstolarna för att vid pålastning sträckas ut. Dessa båda bidrag till snedställningen kan uttryckas som

$$\varphi_{\Delta T} = \alpha_{\text{steel}} \Delta T \frac{b_{\text{dia}}}{h_{\text{dia}}} \frac{1}{\cos^2 \beta_{\text{dia}}} \tag{5.3}$$

och

$$\varphi_{\text{defl}} = 0.000119 \frac{b_{\text{dia}}}{h_{\text{dia}}} \tag{5.4}$$

varvid b_{dia} diagonalens längd i y-riktningen (byggnadens längdriktning)
h_{dia} diagonalens längd i z-riktningen (byggnadens höjdled)
β_{dia} vinkeln mellan diagonalen och y-riktningen
α_{steel} stålets längdutvidgningskoefficient ($12 \cdot 10^{-6}$)

Observera att vi i ekvation (5.2) betraktar de tre första termerna i högerledet av ekvation (5.2) som bidrag till den initiella snedställningen.

5.2 Kraftexcentriciteter i yttertakets tjockleksriktning

Yttertaket är uppbyggt av bärande komponenter vars tyngdpunktslinjer befinner sig på olika nivåer i förhållande takets tjockleksriktning. En konsekvens av detta blir att krafterna i komponenterna kommer att verka på olika nivåer i taket och därmed ge upphov till excentricitetsmoment. Från yttertakets ovansida kan vi definiera följande bärande komponenter med tyngdpunktslinjerna liggande i olika plan:

1. Bärläkten tillsammans med de förstärkta läktlinjerna vid nock och takfot.
2. Ståldragbanden.
3. Parallellfackverken.
4. Takstolarnas överramar.

Genom att exempelvis använda bärläkt med tjockleken 45 mm, överramar med höjden 220 mm och parallellfackverk med virkestjockleken 45 mm kommer krafterna i plan nr 1 att verka 155 mm ovanför planet definierat av överramarnas tyngdpunktslinjer. Ståldragbandens tyngdpunktslinje kan antas sammanfalla med överramarnas ovansida och ger följaktligen en kraftexcentricitet på 110 mm. Parallellfackverken som antas monterade nedsänkta mellan takstolarna med ovansidan sammanfallande med överramarnas ovansida kommer att ge upphov till en kraftexcentricitet på 87.5 mm i förhållande till överramarnas tyngdpunktslinjer.

Fortsättningsvis kommer vi delvis att bortse från inverkan av att krafterna i yttertaket verkar i något olika plan och därmed ger upphov till excentricitetsmoment.

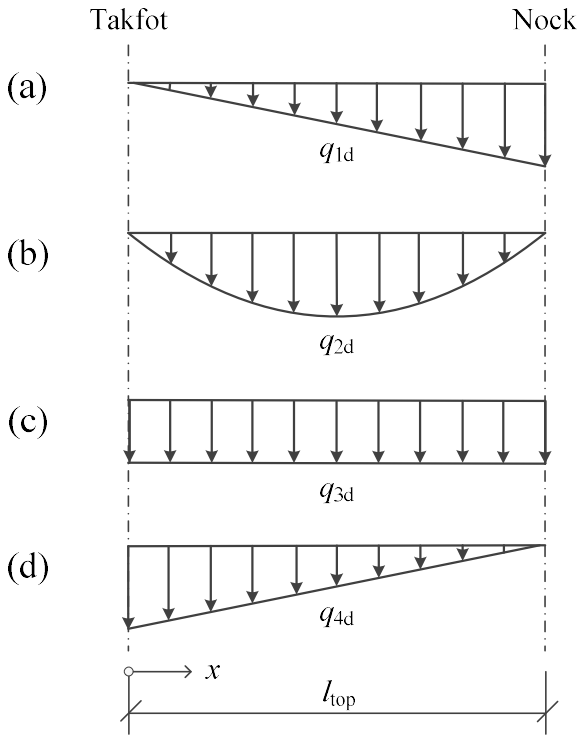
5.3 Laster på parallellfackverken i deformerat tillstånd

Med givna värden på överramarnas totala utböjning v_{tot} och takstolarnas totala snedställning φ_{tot} kan lasterna som verkar på parallellfackverken beräknas. Denna lastberäkning följer nedan.

Då den yttre vindlasten verkar i byggnadens längdriktning brukar det antas att byggnadens gavlar belastas med jämnt fördelat tryck på lovartsidan och med jämnt fördelat sug på läsidan. Gavelväggarna brukar antas fungera som vertikalt fungerande balkstrimlor med leder vid grundplattan, underramsplanet och de båda överramsplanen. Detta innebär att vardera överramsplanet kommer att belastas med en resulterande triangulärt fördelad linjelast som i nocken har maximalt värde och i takfoten är lika med noll. Se figur 5.2 a. Antag att summan av de dimensionerande vindtrycken på de båda gavlarna uppgår till p_{d} (kraft per ytenhet). Den resulterande dimensionerande linjelasten $q_{1\text{d}}$ (kraft per längdenhet överram) som verkar i överramsplanet kan nu uttryckas som

$$q_{1\text{d}} = \frac{1}{2} h_{\text{ridge}}\, p_{\text{d}} \cos\theta \frac{x}{l_{\text{top}}} = \frac{1}{2}\, p_{\text{d}}\, x \cos\theta \, sin\theta \qquad (5.5)$$

där h_{ridge} nockens höjd i förhållande till underramen (= $l_{\text{top}} \sin\theta$)
θ yttertakets lutning i förhållande till horisontalplanet
x överramens längdkoordinat utgående från att origo är placerat i takfoten



Figur 5.2 Fördelade laster som verkar på parallellfackverken.
(a) Inverkan av vindlast mot båda gavlarna.
(b) Inverkan av initialkrokighet och stora normalkrafter i överramarna.
(c) Inverkan av jämnt fördelad vertikallast på överramarna samtidigt som takstolarna är snedställda i förhållande till vertikalplanet.
(d) Inverkan av jämnt fördelad vertikallast på överramarna samtidigt som överramarna har viss initialkokighet.

På grund av att takstolarnas överramar blir utsatta för förhållandevis stora axiella tryckkrafter samtidigt som de förutsätts ha en viss initialutböjning måste parallellfackverken dimensioneras så att de kan uppta dessa sidokrafter som krävs för att stabilisera överramarna mot knäckning i överramarnas böjveka riktning. Under antagande av att parallellfackverken och överramarna har samma sinusformade initialutböjning v_0 blir den fördelade lasten q_{2d} från en av överramarna som verkar på ett av parallellfackverken också sinusformad (figur 5.2 b) och kan med hjälp av andra ordningens analys beräknas till

$$q_{2d} = \frac{\pi^2 N_d v_{tot}}{l_{top}^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l_{top}}\right) \tag{5.6}$$

där l_{top} överramens (och parallellfackverkets) längd
v_{tot} total utböjning (= $v_0 + v$)

N_d normalkraftens dimensioneringsvärde i överramen (i detta fall medelvärdet längs med överramen eftersom knäckningsmoden avser hela överramen)

På grund av att takstolarna förutsätts tillverkade med två typer av imperfektioner nämligen dels en initial snedställning φ_0 hos hela takstolen och dels en initialkrokighet v_0 hos överramarna kommer de vertikalt riktade lasterna i form av egentyngd och snö på yttertaket att ge upphov till tillskottslaster som måste överföras med hjälp av bärläkten till parallellfackverken. Genom att införa beteckningen $p_{vert,d}$ för vertikallasten orsakad av snö och egentyngd som verkar per horisontell ytenhet tak kan motvarande vertikallast som verkar per längdenhet överram i horisontalplanet uttryckas som $q_{d,vert} = a_{truss}\, p_{vert,d}$ där a_{truss} betecknar centrumavståndet mellan takstolarna.

Låt oss först behandla fallet med en renodlad snedställning dvs. takstolarna utgör initialt plana konstruktionselement som förblir plana i deformerat tillstånd. Den fördelade lasten som verkar på parallellfackverken visas i figur 5.2 c. För att takstolarna inte ska snedställas mer än vinkeln φ_{tot} ut ur sina plan i deformerat tillstånd krävs att den jämnt fördelade lasten q_{3d} (kraft per längdenhet överram) från varje överram ska kunna tas upp av parallellfackverken

$$q_{3d} = q_{vert,d}\varphi_{tot}(\cos\theta)^2 \tag{5.7}$$

där $q_{vert,d}$ dimensionerande vertikal last per horisontell längdenhet överram (snö och egentyngd)
φ_{tot} takstolarnas totala snedställning

Lastfallet, då den fördelade vertikallasten $q_{vert,d}$ verkar på en av överramarna samtidigt som överramen har en sinusformad totalutböjning v_{tot} i deformerat tillstånd, är svårare att behandla med en adekvat analytisk metod. För att få en rimligt enkel metod kan man utgå från det förhållandevis grova antagandet att diagonalerna i takstolarna är ”tätt placerade”. Detta leder till en modell där över- och underramarna antas sammanfogade med fiktiva ledade vertikala stänger vilket innebär att de nödvändiga horisontella kraftkomposanterna för att hålla överramarna i jämvikt vinkelrät mot takstolarnas plan ges av de fiktiva stängernas lutning i förhållande till de med vinkeln φ_{tot} snedställda planen. Antas dessutom att takstolarnas underramar inte böjer ut i den böjveka riktningen utan förblir raka så ges lutningen av aktuell utböjning v_{tot} hos överramen dividerad med den aktuella fiktiva stångens höjd. Utgår man från att utböjningen är sinusformad (se ekvation (4.1)) fås att den horisontella lasten är i det närmaste triangulärt fördelad med värdet noll i nocken. Utgår man istället från att utböjningen är parabelformad blir lasten exakt triangulärt fördelad, se figur 5.2 d, och uppgår till

$$q_{4d} = q_{vert,d}\frac{4v_{tot}}{h_{ridge}}(\cos\theta)^2\frac{l_{top}-x}{l_{top}} \tag{5.8}$$

Sammanfattningsvis kommer parallellfackverken att via bärläkten påverkas av följande laster som verkar vinkelrät mot takstolarnas längdriktning:

1) En triangulärt fördelad last (med maximalt värde i nocken) orsakad av vind mot byggnadens båda gavlar.
2) En sinusformad fördelad last orsakad av att överramarna påverkas av stora normalkrafter samtidigt som överramarna förutsätts ha en viss initialkrokighet.
3) En jämnt fördelad last orsakad av att överramarna påverkas av fördelad vertikallast (egentyngd och snölast) samtidigt som takstolarna är initialt snedställda.
4) En triangulärt fördelad last (med maximalt värde i takfoten) orsakad av att överramarna påverkas av fördelad vertikallast (egentyngd och snölast) samtidigt som överramarna förutsätts ha en viss initialkrokighet.

5.4 Fördelning av lasterna till de olika parallellfackverken

Ofta placeras parallellfackverken så att avståndet mellan dem inte är konstant i byggnadens längdriktning. De ytterst placerade parallellfackverken brukar placeras mellan överramarna hos takstolarna som befinner sig i takstolslinjerna 2 och 3 räknat från gavlarna. Det finns flera alternativ att ta upp de fördelade lasterna q_{1d}- q_{4d} i yttertakskonstruktionen. Det mest ekonomiska alternativet är sannolikt att låta de fördelade lasterna fördelas med lika stor andel till samtliga de stagande parallellfackverken. Detta innebär att bärläkten och de förstärkta upplagslinjerna i nocken och takfoten måste överföra något större krafter än om man väljer att överföra de fördelade lasterna till närmaste stagande parallellfackverk. Ett viktigt konstaterande i detta sammanhang är att det inte är knäckmoden då samtliga överramar knäcker ut i en halvvåg (enligt figur 1.2 a) som genererar de största krafterna i bärläkten utan detta inträffar då samtliga överramar knäcker ut i flera havvågor (enligt figur 1.2 b). Se vidare kapitel 7 som behandlar bestämning av maximal stagningskraft i bärläkten.

Samtidigt kommer vi välja att överföra den resulterande kraften som verkar utmed den förstärkta upplagslinjen vid nocken med lika stor andel till vardera av de för det aktuella lastfallet verkande effektiva ståldragbanden (diagonalerna).

5.5 Ekvivalent jämnt fördelad last för dimensionering av parallellfackverken

För att förenkla dimensioneringen av parallellfackverken kommer vi att ersätta de olika fördelade lasterna i avsnitt 5.3 med ekvivalenta jämnt fördelade laster som vi adderar ihop till en total ekvivalent jämnt fördelad last.

