School of Mathematics and Systems Engineering

Reports from MSI - Rapporter från MSI

Hur finner vi elever med fallenhet i matematik?

– En fallstudie, i år 8, om hur vi kan finna elever med matematisk fallenhet

Britt Grant
Johanna Håkansson

Feb
2006

MSI
Växjö University
SE-351 95 VÄXJÖ

Report 06015
ISSN 1650-2647
ISRN VXU/MSI/MDI/E/--06015/--SE

Växjö universitet

Examensarbete 10 poäng
i Lärarutbildningen
Höstterminen 2005

ABSTRAKT

Britt Grant och Johanna Håkansson

Hur finner vi elever med fallenhet i matematik?

- En fallstudie, i år 8, om hur vi kan finna elever med matematisk fallenhet

How do we find pupils with mathematical gifts?

- A case study, in year 8, of how we can find pupils with mathematical gifts

Antal sidor: 45

Detta examensarbete behandlar en undersökning om hur vi kan finna elever med fallenhet i matematik. Syftet är att upptäcka elever med matematisk fallenhet. För att se vad matematisk fallenhet är använde vi oss av de förmågor den ryske psykologen Krutetskii kom fram till i sin studie av barn och ungdomar. I bakgrunden presenteras olika syn på begåvning och även myter som existerar kring detta. Vidare lyfts det fram att begåvade barn behöver stöd och hur deras situation kan vara i skolan. Det ges även en inblick i Krutetskiis undersökning som ligger till grund för den analys som görs av elevernas lösningsförslag. Metodavsnittet behandlar det matematiska problem som eleverna har arbetat med i undersökningen samt genomförandet av den. Det presenteras även tre olika strategier för hur problemet kan lösas. I resultatet lyfts två elever fram och deras resultat presenteras och analyseras, bland annat redovisas hur dessa elever når ett generellt uttryck på två olika sätt. Slutsatsen är att de båda eleverna, med utgångspunkt i våra analysredskap, är elever med fallenhet för matematik.

Sökord: matematisk fallenhet, Krutetskii, förmågor, begåvning

Postadress	Gatuadress	Telefon
Växjö universitet	Universitetsplatsen	0470-70 80 00
351 95 Växjö		

Innehållsförteckning

1. Inledning

Detta arbete handlar om elever med fallenhet för matematik. Vi har valt att skriva om detta område på grund av ett flertal olika faktorer. En av oss hade redan tidigare ett uttalat intresse för hur matematisk begåvning kan definieras och hur den kan tas tillvara, detta då ett av hennes barn har haft ett intresse och en stor förmåga för matematik redan i tidig ålder. Hennes upplevelse är att denna förmåga inte har tagits vara på fullt ut inom skolan. Då började funderingarna kring hur vi som lärare ska kunna upptäcka och utveckla elever med fallenhet för matematik. När kursen ”Stöd och utveckling av matematisk förmåga” började ges var den därför ett naturligt val.

Under ovan nämnda kurs utvecklade den andra av oss också ett stort intresse för hur vi lärare ska kunna upptäcka och ta vara på elever som visar på en stor begåvning inom matematiken. Det är viktigt att ha insikt i och kunskap om elever med fallenhet i ett ämne och inte bara de som har svårigheter. Vi kommer i vår framtida yrkesutövning att stöta på barn med fallenhet i matematik och det kan då vara bra att veta vilket förhållningssätt vi har och hur vi kan hjälpa dem att fortsätta utvecklas.

En annan anledning till att vi finner dessa elever intressanta är att det i TIMMS-rapporten (Skolverket 2004) rapporteras om en nedgång hos svenska elever vad gäller matematikkunskaper. Det framgår även att nedgången är aningen större för de duktiga eleverna jämfört med de övriga. Anledningar till varför detta resultat kan påvisas kan vi inte sia om. Resultatet ger oss dock en stor vilja att finna dessa elever med fallenhet för matematik, för att kunna stödja dem i deras utveckling.

Det pågår för tillfället en diskussion i tidskriften Nämnaren angående elever med matematisk förmåga. Arne Engström lyfter i sin artikel ”Matematikbegåvningarnas revansch?” (*Nämnaren* 2005, nr 2:19-21) fram ett av Matematikdelegationens betänkande, som handlar om att elever med särskild fallenhet för matematik ska ges möjlighet att fördjupa och bredda sina kunskaper genom att ges särskilda utmaningar. Vidare tar Inger Wistedt i sin artikel ”En förändrad syn på matematikbegåvningar?”

(*Nämnaren* 2005, nr 3:53-55) upp Europarådets rekommendation att ge även barn med matematisk fallenhet särskilt stöd. Därför anser vi att vi som lärare behöver olika redskap för att finna dessa elever och kunskaper om vilka de är. Detta för att så tidigt som möjligt kunna ge dem möjlighet att utveckla sin talang och begåvning.

Det existerar olika myter angående dessa barn (Winner 1999). En av dessa är att elever med fallenhet för matematik är en självgående grupp, som självständigt kan räkna sig igenom matematikboken. En annan är att dessa elever är snabba i tanken och löser uppgifter i hög hastighet. Vi anser emellertid att matematiska förmågor måste sökas enligt andra kriterier än de som ryms under dessa myter om begåvningar. Vi ser det som en utmaning att försöka finna dessa elever.

Vi anser att det borde ligga i samhällets intresse att ta vara på den resurs som de begåvade barnen utgör. I det moderna samhället skrider teknologin snabbt framåt och det krävs gedigna kunskaper för att kunna finna nya lösningar på olika problem. Det känns då som ett naturligt alternativ att låta även de begåvade eleverna få utmaningar och möjlighet att utvecklas maximalt, så att vi tar vara på den extra resurs som dessa elever kan utgöra. För att kunna ta vara på dessa barn och ungdomar, som även de är elever i behov av särskilt stöd, behöver vi hitta metoder att finna dem så tidigt som möjligt i vår undervisning, detta för att möjliggöra en så bra undervisningssituation, som möjligt för dem, med utmaningar och stimulerande arbetsuppgifter.

2. Syfte

Vi vill genom en studie på fältet undersöka om vi, inom en skolklass, kan upptäcka elever med matematisk fallenhet. Men hur vet vi vad matematisk fallenhet är och hur känner vi igen den? Genom att låta eleverna arbeta i grupp med ett rikt problem vill vi se om:

- elever har förmågan att se en meningsfull matematisk struktur
  - eleverna kan se vad som är problemets kärna

- elever har förmågan att bearbeta matematisk information
  - eleverna har ett logiskt tänkande vad gäller siffror och bokstäver
  - eleverna har ett flexibelt tänkande och kan se samband så att de kan byta infallsvinkel på problemet
  - eleverna kan förkorta ett matematiskt resonemang samt har en strävan efter klarhet, enkelhet och rationalitet i lösningarna
  - eleverna kan generalisera ett matematiskt material

2.1 Avgränsningar

Vi är väl medvetna om att detta är en liten undersökning då den bara kommer att ske i två klasser på två olika skolor i Småland. Vårt fokus ligger, i detta arbete, på att hitta elever med fallenhet i matematik och inte på hur man senare ska gå vidare och arbeta med dem.

Matematisk förmåga utvecklas över tid och kan vara olika inom olika områden. Då vi bara går in och gör ett nedslag i de olika gruppernas matematikundervisning kommer resultatet bara att visa elevernas förmåga inom just det moment som vår undersökning kommer att beröra och vid en speciell tidpunkt.

3. Teoretisk bakgrund

3.1 Begåvade barn

Begåvning är ett vitt begrepp som innefattar ett flertal olika sorters förmågor inom olika områden. Mycket av den litteratur som finns behandlar begåvning generellt medan det finns ytterst lite som enbart behandlar matematisk fallenhet. Vi har därför valt att utgå från den bredare beskrivning som finns av begåvning, för att sedan plocka ut det som är relevant för vårt arbete inom matematiken.

3.1.1 Hur ser vi på begåvning?

Inom vissa områden är det mer socialt accepterat att ha stora förmågor, exempelvis får duktiga idrottare stor medial uppmärksamhet och en bred acceptans av sitt kunnande av samhället. Även inom skolan är det socialt accepterat att vara duktig inom idrott. Däremot kan det vara betydligt mer komplext om någon besitter en stor teoretisk förmåga inom exempelvis matematik. Det kan bli en svår situation för dessa elever om de råkar ut för kamraters avundsjuka. Dessutom kan de råka ut för lärare som blir provocerade av elevernas komplicerade frågor och deras eventuella ifrågasättande av undervisningen (Wahlström 1995:43 - 44).

Peter Young och Colin Tyre skriver i sin bok *Gifted or Able?* (1992:44) att vi har lättare för att uppskatta underbarn om vi tror att de har haft turen att få gåvan till skänks, än om vi tror att det inte finns begåvning och att barnens utveckling har påskyndats av deras föräldrars påtryckningar.

Det har även visat sig bli häftiga reaktioner när de begåvade barnen och deras situation lyfts fram. Journalister har ställt sig frågande till att det satsas resurser på de barn som har fallenhet inom matematiken (Wistedt 2005). Kan det vara så att de tror att dessa resurser skall tas från de svaga? Eller anses elever med matematisk fallenhet vara en självgående grupp? Även Ellen Winner tar i sin bok *Begåvade barn* (1999:14) upp att forskning om begåvade elever är ett känsligt ämne med en politisk laddning. Denna forskning anses ofta vara omdömeslös och elitistisk.

Roland S. Persson, som skrivit det svenska förordet till Ellen Winners bok, anser att begreppet begåvad har blivit urvattnat då, enligt honom, många svenska pedagoger kopplar samman det med att alla har en förmåga att lära. Om vi även låter ordet beteckna nivån på inlärningsförmågan kommer det med all sannolikhet innebära problem.
Winner (1999:14–15) använder sig emellertid av termen särbegåvning vilken hon kopplar till följande karakteristika:

- Brådmogenhet: gör snabbare och tidigare framsteg inom ett organiserat kunskapsområde än vad normalbegåvade barn gör. Detta då lärandet inom det specifika området går lätt för dem.
- Envisas med att gå i sin egen takt: lär sig på ett kvalitativt annorlunda sätt där de upptäckter de gör inom ett område motiverar dem att gå vidare till nästa steg. Ofta finner dessa barn nya sätt att lösa problem och visar då prov på kreativitet.
- En rasande iver att behärska ett kunskapsområde: har ett intensivt intresse för ett område vilket ger dem en stor motivation att behärska det. Har förmåga att fokusera och upplever tillstånd av ”flow”, det vill säga ett tillstånd där de blir totalt absorberade av det de gör.

3.1.2 Myter

Det finns många olika myter om begåvade barn och deras personlighet. Då vi här utgår från Winner använder vi oss av termen särbegåvning för att nedan lyfta fram de olika myter Winner (1999:260–265) presenterar. Hon försöker även att illustrera hur det ser ut i verkligheten.

- Generell särbegåvning: myten säger att de särbegåvade barnen har en generell förmåga vilken leder till att de presterar bra inom alla skolämnen. Emellertid visar det sig i verkligheten att detta hör till undantagen och de ojämna profilerna är betydligt vanligare. Elever med ojämn profil har ett starkt område men behöver för den skull inte höja sig över mängden i andra ämnen. Det kan till och med vara så att de har inlärningssvårigheter inom något område.
- Talangfull men inte särbegåvad: myten säger att barn med begåvning inom estetiska ämnen är talangfulla, medan de som är begåvade inom ett teoretiskt område kallas för särbegåvade. Det finns inget berättigande i att skilja på dessa två grupper, eftersom barnen visar samma karakteristiska drag så som brådmogenhet och drivkraft.
- Exceptionellt IQ: myten säger att särbegåvning beror, oberoende av område, på ett högt IQ. I verkligheten är det dock så att barn kan vara särbegåvade exempelvis inom de estetiska områdena utan att ha exceptionellt högt IQ.

- Arv kontra miljö: det finns två olika myter här varav den ena, som är ”den folkliga psykologins” myt, säger att särbegåvningen är helt medfödd, medan det i den andra myten, som är psykologernas, endast anses vara en fråga om hårt arbete. Verkligheten ligger förmodligen någonstans där emellan. Oavsett hur tidigt och hur mycket ett icke särbegåvat barn övar kommer det inte att uppnå samma nivå som ett barn med särbegåvning. Detta innebär dock inte att hårt arbete är oväsentligt för utveckling av förmåga.
- Den pådrivande föräldern: myten säger att särbegåvade barn har drivande och väldigt ambitiösa föräldrar som driver sina barn att bli högpresterande. En förälder kan emellertid inte skapa en särbegåvning genom att vara överambitiös. Det är ofta barnet som är den drivande genom sitt behov av en stimulerande miljö. Det har emellertid visat sig att det krävs en stödjande förälder (eller annan vuxen) bakom barnet för att det ska utvecklas maximalt.
- Att utstråla psykologiskt välbefinnande: myten säger att särbegåvade barn är mer välanpassade, lyckliga och populära än vad barn i genomsnitt är. I verkligheten kan dessa barn komma att betraktas som udda om de inte har några gemensamma intressen med sina jämnåriga kamrater.
- Alla barn är (sär-) begåvade: Om myten vore sann skulle det innebära att det inte finns några elever som behöver berikad undervisning. I verkligheten är det dock så att barn har olika starka förmågor inom olika områden. När ett barn har en väldigt stor förmåga inom ett visst område skapar det ett särskilt pedagogiskt behov, precis som det gör med de barn som har svaga förmågor.
- Särbegåvade barn blir framstående som vuxna: myten säger att de särbegåvade barnen utvecklas till att bli kreativa nyskapare som vuxna. I verkligheten kan dessa barn bli väldigt duktiga yrkesmän inom sitt område, men det behöver för den skull inte betyda att de upptäcker något nytt eller förändrar området. Det finns självklart de som omformar sitt område, även om det inte hör till vanligheten. Det händer även att särbegåvade barn helt byter område och inte, som vuxna, vill befatta sig med det område, inom vilket de var så framgångsrika som unga.

3.1.3 Även begåvningar behöver stöd

I sin bok *Developing talent in young people* skriver Benjamin S. Bloom (1985:270-347) om den fyraåriga studie som gjordes av forskare under hans ledning. Forskarna har genom intervjuer undersökt hur olika individer i toppskiktet inom utvalda områden har fått hjälp att utveckla sin kapacitet till fullo. Gemensamt för de matematiker som ingick i studien var att alla hade välutbildade föräldrar, vilka ansåg att det var viktigt med utbildning. De satte emellertid aldrig någon press på sina barn eller tvingade på dem sina egna intressen. Däremot lärde de dem vikten av att alltid göra ett gott jobb oberoende av vad de sysslade med. Dessutom försåg föräldrarna barnen med nödvändigt material och var alltid villiga att diskutera barnens frågor med dem. I de fall de saknade tillräckliga kunskaper lärde de barnen hur de själva kunde söka rätt på information. Även Winner (1999:161–162) framhåller vikten av berikande miljöer samt att föräldrarna har en positiv inställning till högre utbildning, för att elever med särskilda förmågor ska kunna utvecklas till fullo.

Ytterligare något som var gemensamt för Blooms matematiker var frånvaron av intresseväckande matematik under grund- och gymnasieskolan. De fick ofta känslan av att de själva behärskade matematiken bättre än sina lärare. Ofta blev dessa elever hänvisade till egenstudier när deras lärare hade upptäckt deras förmåga, men inte själva kunde undervisa på den nivån (Winner 1999:211). Det var först när dessa elever påbörjade sina collegestudier som skolsystemet kunde stimulera dem. Detta var första gången dessa elever upplevde att de var tillsammans med likasinnade och de fick förebilder inom matematiken.

3.1.4 Skolan och begåvade barn

I Lpo 94 står att ”undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov” (Skolverket 2001:20). Det står lite längre ned på samma sida att ”hänsyn skall tas till elevernas olika förutsättningar och behov”. Dessa meningar för ofta tankarna till de barn som har specifika svårigheter i skolarbetet. Men de barn som har fallenhet inom ett ämne har lika stor rätt att få sina behov tillgodosedda. Detta ställer oerhört höga krav på att de lärare som finns i skolan ska kunna individualisera undervisningen.

Inom skolan finns elever som är underpresterande, det vill säga att det de presterar inte står i proportion till elevens potentiella förmåga. Enligt Winner (1999:209) har underprestation sin grund i för låga krav, något som antagligen berör de flesta elever. Hon menar emellertid att glappet mellan potential och prestation är större hos barn med fallenhet inom något eller några områden. Dessutom finns det en risk att det hos dessa elever grundläggs en dålig studieteknik, vilket både Winner (1999:210) och Wahlström (1995:41) tar upp. Om arbetet tidigare gått enkelt och eleven på grund av för låga krav och förväntningar inte har tvingats anstränga sig, kan det i ett senare skede bli problem. När skolarbetet blir mer krävande kan det innebära att elever ger upp då de inte har övat sig i uthållighet. Ytterligare en situation som kan uppstå vid bristen på utmaningar är att eleven blir uttråkad, frustrerad och eventuellt lägger sin energi på att störa, vilket Young och Tyre (1992:116) nämner.

3.2 Krutetskiis undersökning

Krutetskii, en rysk psykolog, undersökte under åren 1955–1966 olika barns matematiska förmågor. Hans forskning handlar inte om hur de matematiska förmågorna ska utvecklas, utan om hur de kan identifieras (Moldenius 2003:20). Kruteskii är kritisk till användningen av IQ-test när barns fallenhet för matematik undersökts. Han är mer intresserad av barnens tankar i en problemlösningsprocess och menar att dessa inte kan följas vid analyserandet av resultatet vid ett IQ-test.

3.2.1 Förmåga och färdighet

Krutetskii använder sig av begreppet förmåga, som enligt hans beskrivning består av motivation, intresse och stimulans. Han menar vidare att förmågan inte är något medfött och färdigutvecklat, utan att den utvecklas genom övning, aktivitet och erfarenhet. Det går dock inte att förutse hur långt en förmåga går att utveckla (Moldenius 2003:21). Det som är viktigt är att hitta barnens förmågor och utveckla dem så långt det går. Det är även viktigt att eleverna förstår hur betydelsefull processen är under arbetes gång. Detta så att eleverna inte ska tro att det bara är resultatet som räknas, utan kan se att det är processen fram till resultatet som utvecklar deras förmåga.

Krutetskii skiljer i sin studie på förmåga och färdighet. Dessa är lika såtillvida att de genom olika aktiviteter utvecklas genom livet. Men han menar att när förmågan analyseras så är det personen som studeras och när färdigheten analyseras är det en aktivitet som studeras. ”Förmågor är inte färdigheter utan de är en persons psykologiska egenskaper som är avgörande för hur lätt man lär sig att bli skicklig i en aktivitet” (Moldenius 2003:22). Enligt detta synsätt är det en färdighet att utifrån ett problem ställa upp en ekvation medan det är en förmåga att kunna se en generaliserbar lösningsmetod.

I den studie Krutetskii gjorde, som baseras på intervjuer av 200 elever (6-17 år gamla), fick eleverna ”tänka högt” under processens gång, när de löste många olika problem.
Krutetskii menar att för att kunna se vad matematisk begåvning är, är det inte bara viktigt att se vilka förmågor de elever med matematisk fallenhet har utan även vilka förmågor som är svagt utvecklade hos de övriga eleverna och som gör att de har en begränsad matematisk förmåga. I studien var eleverna uppdelade i grupper på olika nivåer: duktiga, medelmåttiga och svaga elever (Krutetskii 1976:176-177). Uppdelningen gjordes enligt följande:

- I gruppen med duktiga elever placerades de elever som snabbt och lätt bemästrade matematiskt material och skaffade sig en skicklighet i att utföra matematiska operationer och som tänkte självständigt och förhållandevis kreativt vid mötet med nytt material. De kom även upp med originella lösningar på problem som inte var av standardtyp.
- I gruppen medelmåttiga placerades de elever för vilka ett framgångsrikt arbete i matematiken, jämfört med de duktiga eleverna, krävde stor ansträngning och mycket tid. Dessa elever hade svårigheter att lösa problem av en typ som de inte hade stött på tidigare. Men när de behärskade metoderna kunde de lösa liknande uppgifter. Deras kunskap var mer imiterande än kreativ.