Den triangulärt fördelade lasten vindlasten q_{1d} kan med rimlig noggrannhet approximeras med en last som uppgår till lastens medelintensitet över det aktuella spannet dvs.

$$q_{1\mathrm{eq,d}} = \frac{1}{4}\, p_{\mathrm{d}} l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta \tag{5.9}$$

Då den sinusfördelade lasten q_{2d} ska ersättas med en ekvivalent jämnt fördelad last är det lämpligt att utgå från att de båda fördelade lasterna ska resultera i samma maximala böjmoment i mitten av spannet. Detta innebär att högerledet i ekvation (5.6) ska multipliceras med faktorn $8/\pi^2$ vilket resulterar i att den ekvivalenta jämnt fördelade lasten $q_{2eq,d}$ blir

$$q_{2\mathrm{eq,d}} = \frac{8N_{\mathrm{d}}v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}^2} \tag{5.10}$$

Vi konstaterar att lasten q_{3d} redan är jämnt fördelade dvs

$$q_{3\mathrm{eq,d}} = q_{3\mathrm{d}} = q_{\mathrm{vert,d}}\varphi_{\mathrm{tot}}(\cos\theta)^2 \tag{5.11}$$

Den triangulärt fördelade lasten q_{4d} behandlas på analogt sätt som den triangulärt fördelade lasten q_{1d} vilket leder till att

$$q_{4\mathrm{eq,d}} = q_{\mathrm{vert,d}}\frac{2v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}}(\cos\theta)^2 \tag{5.12}$$

Under beaktande av att antalet takstolar och parallellfackverk är lika med n_{truss} respektive n_{par} får vi att den totala ekvivalenta jämnt fördelade lasten $q_{eq,d}$ som verkar på ett av parallellfackverken blir

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{eq,d}} = \frac{1}{n_{\mathrm{par}}}\Bigg(&\frac{1}{4}\,p_{\mathrm{d}}l_{\mathrm{top}}\cos\theta\sin\theta + \frac{8n_{\mathrm{truss}}N_{\mathrm{d}}v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}^2} \\ &+ \left(\varphi_{\mathrm{tot}} + \frac{2v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}}\right)n_{\mathrm{truss}}q_{\mathrm{vert,d}}(\cos\theta)^2\Bigg) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Parallellfackverkens böjstyvhet $(EI)_{par}$ kan nu bestämmas ur villkoret att tillskottsutböjningen v av lasten $q_{eq,d}$ högst får uppgå till 1/500 av överramens längd l_{top}. Detta betyder att

$$\frac{5}{384}\frac{q_{\mathrm{eq,d}}\,{l_{\mathrm{top}}}^4}{(EI)_{\mathrm{par}}} = \frac{l_{\mathrm{top}}}{500} \tag{5.14}$$

vilket leder till att

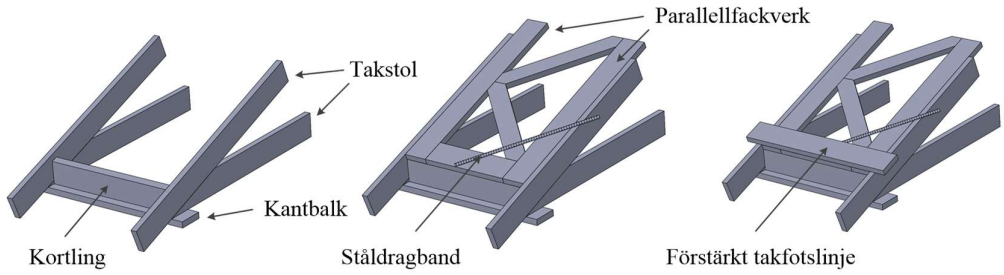
$$(EI)_{\mathrm{par}} = 6.51q_{\mathrm{eq,d}}\,{l_{\mathrm{top}}}^3 \tag{5.15}$$

Notera att excentriciteter och eftergivligheter i parallellfackverkens förband ska beaktas vid bestämningen av parallellfackverkens böjstyvhet $(EI)_{par}$. Notera också att $E = E_{mean} / \gamma_M$.

5.6 Kraftjämvikten i yttertaket

I detta avsnitt fokuserar vi på hur kraftjämvikten i taket uppfylls för de olika fördelade lasterna q_{1d}, q_{2d}, q_{3d} och q_{4d}.

Vinden som verkar mot byggnadens gavlar ger upphov till en triangulärt fördelad last q_{1d} på yttertakskivan som via bärläkten antas belasta samtliga parallellfackverk med lika stor andel. Parallellfackverkens upplagsreaktioner överförs till de förstärkta upplagslinjerna längs med nocken och takfoten. Den resulterande upplagskraften som verkar längs med nocken fördelas med lika stor andel till de för den aktuella vindriktningen effektiva ståldragbanden som vid takfoten är förankrade till parallellfackverken. Den resulterande vindkraften som verkar längs med takfotslinjen överförs från parallellfackverken via kortlingar till kantbalken (hammarbandet) på väggens ovansida för att slutligen på lämpligt sätt föras vidare till grunden. Ett exempel på utförande, där ståldragbanden fästs vid parallellfackverkens ändsträvor och där kortlingar utnyttjas för kraftöverföring till väggens kantbalk, visas i figur 5.3. Dragkrafterna i ståldragbanden ger upphov till kraftkomposanter som i såväl nocken som takfoten verkar i takfallets riktning och måste beaktas vid dimensioneringen.



Figur 5.3 Exempel på utförande där ståldragbandet fästs på parallellfackverkets ändsträva och en kortling utnyttjas för kraftöverföring till väggens kantbalk.

Vid stora spännvidder på takstolarna blir normalkrafterna i överramarna stora. I avsnitt 5.3 konstaterade vi att om en av överramarna har en sinusformad initialkrokighet i den böjveka riktningen kommer parallellfackverken att belastas med den sinusformat fördelade lasten q_{2d} via bärläkten. Upplagsreaktionerna från parallellfackverken kan via de förstärkta upplagslinjerna i nock- och takfotslinjerna återföras som upplagsreaktioner till de enskilda överramarna. Ett slutet kraftsystem system har genererats där endast krafter verkar i överramarna, bärläkten, parallellfackverken och de förstärkta nock- takfotslinjerna.

Då takstolarna belastas av den jämnt fördelad vertikallasten $q_{vert,d}$ (snö och egentyngd) längs med överramarna samtidigt som takstolarna är snedställda vinkeln φ_{tot} i förhållande till vertikalplanet krävs att bärläkten kan överföra den jämnt fördelade kraften q_{3d} till parallellfackverken. Parallellfackverkens upplagsreaktioner i nocken överförs via den förstärkta upplagslinjen i nocken och ståldragbanden ned till parallellfackverkens ändsträvor där den förstärkta

takfotslinjen kan utnyttjas till att omfördela krafterna på ett sådant sätt att varje kortling, som förutsätts finnas under parallellfackverkens upplagspunkter (se figur 5.3), överför lika stor lastandel till kantbalken belägen på väggens ovansida. Eftersom takstolarna lutar med en förhållandevis liten vinkel kommer varje takstolsupplag att påverkas av en relativt stor vertikal kraftkomposant och en relativt liten horisontell kraftkomposant. De senare horisontella kraftkomposanterna som verkar på kantbalkens ovansida måste vara i jämvikt med de horisontella kraftkomposanterna som verkar i kortlingarnas längdriktning.

Slutligen betraktar vi fallet då den jämnt fördelade vertikallasten $q_{\mathrm{vert,d}}$ belastar överramarna samtidigt som överramarna har en sinusformad totalutböjning v_{tot}. På grund av överramarnas utböjning genereras den fördelade horisontallasten $q_{4\mathrm{d}}$ i bärläkten som belastar de i yttertaksplanet liggande parallellfackverken. I avsnitt 5.3 antog vi att underramarna förblev raka i den böjveka riktningen då de belastades dvs. att de inte deformerades i den böjveka riktningen. Detta innebär att den fördelade horisontallasten $q_{4\mathrm{d}}$ som även uppträder längs med underramarna måste kunna balanseras. För att detta antagande ska uppfyllas krävs att underramarna i rimlig utsträckning är sidostagade. Liksom för den fördelade kraften $q_{3\mathrm{d}}$ är det för den fördelade kraften $q_{4\mathrm{d}}$ rimligt att förutsätta att krafterna som verkar i yttertaksplanet är i jämvikt med krafterna i undertaksplanet på höjdnivån svarande mot kantbalkens (hammarbandets) ovansida.

5.7 Bestämning av parallellfackverkens upplagsreaktioner

Vid bestämningen av parallellfackverkens upplagsreaktioner med avseende på nock- och takfotslinjerna, $R_{\mathrm{ridge,d}}$ respektive $R_{\mathrm{heel,d}}$, utgås från att lasterna som verkar på parallellfackverken är fördelade enligt ekvationerna (5.5) – (5.8).

Motsvarande upplagsreaktioner som måste överföras från ett av parallellfackverken till nock- och takfotslinjerna betecknas med $R_{\mathrm{ridge,d}}$ respektive $R_{\mathrm{heel,d}}$. Under beaktande av att $q_{1\mathrm{d}}$ och $q_{4\mathrm{d}}$ är triangulärt fördelade laster och att $q_{2\mathrm{d}}$ är en sinusfördelad last blir upplagsreaktionerna.

$$R_{\mathrm{ridge,d}} = \frac{1}{n_{\mathrm{par}}}\left(\frac{1}{6}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta + \frac{\pi n_{\mathrm{truss}} N_{\mathrm{d}} v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}^2} + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{tot}}}{2} + \frac{2v_{\mathrm{tot}}}{3h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2\right) l_{\mathrm{top}} \tag{5.16}$$

$$R_{\mathrm{heel,d}} = \frac{1}{n_{\mathrm{par}}}\left(\frac{1}{12}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta + \frac{\pi n_{\mathrm{truss}} N_{\mathrm{d}} v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}^2} + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{tot}}}{2} + \frac{4v_{\mathrm{tot}}}{3h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2\right) l_{\mathrm{top}} \tag{5.17}$$

Om vi summerar upplagskrafterna från de olika parallellfackverken och bortser från inverkan av den fördelade lasten q_{2d} svarande mot den andra termen i ekvationerna (5.16) och (5.17) erhålls att de totala krafterna överförda till nock- och takfotslinjerna uppgår till

$$R_{\mathrm{ridge,tot,d}} = \left(\frac{1}{6}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{tot}}}{2} + \frac{2v_{\mathrm{tot}}}{3h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2\right) l_{\mathrm{top}} \tag{5.18}$$

$$R_{\mathrm{heel,tot,d}} = \left(\frac{1}{12}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta + \left(\frac{\varphi_{\mathrm{tot}}}{2} + \frac{4v_{\mathrm{tot}}}{3h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2\right) l_{\mathrm{top}} \tag{5.19}$$

Motsvarande kraftkomposant som verkar längs med nocken på ett av dragbanden kan uttryckas som

$$F_{\mathrm{ridge,d}} = \frac{R_{\mathrm{ridge,tot,d}}}{n_{\mathrm{dia}}} \tag{5.20}$$

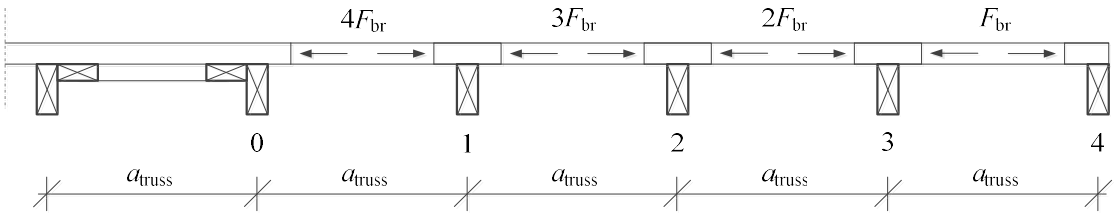
där n_{dia} anger antalet samtidigt verkande dragband.

6 Bestämning av stagningspunkternas fjäderstyvhet längs överramarna

I kapitel 1 konstaterades att takstolarnas tryckta överramar måste sidostagas i ett betydande antal punkter för att undvika att de knäcker ut i sidled vid en låg last. En viktig parameter i detta sammanhang är den elastiska fjäderstyvheten C hos dessa stagningspunkter. Fjäderstyvheten definieras av kvoten mellan stagningskraften F_{br} och förskjutningen v dvs. av

$$C = \frac{F_{\mathrm{br}}}{v} \tag{6.1}$$

Betrakta ett utskuret taksegment enligt figur 6.1 där 4 överramar numrerade 1-4 stagas av en bärläkt som är fäst vid ett liggande parallellfackverk nedsänkt mellan de båda överramarna till vänster. Överramen 0 förutsätts fäst direkt vid parallellfackverket.



Figur 6.1 Ett utskuret segment av ett tak där 4 överramar (numrerade 1-4) stagas av en bärläkt som är fäst vid ett liggande parallellfackverk nedsänkt mellan de båda överramarna till vänster. Överramen 0 förutsätts fäst direkt vid parallellfackverket. Normalkraften i bärläkten varierar från värdet F_{br} längst till höger till värdet $4F_{br}$ närmast parallellfackverket.

Fjäderstyvheten C i stagningspunkten bestäms av

- styvheten C_1 hos förbandet mellan överramen och bärläkten,
- styvheten C_2 hos förbandet mellan bärläkten och den stagande balken och
- styvheten C_3 kopplad till bärläktens längdändring

För konstruktionen enligt ovan bestående av tre seriekopplade fjädrar blir den resulterande fjäderstyvheten

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \tag{6.2}$$

vilket innebär att fjädrarnas vekheter $1/C_{\mathrm{i}}$ adderas för att få den sammansatta konstruktionens vekhet $1/C$.

Enligt Eurokod 5 kan förskjutningsmodulen för ett förband i brottgränstillståndet K_u uttryckas som

$$K_u = \frac{2}{3} K_{ser} \tag{6.3}$$

där K_{ser} representerar förskjutningsmodulen per skjuvningsplan och förbindare i bruksgränstillståndet. För spikförband (utan förborrning) används

$$K_{ser} = \frac{{\rho_m}^{1.5} d^{0.8}}{30} \tag{6.4}$$

där ρ_m anger virkets medeldensitet i kg/m^3 och d spikens diameter i mm. Notera att vid en linjärt elastisk analys enligt andra ordningens teori beaktas inte inverkan av lastens varaktighet.