- De svaga eleverna delades i två undergrupper. Den ena gruppen bestod av elever som verkligen försökte och som arbetade flitigt, men som ändå inte erhöll någon speciell framgång inom matematik, trots att de var duktiga i andra ämnen. Den andra gruppen bestod av elever som hade svårigheter att förstå lärarens förklaringar (extra lektioner behövdes ofta) och som inte kunde lösa problem, som gick utanför den nivå de hade uppnått. Deras matematiska vana var formad av svårigheter och behovet av mycket övning. Deras kunskaper var osäkra och föll lätt sönder på grund av frånvaron av övning.

3.2.2 Krutetskiis definition av matematiska förmågor

Under sina studier av de duktiga eleverna kom Krutetskii (1976:350–351) fram till att dessa elever hade ett antal förmågor som inte förekommer i lika hög grad hos de andra eleverna. Här nedan presenterar vi de förmågor Krutetskii kom fram till gällande de duktiga eleverna:

1. Erhålla matematisk information
   - A. Förmågan att kunna få en formaliserad uppfattning av matematiskt material för att kunna fånga den formella strukturen i ett matematiskt problem.
2. Bearbeta matematisk information
   - A. Förmågan till ett logiskt tänkande vad gäller spatiala relationer, siffror och bokstavssymboler, en förmåga att tänka i matematiska symboler.
   - B. En förmåga till en snabb och bred generalisering av matematiska objekt, relationer och operationer.
   - C. Förmågan att förkorta ett matematiskt resonemang samt de matematiska operationer som står i förbindelse med varandra, en förmåga att tänka i en avkortad struktur.
   - D. Flexibilitet i den mentala processen vid matematisk aktivitet.
   - E. En strävan efter klarhet, enkelhet och rationalitet i lösningarna.
   - F. Förmågan att snabbt och lätt se samband i båda riktningar så till vida att de kan skifta från ett tankesätt till det rakt motsatta.

3. Bibehålla matematisk information
    A. Matematiskt minne: generaliserat minne för matematiska relationer, system för argument och bevis, metoder för problemlösning och principer för hur de skall närma sig matematiska problem.
4. Generell syntetisk komponent
    A. Matematiskt sinnelag

Krutetskii (1976:351) kom även fram till att det fanns vissa komponenter, i ovan nämnda förmågor, vilkas närvaro inte är nödvändig även om de är användbara. Han förklarar det med att dessa komponenter är neutrala med avseende på matematisk förmåga. Dessa komponenter är:

1. Hastigheten hos den mentala processen som ett kännetecken. Det individuella tempot under arbetets gång har ingen avgörande betydelse. Matematikern kan reflektera försiktigt, även långsamt, men väldigt grundligt och djupsinnigt.
2. Förmågan att snabbt och exakt utföra beräkningar, ofta i huvudet. Det har visat sig att det finns personer som är kapabla att utföra svåra matematiska beräkningar i huvudet, men som ändå är oförmögna att lösa ett komplext problem. Motsatsen har även visat sig. Exempelvis skrev den framstående franske matematikern Poincaré att han inte ens kunde addera utan att göra misstag.
3. Minne för symboler, siffror och formler. Det har visat sig att många eminenta matematiker inte har ett framträdande minne vad gäller detta.
4. En förmåga för ett spatialt tänkande, det vill säga rumsuppfattning.
5. En förmåga att visualisera abstrakta matematiska relationer och samband.

Krutetskii poängterar att då denna undersökning är gjord på elever i åldern 6 - 17 år kan resultatet inte appliceras på någon annan åldersgrupp utan vidare forskning i ämnet.

3.2.3 Olika strukturer i tänkandet

I sin studie ser Krutetskii (1976:313–329) skillnader hos eleverna med avseende på hur de löser problemen. Han kommer fram till att det hos några finns en starkare verbal-logisk komponent, medan det hos andra är en visuell komponent som dominerar. Utifrån detta kom Krutetskii fram till tre olika strukturer för ett matematiskt tänkande:

- Den analytiska typen: Elever tillhörande denna grupp har en framträdande verbal-logisk komponent. De är framgångsrika vid arbete med abstrakta problem och försöker så långt det är möjligt att översätta en konkret, visuell form till en abstrakt.
- Den geometriska typen: Elever inom denna grupp har en väl utvecklad visuell komponent och vill gärna visualisera abstrakta matematiska förhållanden, även i de fall då en visualisering försvårar problemet.
- Den harmoniska typen: Majoriteten av eleverna med matematisk fallenhet befinner sig inom denna grupp. Här är både den verbal-logiska och den visuella komponenten väl utvecklade, dock är den första något mer framträdande. De kan därför växla mellan ett abstrakt och ett geometriskt tankesätt och ser vilken strategi som lämpar sig vid problemlösning.

Krutetskii menar att det finns ett visst samband mellan den analytiska typen och framgångar inom algebran samt mellan den geometriska typen och framgångar inom geometri. Han menar dock att detta inte kan hårdras till att gälla dessa som rena skolämnen. En analytisk typ kan visa sig inom geometrin liksom en gemometrisk typ kan visa sig inom algebran.

4. Metod

Då vårt mål med undersökningen är att se om vi kan finna elever med matematisk fallenhet innebär det att vi går in på djupet i ett fåtal fall. Därför blev det naturligt för oss att välja fallstudie, som undersökningsmetod.

4.1 Fallstudie

En vanlig förekommande anledning till fallstudie, som metodikval, är att det sammanhang som ska studeras är komplext. Detta anser vi gäller vår undersökning då de analysredskap som vi använder, i form av de förmågor Krutetskii beskriver, innebär att vi söker en mångfald matematiska förmågor. Dessa förmågor visar sig i en matematisk aktivitet och därför måste vår undersökning utföras under tiden denna utövas och en fallstudie innebär att det är konkreta fall som studeras (Wallén 1996: 115–119).

Vad gäller fallstudier behöver dessa inte leda till att forskaren själv medverkar i en förändring. Däremot kan forskningen medföra att funderingar väcks över hur olika verksamheter kan bedrivas och resultaten kan därmed leda till förändringar. Genom de studerade fallen kan det påvisas att en viss företeelse existerar. Emellertid går det ej att säga hur vanligt förekommande denna företeelse är, ej heller huruvida liknande företeelser har förutsättningar att uppkomma i andra sammanhang (Wallén 1996:115–118).

4.2 Rika problem

Vi valde att använda oss av något som kallas för rika problem när vi skulle genomföra vår undersökning (Hagland, Hedrén & Taflin). Vi letar efter elever med fallenhet i matematik och för att finna dessa använder vi oss av de förmågor, som Krutetskii har definierat (se ovan). Dessa förmågor visar sig i en matematisk aktivitet, vilken exempelvis uppnås vid problemlösning. Vad är då ett problem? Hagland *et al.* har skrivit en bok som heter *Rika matematiska problem* och de definierar ett problem på följande sätt:

> Problem är en speciell typ av uppgift som
>
> (1) en person vill eller behöver lösa.
>
> (2) personen ifråga inte har en på förhand given procedur för att lösa och
>
> (3) det krävs en ansträngning av henne eller honom att lösa.
>
> (Hagland *et al*. 2005:27)

Men för att ett problem ska vara rikt räcker det inte med ovanstående kriterier utan författarna ställer upp ytterligare sju kriterier (Hagland *et al.* 2005:28–29). Problemet ska:

- leda in på viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
- vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
- upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
- kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
- kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas olika lösningar, en diskussion som visar olika strategier, representationer och matematiska idéer.
- kunna fungera som en brobyggare mellan olika matematiska områden.
- kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Ett rikt problem kan med fördel användas i heterogena grupper. De är nämligen uppbyggda så att svårigheten stegras undan för undan. På så vis kan alla elever i gruppen arbeta med problemet, men de kommer att nå olika långt på grund av att de har olika förmågor och kunskaper. Hagland *et al*. presenterar i sin bok olika idéer om hur arbetet med rika problem kan läggas upp. Vi har här valt att utgå från delar av detta så som att arbetet med ett rikt problem kan utföras i grupp. Eleverna börjar dock arbetet med problemet enskilt, för att få en känsla för problemställningen. Dessutom medför det att de har tankar med sig in i gruppdiskussionen som sedan följer (Hagland *et al.* 2005:59). När eleverna har jobbat enskilt en stund delas de in i grupper. Det är nu viktigt att alla elever får komma till tals och berätta hur de har börjat lösa problemet. Under gruppdiskussionen är tanken att eleverna med utgångspunkt ifrån sina egna tankar och anteckningar gemensamt ska diskutera sig fram till en lösning för gruppen. Det är viktigt att den gemensamma lösningen även redovisas skriftligt.

I vanliga fall avslutas det rika problemet, enligt Hagland et al., med en diskussion i klassrummet där grupperna får berätta om vilka strategier de har använt sig av för att lösa de olika deluppgifterna i problemet. Klassrumsdiskussionen kan även öppna för nya matematiskt intressanta infallsvinklar. Vi har i vår undersökning valt att bortse från denna senare del av arbetet med ett rikt problem, detta då arbetsbelastningen och omfattningen av examensarbetet annars hade blivit alltför stor.

4.3 Genomförande och bearbetning

Undersökningen har utförts på två olika skolor. Gemensamt för de båda är att de befinner sig i ett ytterområde till den småstad de ligger i. Den ena skolan, som är en 6–9 skola, har ca 550 elever medan den andra, som är en 7–9 skola, har ca 350 elever. På den större skolan genomfördes undersökningen i en heterogen grupp. På den mindre skolan är eleverna uppdelade i nivågrupperade undervisningsgrupper, som eleven själv har valt. Undersökningen utfördes här i en grupp som anses vara stark. Utöver elever från denna grupp tillkom två elever från en så kallad mellangrupp. Undersökningen genomfördes med elever i år 8. Sammanlagt deltog 23 elever i undersökningen. De var uppdelade i grupper om tre i varje, utom en grupp som bestod av två elever.