För de antagna spikförbanden mellan överramarna och bärläkten används följaktligen fjäderstyvheten

$$C_1 = \frac{2}{3} K_{ser} n_{1nail} \tag{6.5}$$

där n_{1nail} anger antalet spik i respektive förband. För motsvarande förband mellan bärläkten parallellfackverket används fjäderstyvheten

$$C_2 = \frac{2}{3} K_{ser} \frac{n_{2nail}}{n_{side}} \tag{6.6}$$

där n_{2nail} anger antalet spik i det aktuella förbandet och n_{side} anger antalet takstolar som sidostagas av parallellfackverket i den ena riktningen (i detta fall 4 takstolar i den högra riktningen).

Eftersom parallellfackverket sidostagar flera takstolar kommer normalkraften i bärläkten att variera såsom antyds i Figur 6. Detta innebär att takstolen belägen längst bort från parallellfackverket (takstol 4 i figuren) kommer att förskjutas mest i förhållande till parallellfackverket. Fjäderstyvheten, kopplad till bärläktens längdändring, kan för denna takstol uttryckas som

$$C_3 = \frac{E_{mean}}{\gamma_M} \frac{A_{bat}}{l_{bat,ef}} \tag{6.7}$$

där A_{bat} läktens tvärsnittsarea
$l_{bat,ef}$ läktens effektiva längd
a_{truss} centrumavståndet mellan takstolarna

$$l_{bat,ef} = \frac{1}{2} n_{side}(n_{side} + 1) a_{truss} \tag{6.8}$$

Om det finns längdskarvar i bärläkten bör deras inverkan på fjäderstyvheten beaktas. Eventuella längdskarvar placeras där normalkrafterna är små dvs. så långt bort från parallellfackverken som möjligt. Se vidare kapitel 7.

I analysen ovan har parallellfackverket betraktats som oeftergivligt. Detta är som regel ett realistiskt antagande då antalet halvvågor *m* längs med överramen är minst lika med 5.

7 Bestämning av maximal stagningskraft i bärläkten

I föregående kapitel betraktade vi de längs överramen befintliga stagningspunkterna som diskreta elastiska fjädrar. Om avståndet mellan dessa punkter är konstant och tillräckligt litet kan överramens verkningssätt beskrivas med en modell där de diskreta upplagen ersätts med en kontinuerligt fjädrande elastisk bädd. Betecknas de diskreta upplagens fjäderkonstant med *C* och avståndet mellan stagningspunkterna/läkten med a (= a_{bat}) kan den elastiska bäddens fjäderstyvhet eller bäddmodulen k uttryckas som

$$k = \frac{C}{a} = \frac{C}{a_{\text{bat}}} \tag{7.1}$$

där k representerar fjäderstyvheten per längdenhet överram.

I appendix A (avsnitt 3.3.2) härledde vi uttryck för en tryckt balks tillskottsutböjning $v(x)$ till

$$v(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, v_0(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{l}{m\varepsilon}\sin\frac{m\pi x}{l} \tag{7.2}$$

där

$$\alpha = \frac{N}{N_{\text{cr}}} = \frac{N}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(m^2 + \frac{kl^4}{m^2\pi^4 EI}\right)} \tag{7.3}$$

Balkens tillskottsutböjning v, och därmed kraftresponsen från den elastiska bädden, är beroende av antalet antagna halvvågor m. Maximal tillskottsutböjning bestäms av att den partiella derivatan av högerledet i ekvation (7.2) med avseende på variabeln m måste vara noll dvs

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{l}{m\varepsilon}\right) = 0 \tag{7.4}$$

Genom att sätta in α enligt ekvation (7.3) i ekvation (7.4) samt derivera och omforma uttrycket fås så småningom att överramens tillskottsutböjning blir maximal då

$$m = m_{v,\max} = \sqrt{\frac{1}{6}\frac{N}{N_{\text{E}}} + \sqrt{\left(\frac{1}{6}\frac{N}{N_{\text{E}}}\right)^2 + \frac{l^2}{3\pi^2}\frac{k}{N_{\text{E}}}}} \tag{7.5}$$

där N_E betecknar knäckningslasten för Eulers andra lastfall dvs.

$$N_{\mathrm{E}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{7.6}$$

Längden på en halvvåg kan beräknas ur kvoten mellan *l* och *m* eller efter omformning uttryckas som

$$\begin{aligned} l_{v,\max} = \frac{l}{m} &= \pi \frac{\sqrt{6EI}}{\sqrt{N + \sqrt{N^2 + 12EIk}}} \\ &= \pi \frac{\sqrt{6(E_{\mathrm{mean}}/\gamma_{\mathrm{M}})I_z}}{\sqrt{N_{\mathrm{max,d}} + \sqrt{N_{\mathrm{max,d}}^2 + 12(E_{\mathrm{mean}}/\gamma_{\mathrm{M}})I_z k}}} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Notera att i detta sammanhang tilldelas överramens elasticitetsmodul värdet $E = E_{\mathrm{mean}} / \gamma_{\mathrm{M}}$. Eftersom normalkraften *N* varierar utmed överramens längd samtidigt som det är fråga om relativt korta knäckningsmoder är det rimligt att tilldela normalkraften värdet $N = N_{\mathrm{max,d}}$ där N_{max} representerar normalkraftens maximivärde längs med överramen.

Genom insättning av den första delen av ekvation (7.7) i ekvation (7.2) fås att

$$\alpha = \frac{N}{\frac{\pi^2 EI_z}{l_{v,\max}^2} + \frac{l_{v,\max}^2 k}{\pi^2}} = \frac{N_{\mathrm{max,d}}}{\frac{\pi^2 (E_{\mathrm{mean}}/\gamma_{\mathrm{M}})I_z}{l_{v,\max}^2} + \frac{l_{v,\max}^2 k}{\pi^2}} \tag{7.8}$$

Balkens (överramens) tillskottsutböjning *v* kan nu beräknas genom insättning i ekvation (7.2) till

$$v = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{l_{v,\max}}{\varepsilon} \tag{7.9}$$

Stagningskraften som överförs från en av överramarna till bärläkten fås nu ur ekvationerna (6.1) och (7.1) till

$$F_{\mathrm{bat}} = Cv = k\, a_{\mathrm{bat}} v \tag{7.10}$$

Denna kraft kan jämföras med stagningskraften som överförs från en av överramarna till ett av parallellfackverken i samband med den stora knäckningsmoden i kapitel 5. Med de i kapitel 5 använda beteckningarna fås att stagningskraften blir

$$F_{\mathrm{bat2}} = q_{\mathrm{eq,d}}\, a_{\mathrm{bat}} = \left(\frac{8 N_{\mathrm{d}} v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}^2} + \left(\varphi_{\mathrm{tot}} + \frac{2 v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}}\right) q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2\right) a_{\mathrm{bat}} \qquad (7.11)$$

Motsvarande krafter i bärläkten intill parallellfackverket fås genom att multiplicera F_{bat} och F_{bat2} med parametern $n_{\mathrm{truss,side}}$ som anger antalet takstolar som stagas på ena sidan av parallellfackverket. För den aktuella typen av sadeltakstolar blir alltid stagningskraften F_{bat} större än F_{bat2}.

Bärläkten dimensioneras med hänsyn till stagningskrafter (tryck och drag) och böjmoment av yttre last.

Längdskarvning av bärläkten kan ske med hjälp av laskar. Skarvarna bör inte placeras över samma överram utan läggas något förskjutna. Längdskarvar kan förenklat dimensioneras för att överföra kraften 1.5 $n_{\mathrm{truss,side}}$ F_{bat}. Längdskarvar belägna i mindre kraftutsatta områden kan dimensioneras för mindre krafter.

8 Kontroll av överramarna med hänsyn till knäckning i böjveka riktningen

Se avsnitt 3.3.1 i appendix A. Vi får den effektiva knäcklängden i den böjveka riktningen (runt z-axeln) som

$$l_{\mathrm{ef,z}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{E_{\mathrm{mean}}}{\gamma_{\mathrm{M}}} \frac{I_{\mathrm{z}}}{k}} \tag{8.1}$$

och motsvarande kritiska last som

$$N_{\mathrm{cr,z}} = 2\sqrt{EIk} = 2\sqrt{\frac{E_{0,05}}{\gamma_{\mathrm{M}}} I_{\mathrm{z}} k} \tag{8.2}$$

Eftersom det vid den aktuella knäckningsmoden är fråga om relativt korta knäckningslängder är det liksom i kapitel 7 rimligt att för normalkraften i överramen använda värdet $N_{max,d}$ svarande mot normalkraftens maximum längs med överramen.

Observera att överramarnas knäckningslängd i böjveka riktningen **inte** är lika med avståndet mellan stagningspunkterna utan bestäms av l_{eff} enligt ekvation (8.1). Detta innebär att vi redan vid dimensioneringen av takstolarna måste ha en viss uppfattning om bäddmodulen k och överramens böjstyvhet i veka riktningen.

Dimensionering av samtidigt tryck- och böjmomentbelastade konstruktionselement av trä kan principiellt utföras på två olika sätt:

- med hjälp av reduktionsfaktorn k_c
- med hjälp av andra ordningens teori.

Fördelen med k_c-metoden är framför allt att den är enkel att tillämpa. Fördelen med andra ordningens teori är att den normalt leder till något klenare virkesdimensioner än k_c-metoden.

8.1 Dimensionering med k_c-metoden

Vid dimensionering med k_c-metoden beaktas knäckningsrisken genom att reducera virkets tryckhållfasthet med faktorn k_c i olika samverkansuttryck som är beroende av aktuella knäckningsmoder. Sådana samverkansuttryck redovisas i avsnitt 6.3 i Eurokod 5. Med beteckningar enligt Eurokod 5 kontrolleras att följande 3 spänningsvillkor är uppfyllda för överramen.

Knäckning i böjstyva riktningen (moment runt y-axeln):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (8.3)$$

Knäckning i böjveka riktningen (moment runt z-axeln):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (8.4)$$

Böjvridknäckning:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} f_{c,0,d}} + \left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} f_{m,y,d}} \right)^2 \leq 1 \quad (8.5)$$

Spänningarna beräknas enligt första ordningens teori dvs. med överramarna i odeformerat tillstånd. Detta innebär att överramarna inte är belastad med några böjspänningar $\sigma_{m,y,d}$ och $\sigma_{m,z,d}$ orsakade av initialkrokighet i överramarnas böjstyva och böjveka riktning. Inverkan av initialkrokighet beaktas istället genom att reducera virkets tryckhållfasthet $f_{c,0,d}$ med hänsyn till aktuell k_c-faktor. Däremot ger den jämnt fördelade vertikallasten som verkar på överramarna upphov till böjmoment $M_{y,d}$ som verkar i balkarnas styva riktning.

1.1 8.2 Dimensionering enligt andra ordningens teori

Alternativt dimensioneras överramarna utgående från avsnitt 6.2.4 i Eurokod 5 varvid gäller att spänningarna ska uppfylla följande två villkor.

Knäckning i böjstyva riktningen (moment runt y-axeln):

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (8.6)$$

Knäckning i böjveka riktningen (moment runt z-axeln):

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \quad (8.7)$$

I detta fall ska spänningarna beräknas enligt andra ordningens teori dvs genom att studera överramarna i deformerat tillstånd. Detta innebär att vi måste beakta att överramarna har en viss initialkrokighet (initialutböjning) som på grund av normalkrafterna i överramarna ger upphov till tillskottsutböjningar.

För bestämning av maximal böjspänning $\sigma_{m,z,d}$ i överramarnas böjveka riktning (moment runt z-axeln) behöver vi beräkna maximalt böjmoment $M_{z,d}$ enligt andra ordningens teori varvid gäller att

$$M_{z,d} = N_{max,d} \frac{l_{ef,z}}{400} \frac{1}{1 - \frac{N_{max,d}}{N_{cr,z}}} \tag{8.8}$$

där den första delen av högerledet representerar det maximala böjmomentet av den sinusformade initialutböjningen. På grund av att vi har att göra med en sinusformad last kan vi direkt beakta andra ordningens effekter genom att införa förstoringsfaktorn som återges i den resterande delen av högerledet. Eftersom vi förutsätter att överramarna vid monteringen har riktats upp i förhållande till parallellfackverken använder vi parallellfackverkens initialutböjning l / 400 som utgångspunkt för överramarnas initialutböjning i den böjveka riktningen.

På motsvarande sätt behöver vi tillgång till maximalt böjmoment $M_{y,d}$ verkande i överramarnas böjstyva riktning (moment runt y-axeln) enligt andra ordningens teori. Knäcklängden $l_{ef,y}$ kan tas som avståndet mellan inflektionspunkterna (momentnollpunkterna) i en av överramarna. Det farligaste området ligger normalt mellan takfoten och första diagonalen och knäcklängden plockas ut i samband med dimensioneringen av takstolarna. Om vi inte har tillgång till detta avstånd kan vi överslagsmässigt använda oss av den effektiva knäckningslängden $l_{ef,y}$ lika med 0.8 gånger avståndet mellan takfoten och första diagonalen i takstolen (se avsnitt 9.2.1 i Eurokod 5). Längs med överramarna verkar den jämnt fördelade vertikala lasten $q_{vert,d}$ svarande mot snö och egentyngd. Böjmomentet $M_{y,d}$ enligt andra ordningens teori kan nu formuleras som

$$M_{y,d} = \left(\frac{q_{vert,d} l_{ef,y}^2}{8} + N_{max,d} \frac{l_{ef,y}}{300} \right) \frac{1}{1 - \frac{N_{max,d}}{N_{cr,y}}} \tag{8.9}$$

där

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 (E_{0.05} / \gamma_M) I_y}{l_{ef,y}^2} \tag{8.10}$$

Uttrycket inom parentesen i ekvation (8.9) representerar såväl böjmomentet av den fördelade vertikala lasten som böjmomentet orsakat av normalkraften och initialkrokigheten. Eftersom det första momentbidraget är parabelfördelat dvs mycket nära sinusfördelat samtidigt som det andra momentbidraget är sinusfördelat (sinusfördelad initialkrokighet) kan vi som en mycket god approximation använda samma förstoringsfaktor med hänsyn till andra ordningens deformationer som gäller för en renodlat sinusformad last. Notera att vi använder l / 300 som utgångsvärde för överramarnas initialkrokighet i böjstyva riktningen vilket i Eurokod 5 rekommenderas för konstruktionsvirke.