Innan vi kom till skolan skickades en förfrågan, om eleverna fick delta i undersökningen, till eleverna och deras vårdnadshavare (se bilaga 1). Självklart var deltagandet frivilligt och vi använde oss i vår undersökning av de elever som var intresserade av att medverka och vars vårdnadshavare givit sitt medgivande. Undersökningstillfället inleddes med att vi gick igenom vissa formaliteter, exempelvis tekniska detaljer som hur bandspelaren fungerar och hur undersökningen skulle genomföras. Dessutom fick eleverna hitta på en pseudonym så att de senare inte ska kunna identifieras.

Eleverna fick först arbeta enskilt med problemet, i ca 10 minuter. Deras tankar och påbörjade lösningsförslag fick de skriva ner på ett papper. Därefter bröts arbetet och eleverna delades in i, på förhand bestämda grupper. Dessa var sammansatta av deras matematiklärare. Det önskemål vi framförde till läraren inför gruppindelningen var att eleverna skulle fungera bra tillsammans inom grupperna. Grupperna placerades sedan ut i olika klassrum och utrustades med bandspelare samt ett nytt papper där deras gemensamma lösning skulle dokumenteras. Det första eleverna skulle göra när bandspelaren startade var att presentera sig med sin pseudonym, detta för att vi enklare skulle kunna skilja de olika rösterna åt och för att veta vem som var vem vid transkriberingen. När eleverna i de olika grupperna ansåg att de inte kunde komma längre i problemlösingen, lämnade de över materialet till oss.

Då vi på grund av schemat bara hade tillgång till eleverna under en lektion medförde det att grupperna var tvungna att utföra problemlösningen samtidigt. Detta innebar att vi inte hade möjlighet att närvara som observatörer i alla grupper. Därför valde vi att låta eleverna utföra uppgiften på egen hand utan observatörer.

När allt material var insamlat påbörjade vi bearbetningen genom att titta på elevernas skriftliga lösningar. Därefter utfördes en transkribering av samtalen. När den var slutförd övergick vi till att analysera transkriberingarna och elevlösningarna, både gruppens och de enskilda, parallellt. Det för att kunna härleda vilka tankar som ledde arbetet framåt och vem som stod för dem. Efter detta började vi med hjälp av de transkriberade samtalen och elevlösningarna att leta efter de förmågor Krutetskii kommit fram till. Vi valde sedan ut de två elever som visade på flest av dessa och genomförde en djupare analys av deras samtal och skriftliga lösningar.

4.3.1 Problemställningen: Tornet

Det problem vi valde att använda i undersökningen har vi valt i samråd med vår handledare. Detta problem återfinns i boken *Rika matematiska problem,* som nämns ovan. I boken ser problemet ut och beskrivs enligt följande:

a) Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?
b) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?
c) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är *n* kuber högt?
d) Hitta på ett eget liknade problem. Lös det.

Bild 1

> Problemet handlar om en tredimensionell figur, ett torn, som byggs av små kuber. Tornet växer på ett bestämt sätt våning för våning. Totala antalet kuber i ett torn av en bestämd höjd *n* kan beskrivas med en generell formel där *n* ingår.
>
> (Hagland *et al*. 2005:85-86)

Vi har i vår undersökning valt att bortse från deluppgift d och den är borttagen på elevernas uppgiftsblad.

Den generella formel som eftersöks kan fås på olika sätt. Nedan kommer vi att presentera tre olika strategier för att lösa problemet. Genom att angripa problemet geometriskt kan eleverna ha tillräckliga verktyg för att lösa problemet fullt ut. Vi kommer i det följande exemplet att åskådliggöra ett möjligt geometriskt tillvägagångssätt där vi har utgått från *n*=4.

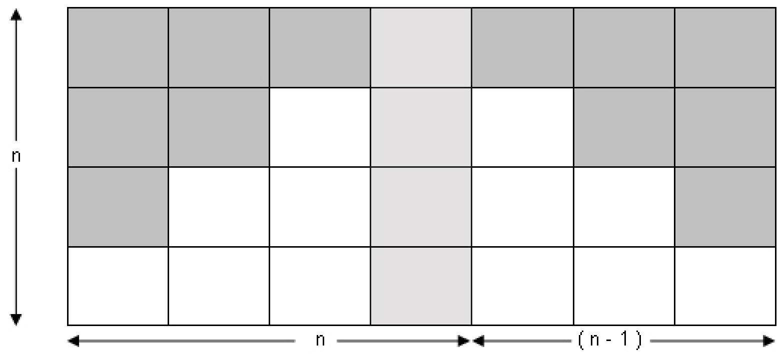


Bild 2

Vi har valt att kalla de trappformationer, som går ut från mittstapeln på tornet för vingar. Sammanlagt finns det då fyra vingar och en mittstapel i tornet. Genom att ta två av dessa vingar (de grå) och lägga dem ovanpå de andra två vingarna (de vita), fås en geometrisk figur i form av en rektangel. Mittenstapeln är ljusgrå. Antalet kuber i denna rektangel är det samma som antalet kuber i tornet. Antalet kuber i rektangeln beräknas genom multiplikation. En svårighet kan vara att se hur problemet kan förvandlas till en geometrisk figur och vad som i sammanhanget ska betecknas *n*. Det finns olika varianter att dela upp basen i rektangeln med avseende på *n*. Vi har valt att se det enligt ovan och får då följande beräkning:

Rektangelns bas är $n+(n-1)=2n-1$. Rektangelns höjd är n. Antalet kuber kan då beräknas enligt

$$n(2n-1)=2n^2-n\,.$$

Ett annat sätt att komma fram till den generella formeln är att använda sig av en algebraisk lösning. Den generella formeln fås enligt följande:

Antalet kuber i en vinge

$$S=1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)\,.$$

Då termernas ordningsföljd saknar betydelse är också

$$S=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1$$

Vi adderar dessa likheter med varandra och får då

$$\begin{aligned}2S&=(1+(n-1))+(2+(n-2))+(3+(n-3))+\ldots+((n-3)+3)+((n-2)+2)+((n-1)+1)=\\&=n+n+n+\ldots+n+n+n\,,\end{aligned}$$

där antalet termer i sista ledet är $n-1$ stycken n. Det ger oss $2\mathrm{S} = (n-1)\cdot n$. Det vill säga

$$\mathrm{S} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Antalet kuber i de fyra vingarna kan därmed skrivas som

$$4(\frac{(n-1)\cdot n}{2}) = 2(n^2 - n) = 2n^2 - 2n.$$

Dessutom tillkommer mittstapeln som är n kuber hög, så totala antalet kuber är

$$n + (2n^2 - 2n) = 2n^2 - n.$$

Vi exemplifierar ovanstående generella resonemang då *n*=4. Antalet kuber i en vinge är $S = 1+2+3$. Då termernas ordningsföljd saknar betydelse är också $S = 3+2+1$. Vi adderar dessa likheter och får då

$$2S = (1+3)+(2+2)+(3+1) = 4+4+4,$$

där antalet termer i sista ledet är tre stycken fyror. Det ger oss $2S = 3\cdot 4$. Det vill säga

$$S = \frac{3\cdot 4}{2}.$$

Antalet kuber i de fyra vingarna kan därmed skrivas som

$$4(\frac{3\cdot 4}{2}) = 24.$$

Dessutom tillkommer mittstapeln som är 4 kuber hög, så totala antalet kuber är

$$4 + 24 = 28.$$

Ett tredje sätt att komma fram till det sökta generella uttrycket är genom rekursion. Låt S_n beteckna antalet kuber i ett torn med höjden n. Vi vet att $S_1 = 1$. Vi vill visa att

$$S_{n+1} - S_n = 4n + 1.$$

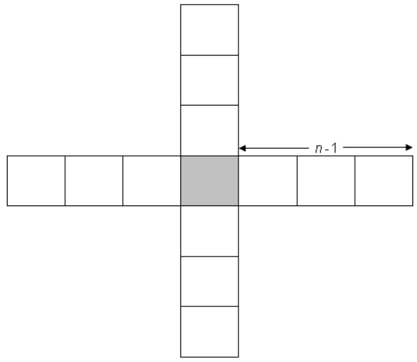


Bild 3

På bild 3 ser vi det nedersta lagret i ett torn som är n kuber högt. Kuben som ingår i mittstapeln är ljusgrå. De vita kuberna är de fyra vingarna. De är på det nedersta lagret $n-1$ ”långa” då tornet är n kuber högt.

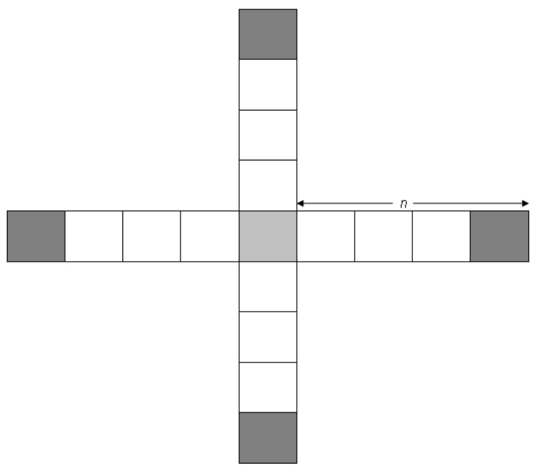


Bild 4

Nu vill vi att tornet ska vara $n+1$ kuber högt. Vi tänker oss då att vi ”skjuter in” ett nytt lager underst i tornet, se bild 4. Det lagret ser likadant ut som det ovanför förutom de mörkgrå kuberna. Det gör att vingarna nu blir n ”långa”. Då kan det nedersta lagret skrivas som $4n+1$. Följaktligen står n för hur ”långa” vingarna är, fyran för antalet vingar och ettan för kuben i mittstapeln. Alltså ger det att

$$S_{n+1} - S_n = 4n + 1.$$

Vi vill nu utveckla denna rekursionsformel till ett explicit uttryck. Det kan göras genom att ställa upp en tabell och leta efter mönster i den eller som nedan med hjälp av en algebraisk modell. Vi antar att det sökta uttrycket är ett andragradsuttryck och vår ansats blir då

$$S_n = an^2 + bn + c\,.$$

I så fall är

$$S_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c =$$

$$= a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c =$$

$$= an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)\,.$$

Av detta följer att

$$S_{n+1} - S_n = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) - an^2 + bn + c =$$

$$= 2an + (a+b)\,.$$

Insättning i rekursionsformeln ger

$$2an + (a+b) = 4n + 1\,.$$

Det i sin tur ger att $2a = 4$ och $a + b = 1$. Då inses att $a = 2$ och $b = -1$. Insättning i vår ursprungliga ansats ger

$$S_n = 2n^2 - n + c\,.$$

Eftersom $1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 + c$, medför det att $c = 0$. Det i sin tur ger att

$$S_n = 2n^2 - n\,.$$

4.3.2 Reliabilitet och validitet

Då validitet handlar om vi verkligen mäter det vi säger oss mäta anser vi att vår undersökning har hög validitet. Vi anser detta eftersom vi undersöker om det finns elever som har matematisk fallenhet med hjälp av de förmågor Krutetskii kommit fram till i sitt arbete. Krutetskii menar att dessa förmågor bara kan visa sig i en matematisk aktivitet. Då vår problemlösning skapar en matematisk aktivitet av något slag anser vi att detta styrker validiteten i vår undersökning.