9 Dimensionering av dragband

Dragbandets fjäderstyvhet kan formuleras på liknande sätt som bärläktens styvhet i avsnitt 4.2. varvid

- C_1 avser styvheten hos förbandet mellan dragbandet och takfotslinjen
- C_2 avser styvheten hos förbandet mellan dragbandet och nocklinjen
- C_3 avser styvheten hos ståldragbandet

För fjäderstyvheterna C_1 och C_2 används ekvation (6.5) dvs.

$$C_1 = C_2 = \frac{2}{3} K_{\text{ser}} n_{\text{nail}} \tag{9.1}$$

Enligt avsnitt 7.1 i Eurokod 5 får vi för stål-träförband multiplicera K_{ser} med faktorn 2 vilket innebär att

$$K_{\text{ser}} = 2 \frac{{\rho_{\text{m}}}^{1.5} d^{0.8}}{30} \tag{9.2}$$

Dragbandets (diagonalens) fjäderstyvhet C_3 formuleras som

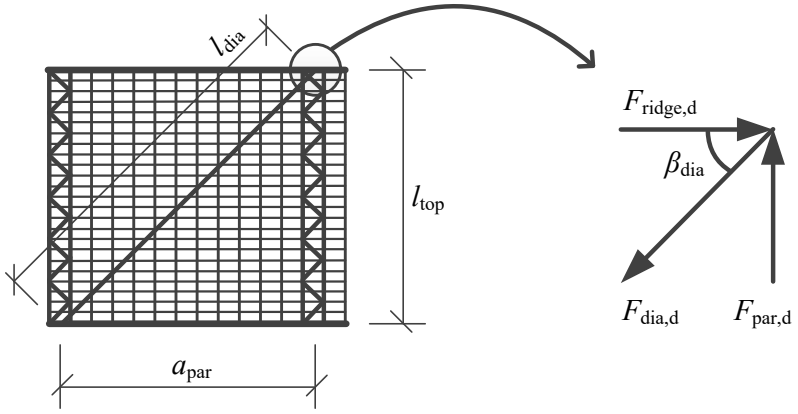
$$C_3 = \frac{E_{\text{mean,dia}}}{\gamma_{\text{M}}} \frac{A_{\text{dia}}}{l_{\text{dia}}} \tag{9.3}$$

Dragbandets totala fjäderstyvhet C_{dia} i diagonalens längdriktning beräknas till

$$C_{\text{dia}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{E_{\text{mean,dia}} A_{\text{dia}}}{\gamma_{\text{M}} l_{\text{dia}}}} + \frac{2}{\frac{2}{3} K_{\text{ser}} n_{\text{nail}}}} \tag{9.4}$$

I ekvation (5.20) infördes beteckningen $F_{\text{ridge,d}}$ för kraften som verkar längs med nocklinjen och som ska överföras till ett av dragbanden. Inför beteckningen v_{ridge} för den tillhörande tillskottsförskjutningen längs med nocken. Motsvarande kraft och tillskottsförskjutning längs ett av dragbanden betecknas med $F_{\text{dia,d}}$ respektive v_{dia}. Introducera beteckningen β_{dia} för vinkeln mellan ståldragbandet och takfotslinjen. Genom att studera kraftjämvikten i nocken, enligt figur 9.1,där dragbandet ansluter mot nocklinjen via parallellfackverkets får vi att

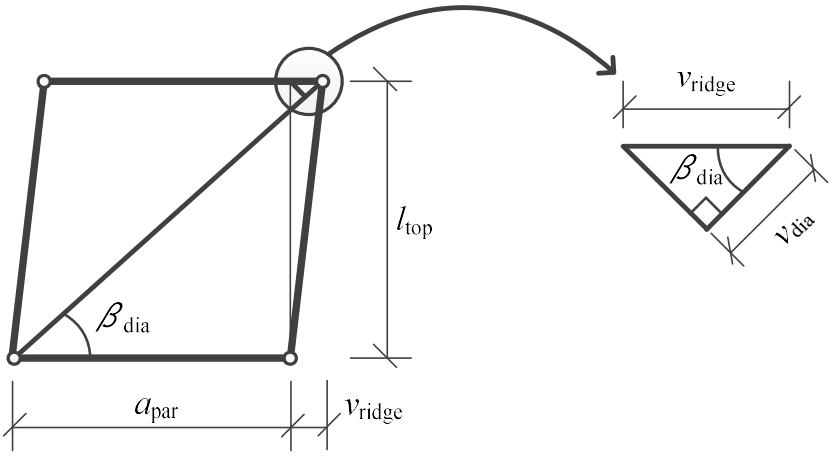
$$F_{\text{ridge,d}} = F_{\text{dia,d}} \cos \beta_{\text{dia}} = F_{\text{dia,d}} \frac{a_{par}}{l_{\text{dia}}} \tag{9.5}$$



Figur 9.1 Kraftjämvikten i skärningspunkten mellan den tryckta nocklinjen, det dragna ståldragbandet och det tryckta parallellfackverket.

Genom att betrakta axialdeformationerna i parallellfackverken, nock- och takfotslinjerna som försumbara jämfört med axialdeformationerna hos ståldragbanden kan sambandet mellan motsvarande förskjutningar i nocken, enligt figur 9.2, uttryckas som

$$v_{\text{dia}} = v_{\text{ridge}} \cos \beta_{\text{dia}} = v_{\text{ridge}} \frac{a_{par}}{l_{\text{dia}}} \tag{9.6}$$



Figur 9.2 Yttertaksskivan i deformerat tillstånd. De båda parallellfackverken är liksom de förstärkta nock- och takfotslinjerna grafiskt återgivna med tjocka linjer.

I början av kapitel 5 nämnde vi att det är lämpligt att utgå från att takstolarnas tillskott i snedställning φ och överramarnas tillskottsutböjning v är kända storheter. Här utnyttjar vi att takstolarnas tillskott i snedställning φ resulterar i ett tillskott i horisontell förskjutning v_{ridge} längs med nocklinjen som kan formuleras

$$v_{\text{ridge}} = h_{\text{ridge}}\varphi \tag{9.7}$$

Med hjälp av ekvationerna (9.5) - (9.7) kan nu erforderlig fjäderstyvhet hos dragbanden $C_{\text{dia,req}}$ uttryckas som

$$\begin{aligned} C_{\text{dia,req}} &= \frac{F_{\text{dia,d}}}{v_{\text{dia}}} = \frac{F_{\text{ridge,d}}}{v_{\text{ridge}}\cos^2\beta_{\text{dia}}} = \frac{F_{\text{ridge,d}}}{h_{\text{ridge}}\varphi\cos^2\beta_{\text{dia}}} \\ &= \frac{F_{\text{ridge,d}}}{h_{\text{ridge}}\varphi}\left(\frac{l_{dia}}{a_{par}}\right)^2 \end{aligned} \tag{9.8}$$

En lämplig beräkningsgång blir att först beräkna dragkraften i diagonalerna $F_{\text{dia,d}}$ ur ekvation (9.5) dvs

$$F_{\text{dia,d}} = F_{\text{ridge,d}}\frac{l_{\text{dia}}}{a_{par}} \tag{9.9}$$

För att få en rimlig styvhet i förbanden mellan ståldragbanden och de anslutande virkesdelarna dimensioneras dessa för kraften 1.5 $F_{\text{dia,d}}$. Välj dragband som uppfyller dimensionerande bärförmåga enligt ekvation (9.9). Beräkna dragbandens fjäderstyvhet C_{dia} enligt ekvation (9.4) och jämför med kravvärdet $C_{\text{dia,req}}$ enligt ekvation (9.8).

10 Dimensionering av dragbandens anslutningar vid nock och takfot

Dragkrafterna $F_{\mathrm{dia,d}}$ som verkar i ståldragbanden förankras i mitten av de liggande ändsträvorna som avslutar samtliga parallellfackverk. Kraftkomposanterna $F_{\mathrm{dia,0,d}}$ som verkar vinkelrät mot ändsträvorna i takfallets riktning uppgår till

$$F_{\mathrm{dia,0,d}} = F_{\mathrm{dia,d}} \sin \beta_{dia} \tag{10.1}$$

Kontrollera att ändsträvorna i parallellfackverken kan uppta aktuella böjmoment och tvärkrafter. Kontrollera att spikplåtarna som förbinder ändsträvorna mot parallellfackverkens ramstänger kan överföra tvärkrafterna.

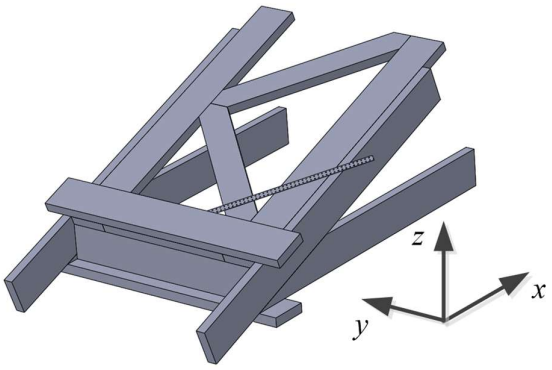
En uppdelning av dragkraften $F_{\mathrm{dia,d}}$ i kraftkomposanter verkande i x-, y- och z-riktningen vid takfoten (se figur 10.1) ger att

$$F_{\mathrm{dia,x,d}} = F_{\mathrm{dia,d}} \sin \beta_{dia} \cos \theta \tag{10.2}$$

$$F_{\mathrm{dia,y,d}} = F_{\mathrm{dia,d}} \cos \beta_{dia} \tag{10.3}$$

$$F_{\mathrm{dia,z,d}} = F_{\mathrm{dia,d}} \sin \beta_{dia} \sin \theta \tag{10.4}$$

där θ liksom tidigare anger yttertakets lutning.



Figur 10.1 x-axeln definieras av underramarnas riktning, y-axeln av takfotslinjens riktning och z-axeln av normalen mot planet som underramarnas tyngdpunktslinjer bildar.

Kraftkomposanten $F_{\mathrm{dia,x,d}}$ kan vid symmetrisk last på takstolarna balanseras av motsvarande kraft från andra sidan av byggnaden genom att de båda underramarna i takstolarna intill parallellfackverket blir tryckbelastade med vardera kraften $F_{\mathrm{dia,x,d}}$ /2. Vid osymmetrisk last på de båda takhalvorna måste

kraftkomposanten $F_{\mathrm{dia,x,d}}$ upptas av kantbalken (hammarbandet) eller genom t.ex. skivverkan i underramsplanet. Kraftkomposanten $F_{\mathrm{dia,z,d}}$ kommer att påverka de båda takstolsupplagen intill parallellfackverket med vardera lyftkraften $F_{\mathrm{dia,z,d}}$ /2. Kraftkomposanten $F_{\mathrm{dia,y,d}}$ kan även direkt beräknas ur ekvation (5.20).

Om vi tills vidare bortser från inverkan av den sinusfördelade lasten $q_{2\mathrm{d}}$ inses direkt att den resulterande kraften som verkar längs med takfotslinjen (y-riktningen) uppgår till

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{tot,d}} &= R_{\mathrm{ridge,tot,d}} + R_{\mathrm{heel,tot,d}} \\ &= \left(\frac{1}{4}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\varphi_{\mathrm{tot}} + \frac{2v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2 \right) l_{\mathrm{top}} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Om vi vidare förutsätter att kortlingar placeras mellan takstolarna vid varje parallellfackverk och att lika stor horisontalkraft $F_{\mathrm{nogg,d}}$ ska överföras av samtliga kortlingar (eng. noggings) får vi att

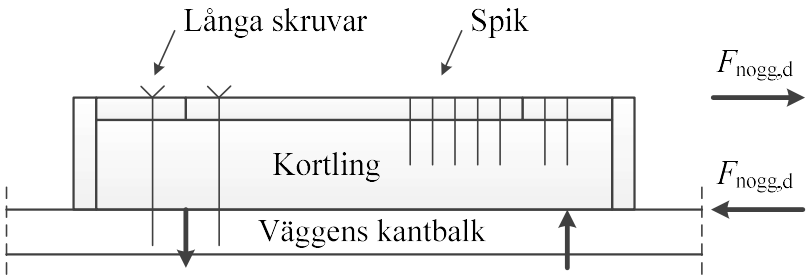
$$\begin{aligned} F_{nogg,d} &= \frac{F_{\mathrm{tot,d}}}{n_{\mathrm{par}}} \\ &= \left(\frac{1}{4}\, p_{\mathrm{d}}\, l_{\mathrm{top}} \cos\theta \sin\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(\varphi_{\mathrm{tot}} + \frac{2v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}}\right) n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} (\cos\theta)^2 \right) \frac{l_{\mathrm{top}}}{n_{\mathrm{par}}} \end{aligned} \tag{10.6}$$

Den första termen inom den yttre parentesen representerar inverkan av den fördelade vindlasten p_{d} mot gavlarna. Den andra termen avser inverkan av den fördelade vertikallasten $q_{\mathrm{vert,d}}$ som verkar på överramarna samtidigt som takstolarna är snedställda. Den första termen i den inre parentesen avser snedställningen φ_{tot} då takstolen deformeras i sitt eget plan. Den andra termen i den inre parentesen avser medelsnedställningen orsakad av att takstolarna snedställds ut ur sina plan genom att överramarna har en sinusformad utböjning med värdet v_{tot} i mittsnittet.