I vår undersökning har vi använt oss av bandinspelningar, detta medför att det ibland kan bli svårt att tolka resultatet. Exempelvis kan en tystnad betyda många olika saker och i och med att vi inte har eleverna inspelade på film kan vi inte analysera denna tystnad, vilket vi inte heller har försökt göra. Därutöver är det periodvis svårt att höra det som sägs då eleverna mumlar eller pratar i mun på varandra, även dessa delar blir då svåra att tolka. Det gör att reliabiliteten minskar i undersökningen. I övrigt finner vi ingen anledning att ifrågasätta undersökningens reliabilitet.

5. Resultat och analys

Av de lösningar vi fick in framkom att det finns en oerhörd spridning vad gäller elevernas tillvägagångssätt för att lösa det givna problemet och hur långt eleverna har nått. Det förekommer allt ifrån en fullständig generell formel där *n* ingår till en lösning där endast de hela klossar som syns på bilden räknats.

5.1 Två elever

Vi kommer här nedan att presentera två elever som i undersökningen har visat prov på många av Krutetskiis förmågor. Det är en flicka, Jenny, och en pojke, Jörgen. En sak de har gemensamt är att de är den drivande kraften i sina respektive grupper. I Jennys fall kommer vi först att presentera hennes lösning av problemet och därefter lägger vi fram de förmågor hon besitter. Däremot kommer vi i Jörgens fall att varva presentationen av hans lösning med de förmågor han visar sig inneha.

5.1.1 Jennys lösning av problemet

Jenny är en elev som visar prov på många av Krutetskiis förmågor. Hon ingår i en grupp med ytterligare två flickor, Lena och Emma. Genom hela lösningsprocessen är det Jenny som för samtalet framåt. De andra två ger i stort sett bara understöd med jämna mellanrum. Jenny är genom hela uppgiften väl medveten om att det som eftersöks är antalet kuber i de olika tornen. Hon jobbar sig systematiskt genom uppgifterna från a till c. Det medför att hon kommer till generaliseringen av problemet mot slutet av sin lösning, även om hon påbörjar arbetet med generaliseringen redan på uppgift b.

I deluppgift a har hon på sitt enskilda papper ritat en vinge och konstaterat att det är sex stycken kuber i varje vinge. I nästa steg visar hon genom bild, text och en uträkning att det finns fyra stycken vingar med sex kuber i varje, vilket ger 24 kuber. Därefter illustreras även mittstapeln och adderas till de föregående kuberna. I gruppens gemensamma lösning har bilderna tagits bort och ersatts med de enkla beräkningarna:

$$6st \cdot 4 = 24$$

$$24 + 4 = 28$$

På deluppgift b försöker hon komma fram till en generell formel. Hon gör det på följande sätt:

$$n + (n - 1 \cdot 4) + (n - 2 \cdot 4) + (n - 3 \cdot 4)$$

Vi tolkar det som att hon här har skrivit ned antalet kuber då n=4 men sedan inte vet hur hon skall fullfölja det hela för att uttrycket ska gälla för alla möjliga höjder på tornet. Hon har i detta uttryck formulerat sig felaktigt då parenteserna avslutas på fel ställe. För att vara matematiskt korrekt skall parentesen avslutas enligt följande $(n-1) \cdot 4$. Alternativt har hon påbörjat att skriva antalet kuber då n=12 och insett att det blir en lång följd som hon sedan inte förmår gå vidare med för att få till stånd ett generellt uttryck. Dessa antaganden gör vi på grund av att ovanstående uttryck är utsuddat och ersatt med följande beräkning:

$$(11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 4 = SV$$

$$12 + SV$$

Denna lösningsstrategi kan leda fram till ett generellt uttryck som presenterats ovan med hjälp av en algebraisk lösning. Jenny fullföljer inte detta tankespår men det är denna lösning som ligger till grund för gruppens gemensamma uträkning på deluppgiften. Den ser ut enligt föjande:

$$276$$

$$(11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 4 = 66 \cdot 4$$

$$264 + 12 = 276$$

Multiplikationen utförs med hjälp av en algoritm i marginalen.

Jenny har inte redovisat hur hon kommer fram till generaliseringen skriftligt. Däremot löser hon uppgiften under tiden hon förklarar sina tankar för de andra.

(mummel)

Jenny: - Okay, då skriver jag det med n då. Det är ju som…(hörs ej vad hon säger)

Lena: - Men inte göra där då.

Jenny och Emma: -Jaha

Jenny: - Lena, där ska du inte räkna nu

Jenny: - Okay

Emma: - Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är n kuber högt.

Jenny: - Det måste ju va en formel som man kan sätta in i.

Emma: - Jaa

Jenny: - Har du kommit på något bra Lena?

Lena: - Jaa

(det är tyst länge)

Lena: - Vänta

Jenny: - Man kan ju göra så här, att om man har, om du skulle bygga en som är lika högt här

Okänd: - Mmm

Jenny: - Som går ut från den, då behövs det lika många här nere som det skulle va där uppe

Emma: - Jaa

Jenny: - Så att då kan man ta, så många som går ut. Det blir ju en mindre än vad det är

Emma: - Jaa, typ

Jenny: - Och så gånger så mycket som det är högt

Emma: - Typ

Jenny: - Alltså, det är krångligt att förklara

Emma: - Ja men jag fattar

Jenny: - Ja, då tar man, då blir det typ (n-1), öhhh, gånger, n va?

Jenny: - Mmm, det blir det. Och sen, (hörs ej) och sen tar man det delat med 2. Förstår du hur jag tänker Lena? Om jag räknar ut den, hela den om den skulle ha varit rakt ut så, rakt ner.

Lena: - Mmm

Jenny: - och så delar man den med 2. För

Emma: - Den blir

Jenny: - Då skulle de ha vart, 1,2, 3, det blir ju lika många.

Lena: - Mmm

Jenny: - Då räknar man ut den och så tar man det gånger 4 sen. Och sen plus den

Emma: - Mmm

Lena: - Ja

Jenny: - Plus n då

Emma: - Mmm

Jenny: - Det måste bli rätt.

Emma: - Jaa, typ

På gruppens gemensamma lösningsblad återfinns följande generella formel:

$$(n-1)\cdot\frac{n}{2}\cdot 4+n$$

5.1.2 Analys av Jennys lösning

Då Jenny ser sina bilder till problemet abstrakt har vi genom hennes muntliga förklaring samt utseendet på hennes generalisering tolkat hennes abstrakta bild enligt följande:

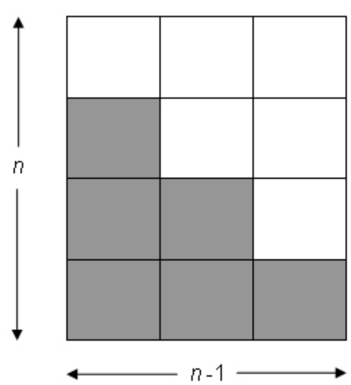


Bild 5

Jenny använder sig av en variant av den geometriska lösning som vi presenterat tidigare. Hon lägger en vinge på den andra och ser då tydligt att $n(n-1)$ ger antalet kuber för två vingar, eftersom hon bara är ute efter antalet kuber i en vinge dividerar hon n med 2.

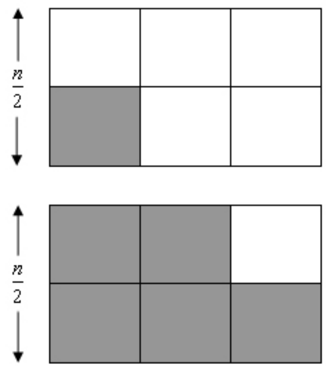


Bild 6

Därefter multiplicerar hon antalet kuber i en vinge med 4, för att få antalet kuber i alla vingar. Till sist adderar hon antalet kuber i mittstapeln, som är n stycken.

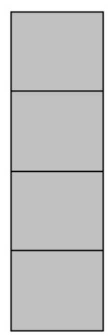


Bild 7

Jenny visar på förmågan att erhålla matematisk information då hon enkelt tar ut den relevanta matematiska informationen. Hon söker tidigt i sin lösningsprocess efter en väg att nå ett generaliserbart uttryck. Redan inledningsvis är hon införstådd med att det är antalet kuber i tornet som är det som söks samt att detta antal kuber beror på hur högt tornet är.

Förmågan att bearbeta matematisk information visar hon bland annat genom att tänka i matematiska symboler både vad gäller siffror och bokstäver. Hon använder dessa på ett självklart och enkelt sätt genom sin lösning, både enskilt och i grupp. Vidare på deluppgift c, där en generalisering eftersöks, ändrar hon strategi och löser den delen av problemet genom att tänka i bilder. Det tyder på att hon besitter ett abstrakt visuellt tänkande. Hon får genom den geometriska tolkningen fram den generella formeln, se citat ovan. Generaliseringen sker snabbt och det finns en enkelhet i lösningen.

Genom ändring av lösningsstrategi genom de olika deluppgifterna visar hon flexibilitet i sitt matematiska tänkande och visar också att hon har en förmåga skifta tankesätt. En annan av de förmågor Krutetskii kommit fram till är en strävan efter klarhet, enkelhet och rationalitet i lösningarna, vilket vi anser att hon visar genom det enkla, klara och koncisa sätt hon redovisar sin lösning på. Utöver detta har hon även en förmåga att tänka i en avkortad struktur, vilket visas genom den enkelhet som återfinns i hennes generalisering.

Efter att generaliseringen är nedskriven fortsätter samtalet med att Jenny undrar om de ska pröva den generella formeln.

Jenny: - Ska vi testa det en gång till då bara med en en sån här siffra?
Lena: - Mmm, (hörs ej)
Jenny: - Okay, vi tar 3.
Jenny: - (3-1) (mummel)gånger 3/2 gånger 4 plus 3. Okay, då blir det ju
(Mummel från alla)
Jenny: - 2
Lena: - Vänta
Jenny: - Plus
(Mummel och skrivande)
Emma: - 3 gånger 4 plus 3. Kan du hjälpa mig?
Jenny: - 12, ha, ha, ha. Plus, ja. Måste bara se hur man tänker
(skratt)
Jenny: - Stämmer detta nu? Blir man (hörs inte) som är 3 hög.
Emma: - Lena sa du att det var 15 där och du där?
Lena: - Jaa
Jenny: - Och den som är i mitten, så kommer det, så på sidorna då.
Lena: - Jaa

(Någon säger något otydligt)

Jenny: - Men då blir det ju 1,2,3 gånger 4, 12, plus 3. 15. Då stämmer det.

Emma: - Jaa. Då är vi klara då eller?

Lena: - Jaa

(Otydligt mummel, bandspelare stängs av.)

I och med att hon prövar att sätta in ett värde i sin generella formel tolkar vi det som att hon har ett system för att argumentera för sin lösning. Hon visar genom sitt arbete med uppgiften att hon har metoder för problemlösning och i detta fall även principer för hur hon skall närma sig det matematiska problemet.

5.1.3 Jörgens lösning samt analys av den

Jörgen är en elev som, liksom Jenny, visar prov på många av de förmågor Krutetskii kommit fram till. Han ingår i en grupp med bara pojkar, Martin och Mats. Även om Jörgen är den ledande i gruppen deltar både Martin och Mats betydligt mer i samtalet än Jennys kamrater. Till skillnad från Jenny och hennes grupp sker arbetet här helt ostrukturerat. Det visar sig både genom det samtal som förts och de anteckningar som finns nedskrivna på gruppens gemensamma lösningsblad. Anteckningarna är röriga och det är svårt att säga i vilken ordning saker och ting har skrivits ned. De har redovisat gruppens gemensamma lösning ömsom på de enskilda lösningsbladen och ömsom på gruppens lösningsblad. Det medför att det är svårt att redovisa allt som finns nedtecknat från deras arbete med problemet och en del tankespår är inte möjliga att följa. Vi väljer därför att använda gruppens samtal, i kronologisk ordning, som grund i vår analys. Ovanstående resonemang medför att vi, till skillnad från hur vi presenterade Jenny, kommer att lyfta fram Jörgens olika förmågor i samband med analysen av samtalet.

Inledningsvis visar vi Jörgens lösningsförslag på deluppgift a som lyder enligt följande:

$$6 \cdot 4 + 4 = 28$$

Istället för att fortsätta med deluppgift b har han här gjort försök att nå en generalisering. Det som finns nedskrivet på hans enskilda lösningsblad är:

$$n = 4$$

$$(1{,}5 \cdot n \cdot 4 + n)$$

Den här formeln gäller, precis som Jörgen har förklarat, när n= 4. Den visar sig emellertid oanvändbar för det fortsatta arbetet med en generalisering då den inte gäller för alla värden på n.

Väl indelade i gruppen ägnar eleverna all tid åt arbete med att finna en generalisering. Jörgen visar tidigt ett stort engagemang och ett intresse för uppgiften. Hans engagemang och intresse riktar sig endast åt att finna en generalisering. Det visar sig redan i de inledande replikerna av samtalet:

Jörgen: - Vi måste lösa nu

Jörgen: - Så i fall man, men vi, man tar n. Alltså n inte 1 utan n

Mats: - Jaa

Jörgen: - Bokstaven n. Det borde, det borde va hur högt det är. Så n 1, så här om n är 1, då är tornet 1 högt och då är det inga åt sidorna. Så är n 1 när det är 1. Då är det en byggkloss så att säga.

Martin: - Jaså

Jörgen: - Och så är det 2 då är det 2 högt och så är det en åt varje håll så då är det

Martin: - 4

Jörgen: - 5 stycken här

Jörgen visar här prov på att han har förstått att uppgiften handlar om att bestämma kubantalet i ett torn av en viss höjd, n. I och med att han gör detta synliggör han sin förmåga att erhålla matematisk information. Det är kubantalet, uttryckt i n, som är viktigt.

Det som kännetecknar Jörgen genom hela samtalet är hans strävan att, i tanken, försöka hitta en generell formel. Dessa tankar och ansträngningar visar sig i form av korta och snabba fragment, som förkastas lika hastigt då han inser deras otillräcklighet.

Jörgen: - n gånger 2 plus 2 typ, neej, det vet i fan. n gånger (blir avbruten)

Mats: - Då är det 2 då

Jörgen: - Mmm. Så n gånger 2 plus n. Sen om man prövar det så blir det så blir det ett snäpp högre, då blir det 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 till och om man tar n gånger 3 plus 3 då blir det 9 plus 3 och det stämmer inte
(spridda skratt)

[…] (prat som inte har med uppgiften att göra)

Jörgen: - Håll käften nu för fan
Mats: - Okay Jörgen
Jörgen: - n plus n gånger 2 minus 2? Gånger 4, nej
(skratt)

[…] (prat som inte har med uppgiften att göra)

Jörgen: - Yes. n gånger 2 blir 4. 4 gånger 4. Hur många är det då? Det är n, 6 stycken. n gånger n, n gånger n
(skratt)
Jörgen: - Vad faan blir det? Det här är ju svårt, 16, 16, 16
Mats: - 16
Martin: - 16
Jörgen: - 16
(skratt)
Jörgen: - n gånger n, nä, det går inte

Ovanstående citat visar att Jörgen enkelt, i tanken, växlar mellan att använda siffror och bokstäver då han presenterar sina idéer. Det här tyder på en förmåga till logiskt tänkande vad gäller siffror och bokstavssymboler.

Efter en del resonerande säger Jörgen att det inte var så lätt och de vet inte riktigt hur de ska gå vidare med problemet. När de har funderat en stund är det återigen Jörgen som driver arbetet framåt. Han presenterar följande tanke:

Jörgen: - n är 4 när det är 4 högt. Då bli det, så är det 6 åt varje håll. Men hur får man ut att det blir, då är 6 gånger 4, det blir 24. Då får man ut att det är 24 från n. För man måste ju kunna räkna ut det. För det blir ju n, n gånger.

I det här fallet har Jörgen blandat ihop ”fyrorna”. Det är korrekt att när n=4 är tornet fyra kuber högt. Men då han säger att ”6 gånger 4, det blir 24” och anser att 24 kan fås från n gör han en felaktig tolkning. Denna fyra är nämligen antalet vingar och därmed en konstant. Detta misstag återkommer inte på fler ställen. I det fortsatta resonemanget kommer Jörgen upp med följande intressanta konstaterande:

Jörgen: - n gånger 5 plus n, nej det går ju inte. Man kan ju inte ha plus, när det är, du vet 1. Det går ju inte. n gånger 6, då blir det, också för mycket.

Här konstaterar Jörgen att vad de än må komma fram till vad gäller en generell formel kan den inte innehålla addition för då stämmer det inte när n=1. Det visar att Jörgen har en förståelse för att den generella formeln ska gälla för vilket värde som helst på n. Han kan även se ett samband vad gäller generaliseringen i just detta problem, eftersom det inte fungerar med addition när n=1 kan de helt sonika bortse från addition i sin generella formel.

Efter ovanstående konstaterande följer en period med gissningar och prövningar på olika varianter av en generell formel där de olika förslagen förkastas var efter de inte visar sig fungera. Detta leder till ett ifrågasättande från Mats:

Mats: - Vi kanske borde räkna ut b) först?
Martin: - Neej, skitdetsamma
Jörgen: - Men nej men
Mats: - Om c) baseras på b)
Jörgen: - Vänta. Ja men b) är baserat på det vi håller på med nu.

Återigen visar Jörgen prov på att han har tillgodogjort sig den matematiska informationen i problemet. Han är väl medveten om att en generalisering ger lösningar till alla *n*, det vill säga även till *n*=12.