För att uppnå den önskade kraftfördelningen på de olika kortlingarna måste den förstärkta takfotslinjen användas för att omfördela krafterna. Se kapitel 11.

Vid den horisontella kraftöverföringen från kortlingarnas ovansida till väggens kantbalk måste kontrolleras att kortlingarnas momentjämvikt uppfylls. Detta kan exempelvis utföras genom att förankra kortlingarna med långa skruvar ner i kantbalken samtidigt som virkets hållfasthet vinkelrät mot fiberriktningen utnyttjas för upptagning av tryckkraften. Se figur 10.2. Notera att vi också måste

förankra mot kraftkomposanten $F_{dia,z,d}$ som vill lyfta parallellfackverket från underlaget.



Figur 10.2 Exempel på hur en kortlings momentjämvikt kan uppfyllas genom att till vänster förankra den med långa skruvar i väggens kantbalk samtidigt som anliggningstrycket mellan kortlingen och kantbalken utnyttjas på högra sidan.

Kraftöverföringen mellan den förstärkta nocklinjen, parallellfackverken och dragbanden kan lösas på liknande sätt som vid takfoten. Kortlingar placeras mellan takstolarna under den förstärkta nocklinjen. Kortlingarna motverkar att takstolarna deformeras ut ur sina plan och kan användas till att säkra nocklinjen gentemot knäckning i den böjveka riktningen, se kapitel 11.

11 Dimensionering av nock- och takfotslinjerna

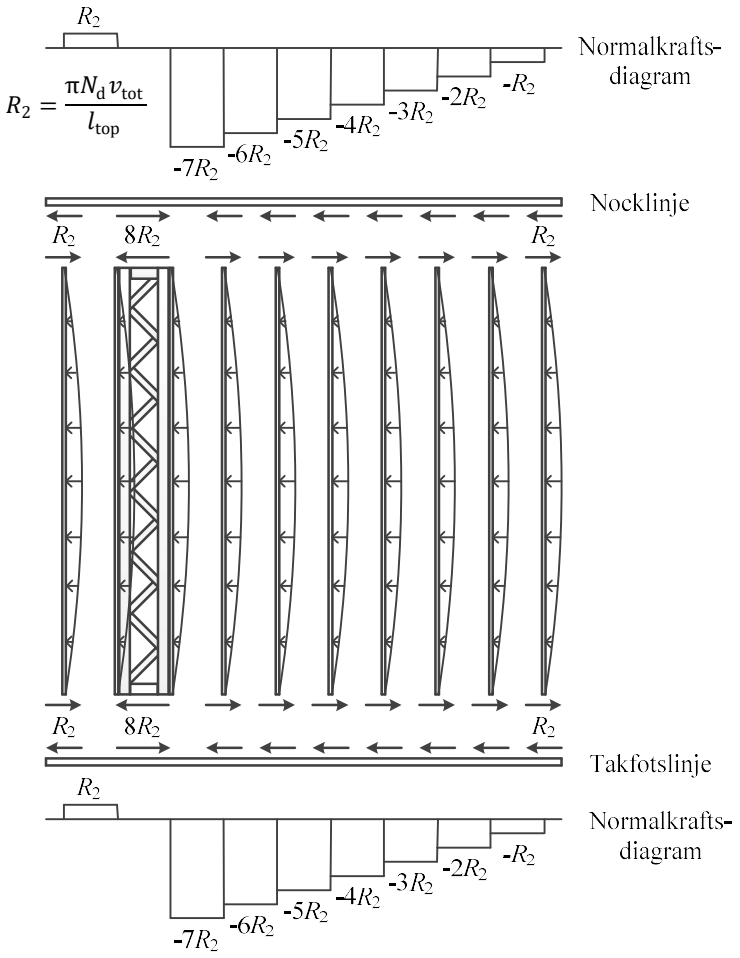
Den aktuella knäckningsmoden i samband med dimensioneringen av parallellfackverken utgår från att samtliga överramar knäcker ut i en halvvåg samtidigt som takstolarna är initialt snedställda. Som redan nämnts kapitel 5 har vi i samband med dimensioneringen av parallellfackverken valt att beakta inverkan av de fördelade lasterna q_{1d} - q_{4d} på ett sådant sätt att varje parallellfackverk antas uppta lika stor andel av respektive typ av fördelad last. Detta betraktelsesätt förutsätter att bärläkten i viss utsträckning kan omfördela lasterna mellan olika delar av det stabiliserande yttertaket. Eftersom bärläkten inte dimensioneras av fallet då samtliga överramar knäcker ut i en halvvåg utan av fallet då överramarna knäcker ut i betydligt kortare våglängder har vi en överkapacitet hos bärläkten som vi kan utnyttja.

Observera att takstolarna som gränsar mot parallellfackverken förutsätts monterade mot varandra på ett sådant sätt att bärläkten, nock- och takfotslinjerna inte behöver användas för kraftöverföring mellan dem.

Låt oss först betrakta inverkan av den fördelade lasten q_{2d} svarande mot att takstolarnas överramar har en sinusformad initialkrokighet samtidigt som överramarna är påverkade av stora tryckkrafter. På grund av att parallellfackverken i regel ligger mer koncentrerade vid byggnadens gavlar än vid byggnadens mittparti kommer parallellfackverken närmast gavlarna att påverkas av större osymmetri i lasterna. Betrakta exempelvis en byggnad där taket består av n_{truss} = 40 takstolar och n_{par} = 4 parallellfackverk och där de båda yttersta parallellfackverken är belägna mellan takstol nummer 2 och 3 från respektive gavel. Då varje parallellfackverk i detta fall ska uppta lasten från n_{truss} / n_{par} = 10 takstolar innebär detta att parallellfackverket som ligger närmast den vänstra gaveln ska uppta lasten från 1 takstol på vänstra sidan och 7 takstolar på den andra sidan enligt figur 11.1 (Lasterna från de båda takstolarna som gränsar mot parallellfackverket förutsätts överföras genom att de är spikade eller skruvade mot parallellfackverket). För detta exempel kan vi med hjälp av ekvation 5.16 och 5.17 formulera den största normalkraften i nock- och takfotslinjen (drag- eller tryckkraft, beroende på halvvågens utböjningsriktning) som

$$N_{\mathrm{ridge,q2,d}} = N_{\mathrm{heel,q2,d}} = \pm\left(\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} - 3\right)\frac{\pi N_{\mathrm{d}} v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}} \qquad (11.1)$$

Ekvation (11.1) är endast giltig då de yttersta parallellfackverken är belägna mellan takstol 2 och 3 från gavlarna.



Figur 11.1 Inverkan av sinusformad initialkrokighet och stora tryckkrafter i takstolarnas överramar. Antagna krafter som verkar på takstolarnas överramar och på de förstärkta nock- och takfotslinjerna redovisas. Den fördelade lasten som verkar åt höger på parallellfackverket redovisas av utrymmesskäl inte. R_2 betecknar överramarnas upplagsreaktioner av den sinusfördelade lasten. Normalkrafternas fördelning längs med nock- och takfotslinjerna visas.

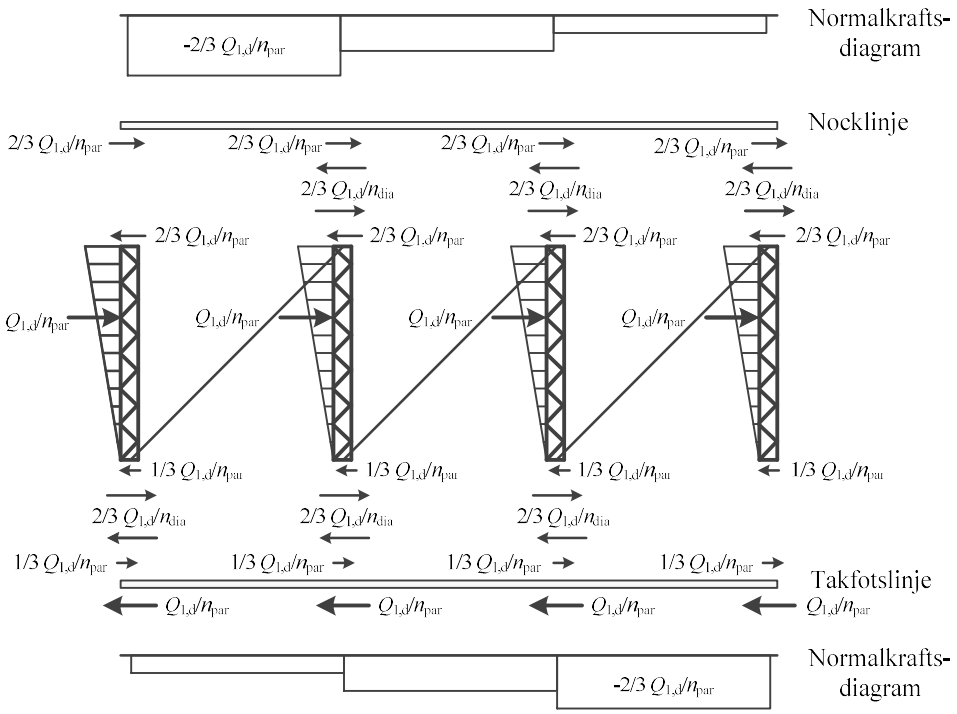
För att analysera inverkan av den fördelade lasten q_{1d}, härrörande från vind mot byggnadens gavlar, förutsätter vi såsom tidigare att vindlasten belastar samtliga parallellfackverk med lika stor andel. Betrakta den ovan beskrivna byggnaden bestående av 40 takstolar och 4 parallellfackverk. Genom att beteckna den resulterande horisontalkraften av vind som påverkar byggnaden med Q_{1d} där

$$Q_{1,d} = \frac{1}{4} p_d l_{top}^2 \cos\theta \sin\theta \tag{11.2}$$

och förutsätta att varje parallellfackverk belastas med lika stor andel av denna last finner vi att den resulterande lasten på varje parallellfackverk blir Q_{1d} / n_{par},

se figur 11.2. Vi förutsätter vidare att den resulterande kraften 2/3 Q_{1d} som kommer att verka längs med nocklinjen tas upp med lika stor andel av varje av varje dragband vilket betyder att dragbanden kommer att belastas med en horisontell kraftkomposant som uppgår till 2/3 Q_{1d} / n_{dia}. Störst normalkraft utmed nocklinjen $N_{ridge,q1,d}$ erhålls mellan parallellfackverken 1 och 2 (längst till vänster) där normalkraften (tryckkraft) uppgår till

$$N_{\mathrm{ridge,q1,d}} = -\frac{2}{3}\frac{Q_{1,\mathrm{d}}}{n_{\mathrm{par}}} = -\frac{1}{6}\frac{p_{\mathrm{d}} l_{\mathrm{top}}^2}{n_{\mathrm{par}}}\cos\theta\sin\theta \qquad (11.3)$$



Figur 11.2 Inverkan av vindlasten mot byggnadens gavlar ger upphov till en triangulärt fördelad last som verkar på parallellfackverken. Krafterna som verkar längs nocklinjen är dels upplagskrafterna från parallellfackverken och dels diagonalernas kraftbidrag. För takfotslinjen tillkommer krafterna från kortlingarna. Normalkrafternas fördelning längs med nock- och takfotslinjerna visas.

På samma sätt som i kapitel 10 förutsätter vi att den resulterande kraften som verkar utmed takfotslinjen överförs med lika stor andel till varje kortling vilket innebär att varje kortling ska överföra kraften Q_{1d} / n_{par}. Eftersom upplagsreaktionen som överförs från varje parallellfackverk till takfotslinjen endast uppgår till 1/3 Q_{1d} / n_{par} innebär detta att den största normalkraften utmed takfotslinjen $N_{heel,q1,d}$ måste uppträda mellan parallellfackverken 3 och 4 (längst till höger) och uppgå till 2/3 Q_{1d} / n_{par} och utgör en tryckkraft dvs.

$$N_{\mathrm{heel,q1,d}} = N_{\mathrm{ridge,q1,d}} \tag{11.4}$$

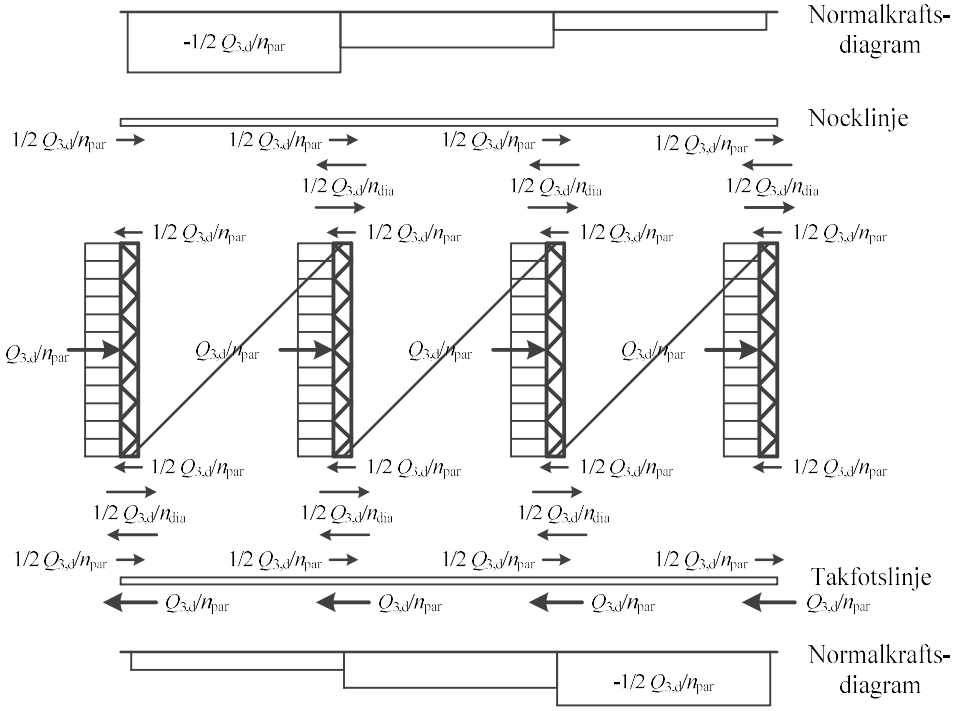
För en given vindriktning är normalkrafternas fördelning längs nocklinjen spegelvänd jämfört med fördelningen längs takfotslinjen.

Vi övergår nu till att behandla fallet med en renodlat jämnt fördelad snedställningslast q_{3d} som verkar på parallellfackverken. Den resulterande snedställningskraften Q_{3d} som verkar på parallellfackverken kan med hjälp av ekvation (5.7) formuleras som

$$Q_{3,\mathrm{d}} = n_{\mathrm{truss}} q_{\mathrm{vert,d}} l_{top} \varphi_{\mathrm{tot}} (\cos\theta)^2 \tag{11.5}$$

Den resulterande lasten som verkar på varje parallellfackverk blir Q_{3d} / n_{par}, se figur 11.3. Störst normalkraft längs med nocklinjen $N_{ridge,q3,d}$ uppträder mellan parallellfackverken 1 och 2 och blir

$$N_{\mathrm{ridge,q3,d}} = -\frac{1}{2}\frac{Q_{3,\mathrm{d}}}{n_{\mathrm{par}}} = -\frac{1}{2}\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} q_{\mathrm{vert,d}} \varphi_{\mathrm{tot}} l_{top} (\cos\theta)^2 \tag{11.6}$$



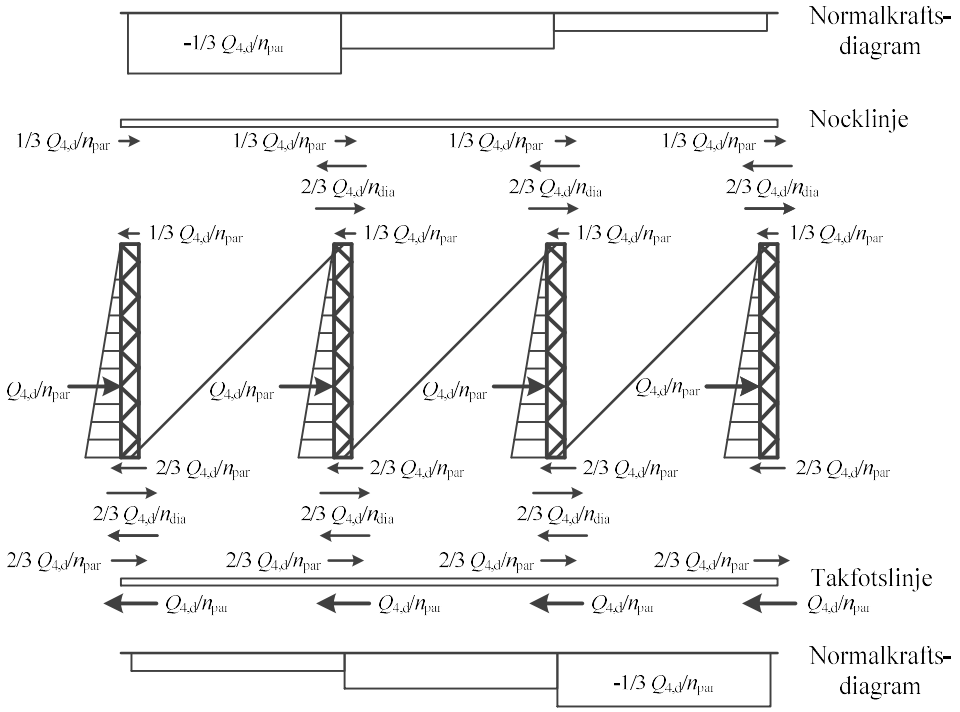
Figur 11.3 Inverkan av renodlad snedställning ger upphov till en jämnt fördelad last som verkar på parallellfackverken. Krafterna som verkar längs nocklinjen är dels upplagskrafterna från parallellfackverken och dels diagonalernas kraftbidrag. För takfotslinjen tillkommer krafterna från kortlingarna. Normalkrafternas fördelning längs med nock- och takfotslinjerna visas.

Med samma metodik som ovan finner vi att den största normalkraften utmed takfotslinjen $N_{\text{heel,q3,d}}$ uppträder mellan de två yttersta parallellfackverken till höger och blir

$$N_{\text{heel,q3,d}} = N_{\text{ridge,q3,d}} \tag{11.7}$$

Slutligen behandlar vi fallet då takstolarna snedställs ut ur sina plan och det uppstår en triangulärt fördelad snedställningslast $q_{4\text{d}}$ som verkar på parallellfackverken enligt figur 11.4. Den resulterande snedställningskraften $Q_{4\text{d}}$ som verkar på parallellfackverken kan utgående från ekvation (5.8) uttryckas som

$$Q_{4\text{d}} = 2n_{\text{truss}} q_{\text{vert,d}} l_{top} \frac{v_{\text{tot}}}{h_{\text{ridge}}} (\cos\theta)^2 \tag{11.8}$$



Figur 11.4 Inverkan av snedställning ut ur takstolarnas plan ger upphov till en triangulärt fördelad last som verkar på parallellfackverken. Krafterna som verkar längs nocklinjen är dels upplagskrafterna från parallellfackverken och dels diagonalernas kraftbidrag. För takfotslinjen tillkommer krafterna från kortlingarna. Normalkrafternas fördelning längs med nock- och takfotslinjerna visas.

Den resulterande kraften på varje fackverk blir Q_{4d} / n_{par}. Störst normalkraft längs nocklinjen $N_{ridge,q4,d}$ uppträder som en tryckkraft mellan de båda parallellfackverken längst till vänster och blir

$$N_{\mathrm{ridge,q4,d}} = -\frac{1}{3}\frac{Q_{4,\mathrm{d}}}{n_{\mathrm{par}}} = -\frac{2}{3}\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} q_{\mathrm{vert,d}} l_{top} \frac{v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}} (\cos\theta)^2 \qquad (11.9)$$

Störst normalkraft utmed takfotslinjen $N_{heel,q4,d}$ uppträder som en tryckkraft mellan de båda fackverksbalkarna längst till höger och blir

$$N_{\mathrm{heel,q4,d}} = N_{\mathrm{ridge,q4,d}} \qquad (11.10)$$

En summering av normalkraftsbidragen från ekvationerna (11.1), (11.3), (11.6) och (11.9) visar att den maximala normalkraften längs nocklinjen $N_{ridge,d}$ uppträder mellan de båda yttersta parallellfackverken på byggnadens lovartsida.

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{ridge,d}} = & -\frac{1}{6}\frac{p_{\mathrm{d}} l_{\mathrm{top}}^2}{n_{\mathrm{par}}} \cos\theta \sin\theta - \left(\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} - 3\right)\frac{\pi N_{\mathrm{d}} v_{\mathrm{tot}}}{l_{\mathrm{top}}} \\ & -\frac{1}{2}\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} q_{\mathrm{vert,d}} \varphi_{\mathrm{tot}} l_{top} (\cos\theta)^2 \\ & -\frac{2}{3}\frac{n_{\mathrm{truss}}}{n_{\mathrm{par}}} q_{\mathrm{vert,d}} l_{top} \frac{v_{\mathrm{tot}}}{h_{\mathrm{ridge}}} (\cos\theta)^2 \end{aligned} \qquad (11.11)$$

Den största normalkraften längs takfotslinjen $N_{heel,d}$ fås genom att summera kraftbidragen från ekvationerna (11.1), (11.4), (11.7) och (11.10) och uppträder mellan de båda yttersta parallellfackverken på byggnadens läsida.

$$N_{\mathrm{heel,d}} = N_{\mathrm{ridge,d}} \qquad (11.12)$$

Dimensionera de förstärkta nock- och takfotslinjerna så att de klarar att överföra de aktuella normalkrafterna i längdskarvarna. Kontrollera de förstärkta nock- och takfotslinjerna med avseende på knäckning i den böjveka riktningen.

Referenser

/1/ Kessel H.M., Kühl A.: Aussteifung von Nagelplattenkonstruktionen. Frauenhofer IRB Verlag. Stuttgart, 2011.

A Sidostagning av tryckt balk på elastiskt eftergivliga upplag

A.1 Grundläggande principer

Sidostagning av en tryckt kontinuerlig balk upplagd på elastiskt eftergivliga upplag kan modelleringsmässigt behandlas på två olika sätt:

- Balken betraktas som upplagd på diskreta fjädrande upplag.
- Balken betraktas vilande på en kontinuerlig fjädrande elastisk bädd.

Vilken metod som är att föredra beror på avståndet mellan upplagen, balkens styvhetsegenskaper och upplagens fjäderstyvhet.

A.2 Tryckt balk på diskreta fjädrande upplag

A.2.1 Bestämning av erforderlig fjäderstyvhet i stagningspunkterna för idealt rak balk

Betrakta en initialt rak balk enligt figur A.1a som förutsätts vara belastad med normalkraften N och fritt upplagd på oeftergivliga stöd i båda ändar samtidigt som mittpunkten är understödd av en elastisk fjäder med styvheten C. För att förenkla problemet antas att balken är försedd med en led på mittpunkten. Vi söker den minsta fjäderstyvhet som balkens mittupplag måste ha för att balken ska knäcka ut i två halvvågor. Balken påtvingas därför en mycket liten förskjutning w i mittpunkten, enligt figur A.1b, och knäckningslasten bestäms av att balken blir kvar i det utböjda jämviktsläget. Stagningskraften F_{br} bestäms definitionsmässigt ur sambandet $F_{\mathrm{br}} = Cw$. Ur villkoret att det stabiliserande och det destabiliserande böjmomentet måste vara lika i det utböjda tillståndet ger momentjämvikten för exempelvis den vänstra balkhalvan med avseende på den antagna leden att

$$\frac{F_{\mathrm{br}}}{2}a = \frac{Cw}{2}a = Nw \tag{A.1}$$

varur fås att

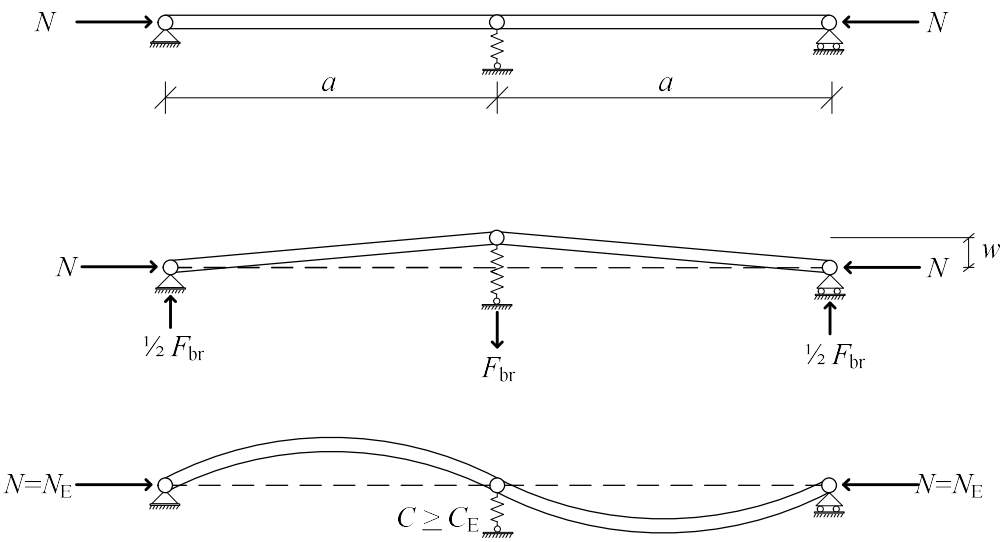
$$C = \frac{2N}{a} \tag{A.2}$$

För en fullt stagad balk svarande mot att den knäcker ut i två halvvågor enligt figur A.1c uppgår normalkraften N till