Jörgen återgår nu till att gissa och pröva igen. Då han inte kommer någon vart med detta förfaringssätt leder det till frustration. Den visar sig genom att han bankar upprepade gånger i bordet och uttrycker sin besvikelse över att han inte kan ”se” den generella formeln. Trots detta fortsätter han att arbeta med problemet och visar genom följande citat prov på flexibilitet i den mentala processen då han nu närmar sig problemet från ett annat håll:

> Jörgen: - Ja men tänk så här nu då. Första 1 är det 1 på sen blir det plus 5 till nästa när n är 2 och sen till 3:dje tornet då är, vänta nu, 1 plus 5 då är det 6 på den och sen läggs det till 9 på den få se nått mönster här då, 1 (otydligt mummel). Det ökar med 4 mer varje gång , tror jag. Liksom, kolla här, först ökar det med 5, sen ökar det med 9 sen ökar det med 13. Få tänka här 15 plus 13 det är 28. Ja det ökar med 4 mer varje gång

Här efter följer en del som vi inte kan tolka på grund av dess otydlighet. Mitt i detta avsnitt kommer Jörgen fram till en generalisering som han snabbt förkastar. Men vid en närmare analys av oss visar det sig att det han kommit fram till är den generella formel, som eftersöks:

> Jörgen: - n gånger n gånger 2, ska vi se då
>
> Mats: - n gånger n gånger 2
>
> Jörgen: - Det är ju liksom, där, 2 gånger 2, 4, gånger 2, 8, minus 2. Fast det stämmer inte på 1:an

Vi ser här att Jörgen använder sig av *n*=2. Om vi skriver om Jörgens beräkning med hjälp av *n* och med ledning av det han säger i inledningen av citatet får vi följande:

$$n \cdot n = 4$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

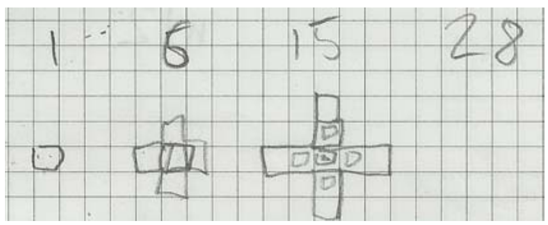
$$8 - n = 6$$

Detta tillsammans ger:

$$2n^2 - n$$

Det här är den korrekta generalisering som eftersöks. Emellertid är Jörgen inte medveten om det. Dessa tankar finns inte nedskrivna på gruppens lösningsblad, utan framkommer endast i samtalet, och vid prövningen av n=1 begår Jörgen förmodligen något misstag och får det inte till att stämma. Därför förkastas även detta försök till en generalisering.

Därefter följer ännu en svårtolkad del. Efter detta är han åter inne på tankespåret med att det ökar med fyra fler. Det framgår nu av samtalet att Jörgen börjar rita bilder.



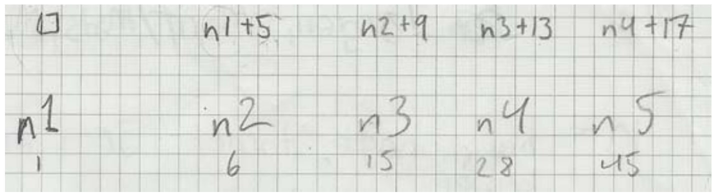
Figur 1

Bilden visar hur tornet växer uppifrån och ner. Jörgen skriver hur många kuber det är i de olika tornen. Han visar i figur 1 att han skjuter in ett nytt lager längst ner i tornet. Jörgen har nu bytt strategi och försöker nå det generella uttrycket med hjälp av rekursion, en strategi som presenterats ovan. Bilden utgör en visuell förklaring till hans algebraiska tänkande.

Efter detta hörs ett mumlande och några kommentarer från Jörgen som leder fram till:

> Jörgen: - Så, så sen blir det sån här, nä skit. Alltså först blir det plus 5, sen blir det 5 plus 4 plus, så sen blir det, det blir 9. Så det blir 9 plus så här 4 det blir 13 sen blir det 13 plus 4 och så lägger jag till, till det som redan är då. Så det är 1 plus 5, alltså figur nummer 1 plus 5, figur nummer 2 plus 9, figur nummer 3 plus 13 figur nummer 4 plus 15 figur nummer 5 plus 18 och så vidare. Fast om man ska komma på någon formel till det så vet jag faan inte hur man ska göra alltså.

De klarar inte av att komma fram till en generell formel, vilket är vad de hela tiden har sökt, med hjälp av detta. Emellertid tecknar Jörgen ned följande förklaring till sin tankegång.



Figur 2

Figuren beskriver ett system bestående av rader och kolumner. Den översta raden innehåller först den enda kub som ingår i tornet när n=1. Sedan redovisar han nästa torns kubantal. Då använder han sig av antalet kuber han hade i föregående torn och adderar det med kubantalet i det understa lagret i föregående torn plus 4, eftersom ökningen ökar med 4. Den andra raden består av namnet på de olika tornen där antalet kuber på höjden anger namnet på tornet. Den sista raden redovisar hur många kuber det totalt finns i de olika tornen.

Ett flertal av de förmågor Krutetskii kom fram till kan skönjas i Jörgens arbete med problemet. Han strävar hela tiden efter att förkorta det matematiska resonemanget, även om han med den ena vägen, som bygger på rekursivitet, inte förmår lösa problemet fullt ut och på den andra vägen, ”gissa och pröva”, uppmärksammar han inte när han faktiskt prövar rätt generalisering. Han söker under arbetets gång efter en enkel och rationell lösning och blir oerhört frustrerad (bankar i bordet vid ett par tillfällen) när han inser att han inte klarar av att nå sitt mål, som är en generalisering av problemet. Jörgen visar på en flexibilitet i sin mentala process vid denna matematiska aktivitet genom att oavbrutet närma sig problemet från de olika håll han ser.

5.2 Sammanfattning

När vi har analyserat Jennys och Jörgens arbete med problemet utifrån de förmågor Krutetskii har kommit fram till, kan vi se att de är elever som besitter ett flertal av dessa förmågor. Med utgångspunkt i detta kan vi även konstatera att Jenny och Jörgen är två elever med matematisk fallenhet och som uppfyller de frågeställningar vi formulerat i vårt syfte.

De har båda förmågan att se en meningsfull matematisk struktur i det givna problemet. De är väl medvetna om vad som eftersöks. Jenny klarar av att generalisera det matematiska materialet fullt ut. Jörgen märker däremot inte att han kommer fram till den rätta generaliseringen på grund av sitt ostrukturerade arbetssätt, då de matematiska tankarna inte presenteras på ett metodiskt och lättöverskådligt sätt.

Jenny har förkortat sitt matematiska resonemang så långt hon förmår. De har, enligt given information, ännu inte lärt sig att ”multiplicera in i en parantes”. Även Jörgen har förkortat sitt matematiska resonemang så långt han är kapabel till med de verktyg han vid undersökningstillfället besitter.

Som vi tidigare har beskrivit finns det, enligt Krutetskii, tre olika strukturer för ett matematiskt tänkande: den analytiska typen, den geometriska typen och den harmoniska typen (se ovan). Sett utifrån uppgiftens utformning och eleverna lösningsförslag tolkar vi det som att vi kan se vissa drag åt det ena eller andra hållet hos Jenny och Jörgen.

I Jennys fall anser vi att hon visar tendenser på att dra mot den harmoniska typen. Hon växlar från visualisering, även om detta till största del sker i tanken, till att använda sig av ett verbal-logiskt arbetssätt.

Jörgen däremot gör inga större ansatser att rita bilder eller tolka problemet geometriskt. Den bild som förekommer anser vi uppkommer i hans försök att förklara för sina kamrater. Genom hela Jörgens arbetsprocess sker arbetet abstrakt och han har inget behov av att visualisera problemet. Vi får utifrån detta intryck av att Jörgen har en dragning åt den analytiska typen.

6. Diskussion

Genom litteraturen vi läst har begreppet begåvad givits många innebörder. Vi har använt oss av begreppet i de fall författaren har nyttjat sig av det. Eftersom ordet begåvad har många betydelser har vi istället valt att använda oss av ordet fallenhet. Vi har kopplat denna fallenhet till en förekomst av en rad olika förmågor. Dessa förmågor har vi hämtat från Krutetskii.

6.1 Metoddiskussion

Vi insåg redan från början att vi inte skulle ha möjlighet att medverka som observatörer i alla grupperna. Vår intention var att vi skulle röra oss mellan grupperna och på så vis observera dem under en kortare tid. När vi tittade till alla grupperna för att se om de kommit igång upplevde vi, att vi hämmade dem i deras tänkande. Samtalet avstannade när vi kom in i rummet och när eleverna började prata igen sökte de vår blick för att få bekräftelse på sina tankar. Med denna upplevelse som grund tog vi beslutet att inte närvara vid grupparbetet.

Vid genomlyssningen av materialet visade det sig att flera grupper har varit distraherade av bandspelaren. Det finns grupper som har pratat med oss genom bandspelaren och även direkt till den. Vissa grupper uppträdde på ett sätt som vi anser att de inte hade gjort om en av oss hade funnits med i rummet under arbetets gång. Ytterligare ett problem som uppstod i och med att vi inte medverkade som observatörer är att det periodvis blev svårt att koppla samman de anteckningar vi fick in med de samtal som fördes.

Eftersom både Jenny och Jörgen antecknade sparsamt har det inneburit mycket arbete att sätta sig in i hur vi tror att de har tänkt. Bilderna i redovisningen av Jenny är efterkonstruktioner som helt och hållet bygger på våra tolkningar av det hon säger när hon förklarar för sina kamrater hur hon tänker. Dessutom har vi av förklarliga skäl ingen aning om vilka tankar som funnits hos dem som de inte har satt ord på. En av flickorna i Jennys grupp har inte svenska som modersmål och hon uttrycker inte vid något tillfälle sina tankar. Vi vet inte om det beror på att hon inte behärskar språket eller om hon helt enkelt inte har några tankar hon vill framföra.

Vad gäller Jörgen har det varit ett omfattande material att gå igenom och tolka, detta bland annat för att gruppen är den grupp som arbetade längst med problemet eftersom Jörgen inte ville avsluta arbetet förrän han hade funnit generaliseringen som eftersöks. Det var en motvillig Jörgen som mot löfte om lösningsförslag en vecka senare gick med på att avsluta arbetet.

Samtalet är precis som deras anteckningar ostrukturerat och lite rörigt, vilket även försvårar analysen. Det har varit oerhört svårt att koppla samman samtalet med anteckningarna och delar av materialet har fått lämnas utan närmare analys. Detta arbetssätt har inte bara inneburit problem för oss utan även för Jörgen då han faktiskt hittar den eftersökta generaliseringen men på grund av ett räknefel inte uppmärksammar det. Då Jörgen i samtalet accelererar sin talhastighet när en idé tar form tror vi att det kan innebära svårigheter att på ett strukturerat sätt redovisa tankegången. Vi tror att Jörgen skulle tjäna mycket på att inse fördelarna med välordnade anteckningar.

6.2 Slutdiskussion

Vi vill i vår diskussion återigen påtala att det rör sig om en liten undersökning inom ett starkt avgränsat matematiskt område. Vi kan genom denna undersökning inte avgöra i vilken utsträckning det förekommer elever med fallenhet för matematik, ej heller om de elever vi funnit kan visa på samma förmågor inom andra matematiska områden. Vad vi kan säga är att det, enligt de analysredskap, i form av de förmågor Krutetskii har kommit fram till och som vi har använt, existerar elever med fallenhet för matematik. Vi kan även beskriva hur den tar sig uttryck.

Vi har i vår resultatredovisning valt att lyfta fram två elever, Jenny och Jörgen. Därmed inte sagt att de övriga deltagarna i vår undersökning saknar matematiska förmågor. Det finns dock inga andra elever som visar på så många av Krutetskiis förmågor som Jenny och Jörgen gör. Det kan emellertid vara så att det finns elever vars förmågor kan komma fram inom andra matematiska områden och på annat sätt och i sammanhang där förmågan att uttrycka tankar muntligt spelar en underordnad roll. Det kan också vara så att fallenhet för matematik kan visa sig i ett senare skede, då den matematiska mognaden inte utvecklas likadant eller i samma takt hos alla.

Vi vill inte på något sätt slå fast att Jenny och Jörgen alltid har de strukturer i tänkandet som vi presenterade under resultat och analysdelen. Det kan vara så att de angriper ett annorlunda problem på ett annat sätt och då visar prov på komponenter som gör att de drar åt ett annat håll. Det kan naturligtvis också bli så att de förstärker den bild vi har av dem.

6.2.1 Begåvning och myter

Vi har alla en föreställning om vad begåvning är. Troligen skiljer sig denna uppfattning åt beroende på vem som definierar begreppet. Då föreställningen om vad begåvning är också varierar mellan olika författare och är olika beroende på inom vilket område en person anses vara begåvad, anser vi det vara viktigt att lyfta fram komplexiteten i detta begrepp. Genom att i vår bakgrund lyfta fram en del av dessa olika synsätt på begåvning vill vi ge läsaren en möjlighet att medvetandegöra sin egen syn på begreppet.

Som nämnts ovan, finns det många olika sätt att se på begåvning och det finns en mängd olika myter kring vilka egenskaper begåvade barn anses besitta. Därför menar vi att det är viktigt att vi som lärare blir medvetna om hur komplext detta område är. Det är betydelsefullt för oss i vår yrkesroll att skapa oss ett förhållningssätt till vilka dessa begåvade elever är. Det är också angeläget att vi blir medvetna om vilka myter som finns så att vi inte omedvetet kategoriserar elever utifrån felaktiga föreställningar.

6.2.2 Stöd och utveckling av matematisk fallenhet

Självklart kommer inte alla elever med fallenhet för matematik att tillhöra den yttersta eliten inom området. Emellertid anser vi det vara av största vikt att alla elever ska få möjlighet att utvecklas maximalt. Även om Blooms forskning är baserad på individer i toppskiktet är det intressant att se hur de har fått hjälp att utveckla sin kapacitet fullt ut. Det som var gemensamt för matematikerna i Blooms undersökning var att deras föräldrar uppmuntrade sina barn till att alltid göra sitt allra bästa och att de hjälpte dem att finna vägar att utveckla sin fallenhet för matematik. Då alla elever inte har dessa förutsättningar i sin hemmiljö är det av största vikt att vi som lärare kan stötta dem i deras utveckling. Det är då viktigt att det finns välutbildade lärare som kan hjälpa eleverna och ge dem utmaningar. Det kan inte vara rimligt att elever ska behöva vänta så länge som till högre studier innan de upplever matematiken som utmanande.

Genom analysen av resultatet på vår undersökning blev vi medvetna om att det krävs gedigna matematikkunskaper för att kunna fullfölja elevernas påbörjade lösningsförslag, vilket även Hagland *et al.* påpekar i sin bok (2005:52). Vi har i vårt fall haft tillgång till vår handledare, som i egenskap av matematiker hjälpt oss att fullfölja de utvecklingsbara lösningsförslagen. Det är dessa lösningsförslag som finns presenterade ovan. Vi anser att det är viktigt att eleverna får se att deras tankar inte på något sätt behöver vara felaktiga, utan kan leda fram till en fullständig lösning. Det kan vara så att det är vissa matematiska verktyg som saknas för att de ska kunna utveckla sin lösning fullt ut. Om vi som lärare inte kan se vart deras tankar kan leda är det av största vikt att vi kan få hjälp med det.

Men var finns hjälpen? Möjligen kan vi få den på vår arbetsplats, men om så inte är fallet ser vi en svårighet i att veta vart vi kan vända oss. Det hade i det fallet varit önskvärt med en gemensam central till vilken vi lärare kan vända oss för hjälp. Det finns idag Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) som är knutet till Göteborgs Universitet. Vi upplever likväl att det vore en fördel med ett regionalt center. En tanke är att det kunde förläggas i anslutning till de universitet och högskolor som har en lärarutbildning. På dessa universitet och högskolor existerar det dessutom redan kopplingar till olika skolor genom den verksamhetsförlagda utbildningen.

Det kan vara så att vi behöver hjälp med att stimulera och utmana eleverna. Då vore det bra om det hos den gemensamma centralen fanns ett uppgiftsbibliotek där vi kunde söka efter passande material. Det vore även lämpligt att ha en matematiker att rådfråga i situationer där vi känner oss otillräckliga, exempelvis om vi inte vet vad som är passande material eller när vi inte kan se vad en elevs påbörjade lösningsförslag skulle kunna leda till. Denna hjälp tror vi är nödvändig om Europarådets rekommendation att även ge elever med matematisk fallenhet särskilt stöd ska kunna bli verklighet.

6.2.3 Våra tankar

Krutetskiis studie är ett gediget och grundligt arbete. De förmågor han kom fram till var ett naturligt val för oss att använda som analysredskap i vårt arbete med denna studie, detta för att vi kom i kontakt med hans arbete under kursen ”Stöd och utveckling av matematisk förmåga”. Vi anser att de förmågor Krutetskii beskrivit kan vara bra riktlinjer för att hitta elever med matematisk fallenhet, även om vi i vårt arbete inte på något sätt vill framhålla att vi har hittat ett facit för att finna dessa elever.

Vi är tacksamma att vi som blivande lärare har fått ta del av Krutetskiis undersökning och de resultat han kom fram till. Vi känner att de insikter detta arbete har gett oss både vad gäller olika tankestrukturer och de förmågor Krutetskii beskrivit kommer att vara en värdefull resurs i vår framtida yrkesutövning. Exempelvis tror vi att dessa tankestrukturer kan vara till hjälp för att förstå varför elever väljer att närma sig ett problem från ett visst håll även om det visar sig försvåra möjligheten att lösa uppgiften.

I vårt arbete har vi valt att fokusera på hur vi ska kunna finna elever med fallenhet för matematik. En följdfråga som har väckts under arbetets gång är hur vi bäst, inom skolans befintliga ramar, ska ta hand om de elever med matematisk fallenhet som vi hittar. Denna fråga är vi antagligen inte ensamma om att ställa. Många blivande och yrkesverksamma lärare ställer sig säkerligen samma fråga. Att finna ett svar på den öppnar upp många möjligheter för vidare undersökningar och forskning.

Referenser

Bloom, Benjamin, 1985: *Developing talent in young people.* New York: Ballantine Books.

Engström, Arne, 2005: Matematikbegåvningarnas revansch? *Nämnaren* 2005 nr 2 Grafikerna Livréna i Kungälv AB.

Hagland, Kerstin, Hedrén, Rolf & Taflin, Eva, 2005: *Rika matematiska problem.* Malmö: Elanders Berlings AB

Krutetskii, V.A, 1976: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago och London: The University of Chicago Press.

Läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet (LPO 94). 2001. Lärarförbundet. Solna: Tryckindustri Information.

Moldenius, Carina, 2003: *Att möta matematikbegåvade barn i skolan*. Växjö Universitet.

Skolverket, 2004: TIMSS 2003 *Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv.* (Skolverkets rapport 255) Stockholm: Blomberg och Jansson.

Wahlström, Gunilla O, 1995: *Begåvade barn i skolan - Duglighetens dilemma.* Stockholm: Liber Utbildning AB.

Wallén, Göran, 1996: *Vetenskapsteori och forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur .

Winner, Ellen, 1999: *Begåvade barn – myt och verklighet.* Jönköping: BrainBooks.

Wistedt, Inger, 2005: En förändrad syn på matematikbegåvningar? *Nämnaren* 2005 nr 3 Grafikerna Livréna i Kungälv AB.

Young, Peter & Tyre, Colin, 1992: *Gifted or Able? Realizing Children's Potential.* Buckingham: Open University Press.

Växjö universitet

Förfrågan om deltagande i undersökning

Vi är två lärarstudenter som skriver vårt examensarbete inom matematikdidaktik vid Växjö Universitet. Vårt arbete är en liten del i ett större projekt om hur matematisk förmåga kan stödjas och utvecklas.

Vi vill under en till två lektioner låta eleverna arbeta med problemlösning i grupp. Under detta arbete kommer vi att spela in gruppens samtal på band. Vi kommer även att samla in elevernas skriftliga lösningar.

Det vi får in i form av bandinspelningar och lösningsförslag kommer endast att användas inom projektet. Vid presentationen av materialet är eleverna självklart anonyma och de kommer inte senare att kunna identifieras.

På grund av elevernas ålder krävs målsmans godkännande. Vi hoppas att ni låter era barn delta i vår undersökning och är därför tacksamma om ni vill fylla i talongen nedan. Om ni har några frågor ring gärna.

Med vänliga hälsningar

Johanna Håkansson tel.
Britt Grant tel.
lärarstudenter vid Växjö Universitet

Ja, mitt barn ____ får delta i undersökningen.
barnets namn

Nej, mitt barn_____________________________________ får inte delta i undersökningen.
barnets namn

____
målsmans underskrift

Växjö
universitet

Matematiska och systemtekniska institutionen
SE-351 95 Växjö

tel 0470-70 80 00, fax 0470-840 04
www.msi.vxu.se