$$N = N_{\mathrm{E}} = \pi^2 \frac{EI}{a^2} \tag{A.3}$$

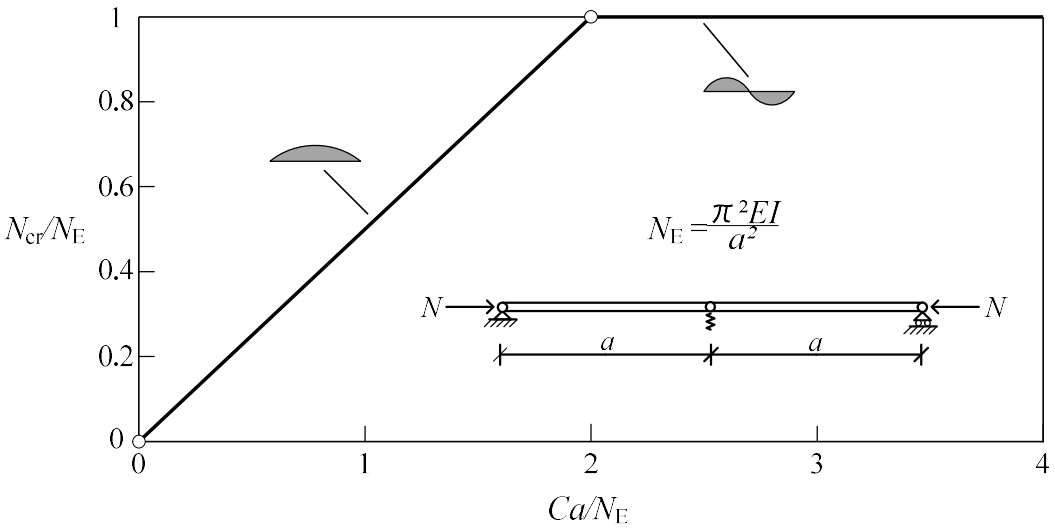
Insättning av ekvation (A.3) i ekvation (A.2) ger att erforderlig fjäderstyvhet C_{E} för att uppnå knäckningslasten N_{E} blir

$$C = C_{\mathrm{E}} = 2\pi^2 \frac{EI}{a^3} \tag{A.4}$$



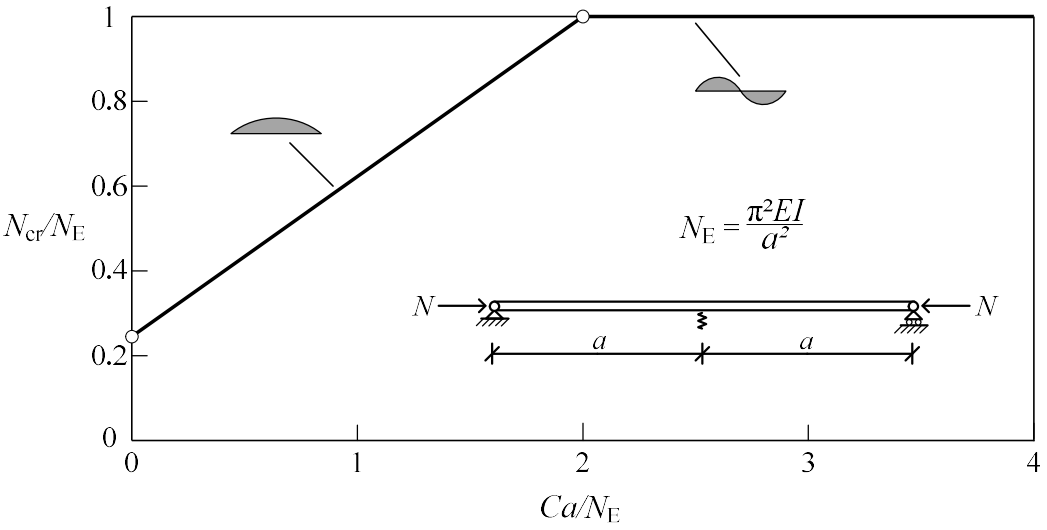
Figur A.1 Initialt rak balk med elastisk stagning och antagen led i mittpunkten. (a) Balken i odeformerat tillstånd. (b) Balken i deformerat tillstånd med en liten påtvingad förskjutning w i mittpunkten. (c) Balk med tillräcklig styvhet $C \geq C_{\mathrm{E}}$ i mittpunkten för att den ska knäcka ut i två halvvågor.

Notera att den införda förenklingen med en led i balkens mittpunkt inte påverkar balkens momentfördelning i just det skede då balkens normalkraft $N = N_{\mathrm{E}}$, svarande mot att balken knäcker ut i två halvvågor. Detta framgår av figur A.1c, där balken skulle ha en inflexionspunkt, dvs. en nollmomentpunkt, i stagningspunkten även om balken inte hade en antagen led där. För $C < C_{\mathrm{E}}$ innebär förenklingen att den kritiska knäckningslasten underskattas. En grafisk bild av sambandet mellan knäckningslasten N_{cr} och fjäderstyvheten C visas i figur A.2.



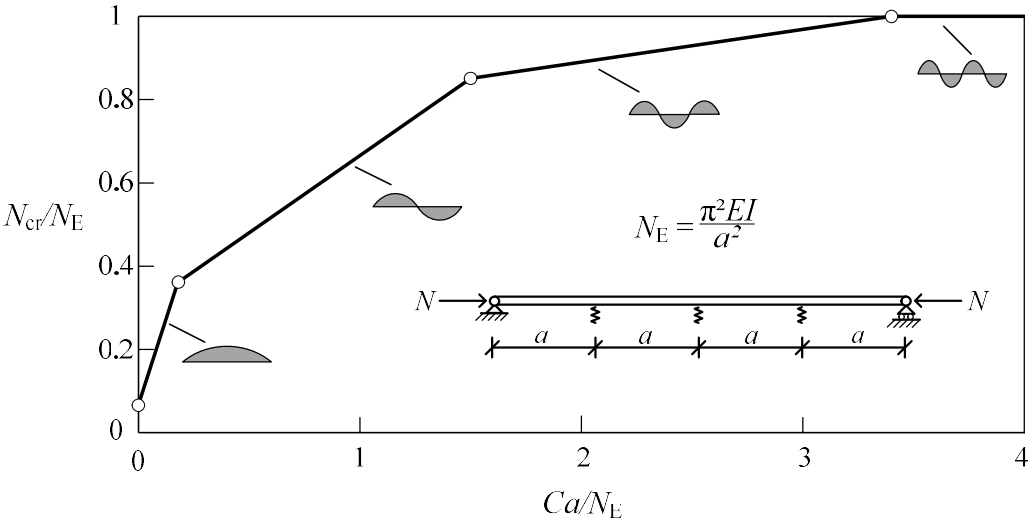
Figur A.2 Knäckningslasten N_{cr} som funktion av fjäderstyvheten C för en initialt rak balk med ett elastiskt eftergivligt upplag i mitten av spannet och en antagen led i balkens mittpunkt.

Timoshenko och Gere (1961) redovisar en analytisk lösning för lastfallet enligt figur A.1, men utan att det finns någon led vid stagningspunkten. Deras analys visar att den idealt raka balkens kritiska knäckningslast N_{cr} kan beskrivas med en trigonometrisk funktion som är approximativt en linjär funktion av fjäderstyvheten C enligt figur A.3. Eftersom det inte finns någon led i balkens mittpunkt vet vi att för $C = 0$ att knäckningslasten $N_{cr} = \pi^2 EI/(2a)^2 = N_E/4$ där $N_E = \pi^2 EI/a^2$.



Figur A.3 Knäckningslasten N_{cr} som funktion av fjäderstyvheten C för en initialt rak kontinuerlig balk med ett elastiskt eftergivligt upplag i mitten av spannet.

Yura (1996) redovisar resultat från finit element beräkningar för en idealt rak fritt upplagd balk med tre inre elastiskt eftergivliga upplagspunkter som ligger på samma avstånd från varandra. I figur A.4 visas balkens kritiska knäckningslast N_{cr} som funktion av fjäderstyvheten C i stagningspunkterna. Utan någon stagning, dvs. för $C = 0$, är $N_{cr} = \pi^2 EI/(4a)^2 = N_E/16$ där $N_E = \pi^2 EI/a^2$. Vid liten fjäderstyvhet knäcker balken ut i en halvvåg. För ökande fjäderstyvhet ökar antalet halvvågor för att slutligen utgöra fyra halvvågor då fjäderstyvheten $C \geq 3.41 N_E/a$. Yura beskriver en förenklad metod med vilken det går att approximativt beskriva de svagt krökta kurvdelarna med räta linjer. Metoden bygger på en generalisering av metoden där man inför leder i balken vid samtliga stagningspunkter. Denna förenklade metod leder till att knäckningslasten N_{cr} för en balk med givet antal mellanstöd blir korrekt bestämd för första och sista knäckningsmoden medan N_{cr} blir underskattad för mellanliggande moder.



Figur A.4 Knäckningslasten N_{cr} som funktion av fjäderstyvheten C för en initialt rak kontinuerlig balk upplagd på tre mellanliggande elastiskt eftergivliga upplag.

Som framgår av exemplen ovan ökar kravet på stagningspunkternas styvhet då antalet stagningspunkter ökar. En sammanställning av vilken styvhet som krävs för att stagningspunkterna ska kunna betraktas som oeftergivliga finns exempelvis i Timoshenko och Gere (1961) och återges i Tabell A.1 för olika antal halvvågor m. Antalet stagningspunkter $n = m$-1. För stora m-värden närmar sig Ca/N_E asymptotiskt värdet 4.

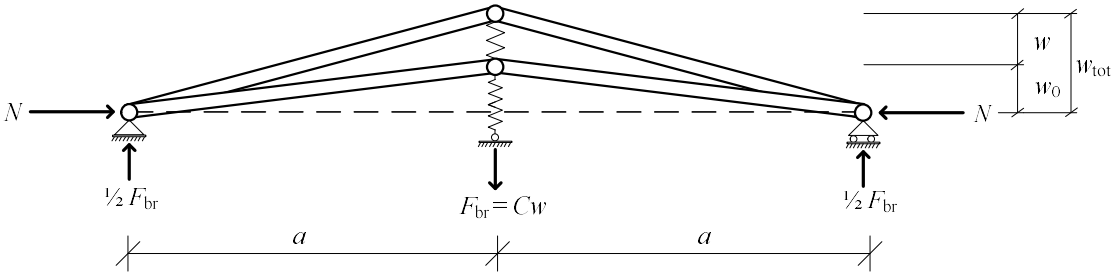
Tabell A.1 Sammanställning av vilken styvhet som krävs för att stagningspunkterna ska kunna betraktas som oeftergivliga. $N_E = \pi^2 EI/a^2$.

m	2	3	4	5	6	8	10	∞

Ca/N_E	2	3	3.41	3.62	3.73	3.85	3.90	4

A.2.2 Inverkan av initialkrokighet

Knäckningsanalysen som genomfördes i föregående avsnitt utfördes på en idealt rak balk och ger ingen information om krafter och deformationer i stagningspunkterna. I praktiken förekommer inga raka balkar utan alla balkar har någon form av initialkrokighet. Betrakta därför den tidigare använda förenklade statiska modellen med en led på mitten men nu under antagande av att balken har en initialutböjning w_0 enligt figur A.5. Fjäderns styvhet i stagningspunkten betecknas som tidigare med C.



Figur A.5 Modell för analys av stagad balk med initialutböjning w_0 i stagningspunkten på mitten av spannet.

Inför beteckningen w för balkens tillskottsutböjning så att balkens totala utböjning w_{tot} kan uttryckas som

$$w_{\mathrm{tot}} = w_0 + w \tag{A.5}$$

Momentjämvikt kring den antagna leden för ena balkhalvan ger

$$N w_{\mathrm{tot}} = \frac{F_{\mathrm{br}}}{2} a \tag{A.6}$$

Stagningskraften i fjädern är

$$F_{\mathrm{br}} = Cw \tag{A.7}$$

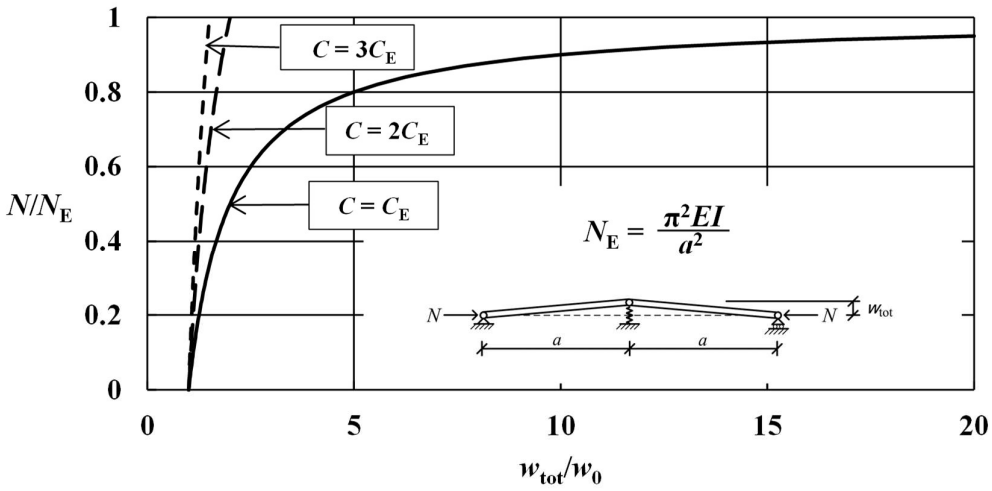
Studera balken då fjäderstyvheten $C = C_E$ vilket svarar mot att den initialt raka balken knäcker ut i två halvvågor

$$C = C_{\mathrm{E}} = \frac{2N_{\mathrm{E}}}{a} = 2\frac{\pi^2 EI}{a^3} \tag{A.8}$$

Genom att sätta in ekvationerna (A.7) och (A.8) i ekvation (A.6) och samtidigt utnyttja ekvation (A.5) kan sambandet mellan tryckkraften N och balkens totala utböjning w_{tot} uttryckas som

$$w_{\text{tot}} = \frac{w_0}{1 - \dfrac{N}{N_{\text{E}}}} \tag{A.9}$$

I figur A.6 visas sambandet grafiskt. För $N = 0$ är $w_{\text{tot}} = w_0$. Då N ökar och närmar sig knäckningslasten $N_{\text{E}} = \pi^2 EI/a^2$, blir den totala utböjningen w_{tot} mycket stor. T.ex. då N uppgår till 95 % av knäckningslasten blir $w_{\text{tot}} = 20w_0$. Så stora utböjningar är i allmänhet inte acceptabla. Om fjäderstyvheten C istället väljs dubbelt så stor så att $C = 2C_{\text{E}}$ blir utböjningarna mycket mindre och för $N = N_{\text{E}}$ blir $w_{\text{tot}} = 2w_0$.



Figur A.6 Samband mellan normalkraften N och totala utböjningen w_{tot} för en stagad balk med initialutböjningen w_0 och olika fjäderstyvheter C där $C_{\text{E}} = 2N_{\text{E}}/a$.

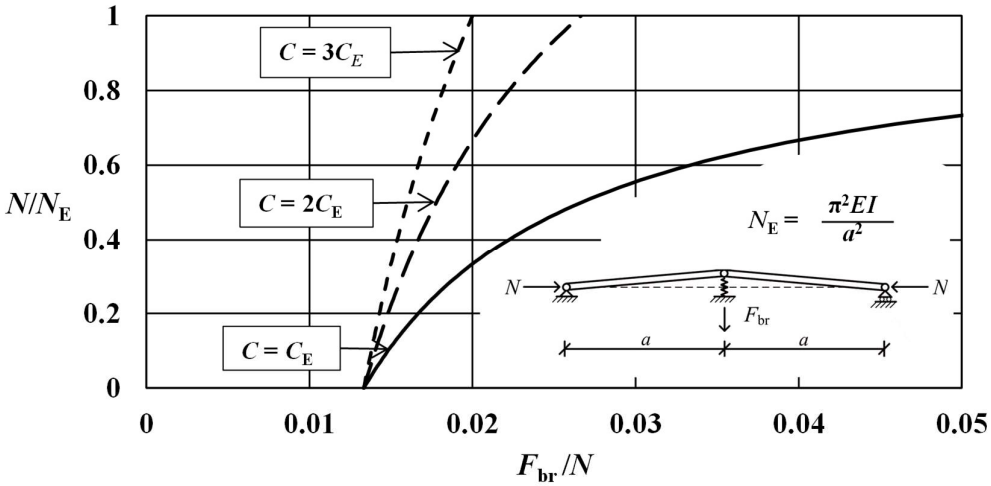
Kraften F_{br} som uppträder i stagningspunkten kan bestämas genom att sätta in w_{tot} från ekvation (A.9) i ekvation (A.6) vilket ger

$$F_{\text{br}} = \frac{2N}{a} \frac{w_0}{1 - \dfrac{N}{N_{\text{E}}}} \tag{A.10}$$

Av ekvationen framgår att stagningskraften F_{br} är proportionell mot initialutböjningen w_0 och går mot oändligheten då N går mot N_{E}. Ekvation (A.10) kan omformas så att

$$\frac{N}{N_{\text{E}}} = 1 - \frac{1}{\dfrac{F_{\text{br}}}{N}} \frac{2w_0}{a} \tag{A.11}$$

Detta samband visas i figur A.7 för en stagad balk av konstruktionsvirke med initialutböjningen $w_0 = 2a/300$. Om fjäderstyvheten $C = C_E$ och normalkraften utgör 74 % av knäckningskraften N_E så kommer stagningskraften F_{br} att uppgå till cirka 5 % av normalkraften N. Rimligare värden på stagningskraften erhålls om fjäderstyvheten tilldelas värdet $C = 2C_E$.



Figur A.7 Samband mellan normalkraften N och stagningskraften F_{br} för en stagad balk av konstruktionsvirke med initialutböjningen $w_0 = 2a/300$ och olika fjäderstyvheter C där $C_E = 2N_E/a$.

A.3 Tryckt balk på elastisk bädd

A.3.1 Bestämning av knäckningslast

I avsnitt A.2.1 behandlades knäckning av kontinuerlig balk upplagd på elastiskt eftergivliga upplag. Om de inre upplagen har samma elastiska styvhet och avståndet mellan dem är konstant och tillräckligt litet kan balkens verkningssätt beskrivas med en modell där de diskreta upplagen ersätts med en kontinuerlig fjädrande elastisk bädd. Om C är de diskreta upplagens fjäderkonstant och a är avståndet mellan upplagen kan den elastiska bäddens fjäderstyvhet eller bäddmodulen k uttryckas som

$$k = \frac{C}{a} \tag{A.12}$$

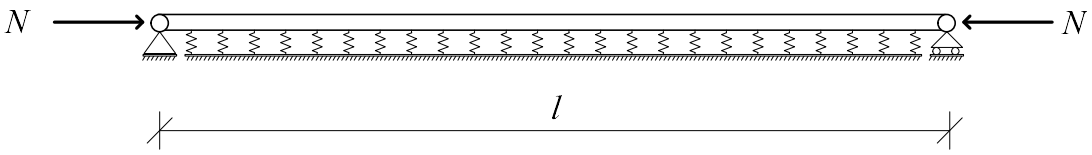
där k representerar fjäderstyvheten per längdenhet balk. En härledning av uttrycket för den kritiska knäckningskraften kan genomföras utgående från elastiska linjens ekvation enligt andra ordningens teori. Genom att införa beteckningen x för balkens längdkoordinat och w för balkens utböjning kan jämviktsvillkoret för ett utskuret balksegment på en elastiskt fjädrande bädd formuleras som

$$(EI(x)w'')'' + (N(x)w')' + k(x)w = q(x) \tag{A.13}$$

där de olika termerna svarar mot inverkan av böjmoment, normalkraft, elastisk bädd respektive yttre transversallast q. För en detaljerad härledning av ekvationen hänvisas till Runesson et al /A1/.

För en jämnstyv fritt upplagd balk, enligt figur A.8, vilande på en elastisk bädd med konstant bäddmodul k och belastad med konstant normalkraft N och utan transversallast q kan ekvationen förenklas till

$$EIw^{IV} + Nw'' + kw = 0 \tag{A.14}$$



Figur A.8 Fritt upplagd jämnstyv balk vilande på elastisk bädd med konstant bäddmodul och belastad med konstant normalkraft N.

Eftersom såväl nedböjningen som böjmomentet (krökningen) måste vara lika med noll i balkens båda ändar dvs. $w(0) = w(l) = 0$ och $w''(0) = w''(l) = 0$ inses att lösningen till differentialekvationen måste vara av formen

$$w(x) = A \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.15}$$

där m är ett heltal som svarar mot antalet halvvågor mellan de båda ändupplagen. Insättning av ekvation (A.15) i ekvation (A.14) ger att

$$\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{EI} + \frac{k}{EI}\right] A \sin\frac{m\pi x}{l} = 0 \tag{A.16}$$

Den enda inte triviala lösningen till ekvationen erhålls genom att sätta uttrycket inom parentesen lika med noll vilket ger den kritiska lasten

$$N_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(m^2 + \frac{kl^4}{m^2\pi^4 EI}\right) \tag{A.17}$$

Den kritiska lasten är en funktion av antalet halvvågor m och har ett minimivärde som kan beräknas genom att sätta partiella derivatan av N_{cr} med avseende på m lika med noll. Betecknas detta m-värde med $m_{\mathrm{cr,min}}$ erhålls

$$m_{\mathrm{cr,min}} = \frac{l}{\pi}\sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \tag{A.18}$$

Insättning av ekvation (A.18) i ekvation (A.17) ger den minsta kritiska lasten som

$$N_{\mathrm{cr,min}} = 2\sqrt{EIk} \tag{A.19}$$

De aktuella halvvågornas längd $l_{\mathrm{half,wave}}$ fås genom att dividera balkens längd l med antalet halvvågor $m_{\mathrm{cr,min}}$ dvs

$$l_{\mathrm{half,wave}} = \frac{l}{m_{cr,min}} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} \tag{A.20}$$

Genom att införa beteckningen l_{eff} för den tryckta balkens effektiva knäcklängd kan ekvation (A.19) formuleras under den alternativa formen

$$N_{\mathrm{cr,min}} = \frac{\pi^2 EI}{{l_{\mathrm{eff}}}^2} \tag{A.21}$$

vilket leder till att den effektiva knäcklängden kan uttryckas som

$$l_{\mathrm{eff}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{EI}{k}} \tag{A.22}$$

Notera att $l_{\mathrm{eff}} = l_{half,vave}/\sqrt{2}$ vilket förklaras av att den elastiska bädden stagar upp balkdelen i förhållande till om den vore helt fri mellan inflexionspunkterna (momentnollpunkterna).

Notera även att ekvation (A.18) ger m-värden som inte är heltal och att det därför inte är helt korrekt att direkt använda dessa värden i ekvation (A.17). Eftersom den kritiska lasten bestäms utgående från att lasten har ett minimum påverkas lastnivån ofta endast marginellt av m-värdet. Om $m_{\mathrm{cr,min}}$ är mindre än 5 rekommenderas att kontrollera vilket heltalsvärde som ger lägst kritisk last.

En central fråga är hur tätt stagningspunkterna måste vara placerade för att elastisk bäddmodellen ska ge en rimlig noggrannhet. I /A2/ rekommenderas att minst 3 stagningspunkter ska finnas på en halvvåg. En parameterstudie med FE-model /A3/ indikerar att antalet stagningspunkter per halvvåg kan vara så lågt som 2 utan att avvikelsen blir av väsentlig betydelse.

A.3.2 Inverkan av initialkrokighet

I praktiken har varje balk en viss initialkrokighet w_0 och förutsätts i detta skede vara helt fri med avseende på yttre påverkan. I samband med att balken påförs

last uppstår tillskottsdeformationer *w*. Följaktligen modifieras ekvation (A.13) till

$$(EI(x)w'')'' + (N(x)(w_0 + w)')' + k(x)w = q(x) \tag{A.23}$$

För en jämnstyv fritt upplagd balk vilande på en elastisk bädd med konstant bäddmodul *k* och belastad med konstant normalkraft *N* och utan transversallast *q* förenklas ekvation (A.23) till

$$EIw^{IV} + N(w_0 + w)'' + kw = 0 \tag{A.24}$$

Antag att balken har en sinusformad initialkrokighet w_0 så att

$$w_0(x) = e_0 \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.25}$$

där

$$e_0 = \frac{l}{m\varepsilon} \tag{A.26}$$

För konstruktionsvirke brukar ε tilldelas värdet 300 så att initialkrokigheten utgör 1/300 av halvvågens längd l/m. För limträ används $\varepsilon = 500$. Notera att den antagna initialkrokigheten har samma form som motsvarande moder vid knäckningsberäkningen i avsnitt A.3.1. En lösning till differentialekvationen måste därför vara

$$w(x) = A \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.27}$$

där A anger amplituden på tillskottsutböjningen. Insättning av ekvationerna (A.25) och (A.27) i ekvation (A.24) ger

$$\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{EI} + \frac{k}{EI}\right] A \sin\frac{m\pi x}{l} = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{N}{EI}\, e_0 \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{A.28}$$

Genom att lösa ut *A* ur ekvation (A.28) och införa beteckningen α där

$$\alpha = \frac{N}{N_{\mathrm{cr}}} = \frac{N}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(m^2 + \frac{kl^4}{m^2\pi^4 EI}\right)} \tag{A.29}$$

kan tillskottsutböjningen $w(x)$ uttryckas som

$$w(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, w_0(x) \tag{A.30}$$

Genom att addera initialutböjningen $w_0(x)$ och tillskottsutböjningen $w(x)$ erhålls den totala utböjningen $w_{tot}(x)$ som

$$w_{\text{tot}}(x) = \frac{1}{1-\alpha}\, w_0(x) \tag{A.31}$$

Ekvationerna (A.30) och (A.31) kan tillämpas även för balkar som inte befinner sig på en elastisk bädd genom att sätta $k = 0$ i ekvation (A.29). Notera att ekvation (A.31) är av samma form som ekvation (A.9) i avsnitt A.2.2.

Referenser

/A1/ Runesson, K., Samuelsson, A., Wiberg, N.E. (1992). Byggnadsmekanik Knäckning. Studentlitteratur, Lund.

/A2/ Timoshenko, S.P., Gere, J.M. (1961). Theory of elastic stability (second edition). McGraw-Hill Book Company, (international student edition) Kogakusha Company, Tokyo.

/A3/ Ormarsson, S., Vessby, J., Källsner, B., Filchev, I.: Numerical analysis of failure modes and force distribution in a pitched roof structure of wood. 14th World Conference on Timber Engineering, Vienna, Austria, August 22-25, 2016.

Linnéuniversitetet
Kalmar Växjö

Fakulteten för teknik
391 82 Kalmar | 351 95 Växjö
Tel 0772-28 80 00
teknik@lnu.se
Lnu.se/fakulteten-for-teknik