School of Mathematics and Systems Engineering

Reports from MSI - Rapporter från MSI

Matematik ska engagera
- Kommunikation i laboration

Mathematics will engage
- Communication through laboration

Johanna Yngvesson & Josefine Jönsson

June
2009

MSI
Växjö University
SE-351 95 VÄXJÖ

Report 09025
ISSN 1650-2647
ISRN VXU/MSI/MA/E/--09025/--SE

Växjö universitet

Examensarbete 15 hp
i Lärarutbildningen

Vårterminen 2009

ABSTRAKT

Johanna Yngvesson & Josefine Jönsson

Matematik ska engagera
- Kommunikation i laboration

Mathematics will engage
- Communication through laboration

Antal sidor: 5-30

Arbetet syftar till att finna potentiella lösningar, som genom laborativt material i ett undersökande arbetssätt och matematiskt kommunikation, kan öka förståelsen av positionssystemet hos elever i år 4.
Tidigare forskning ligger till grund för vårt val av ålder samt område som svenska elever har uppvisat svårigheter med i matematiken. Dessutom har vi sammanställt vad som kännetecknar en god matematikundervisning samt bedömningsgrunder för vad eleverna ska kunna inom positionssystemet. Det laborativa material vi har valt är Multibas, eftersom det har visat sig vara gynnande vid inlärning av positionssystemet. Med det här utgångsläget har vi framställt fyra potentiella lösningar som kan bidra till ökad förståelse samt frambringar matematiska kommunikationer hos elever i år 4.

Sökord: laborativt material, matematisk kommunikation, Multibas, positionssystemet.

Keywords: mathematic communication, Multibase, number system, visual models.

Postadress	Gatuadress	Telefon
Växjö universitet	Universitetsplatsen	0470-70 80 00
351 95 Växjö		

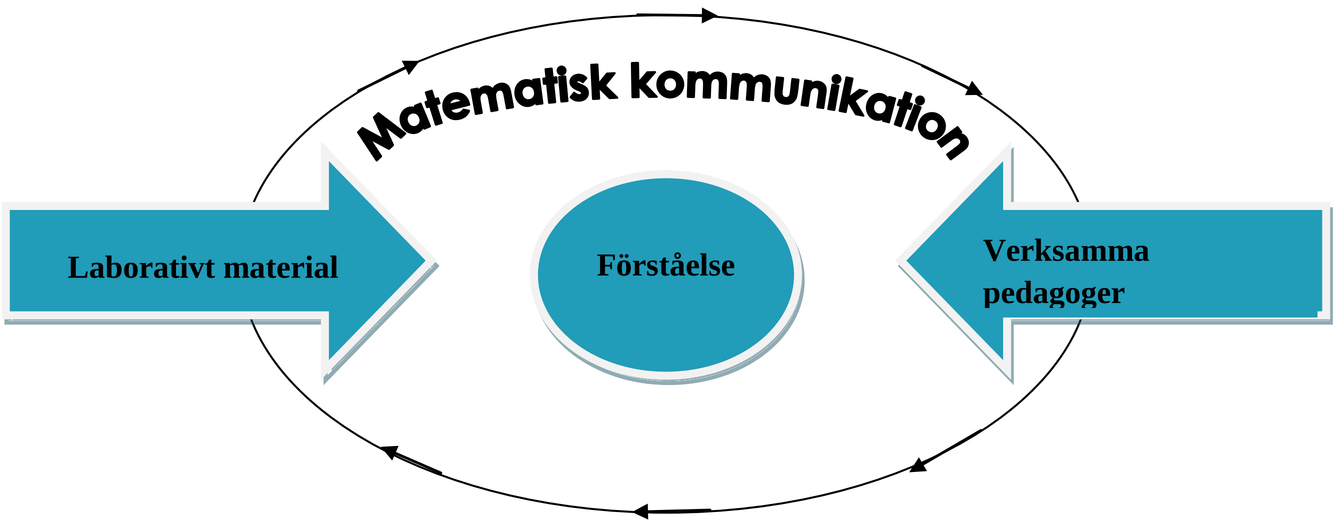
Innehållsförteckning

1. Inledning

Under vår fördjupningskurs i matematikdidaktik på lärarutbildningen vid Växjö Universitet växte vårt intresse för matematik. Våra erfarenheter, efter att ha träffat flera olika verksamma pedagoger, tyder på att en del saknar inspiration och information om vilka material som finns att tillgå samt hur de kan använda dem i sin matematikundervisning. Vi har upplevt att många pedagoger är bundna till enbart ett läromedel. Det visar även en nyligen genomförd studie som presenteras i TIMSS 2007, Trends in International Mathematics and Science Study, där det tydligt framgår att den svenska matematikundervisningen till stor del bygger på läroböcker (Skolverket 2008a). Vidare har en djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper utförts av Skolverket (2008b). I den rapporten framkom det att svenska elever i år 4 klarar sig mindre bra i matematik vad gäller geometri, aritmetik, mätning samt taluppfattning. Vi har även tagit del av den samhällsdebatt som har förts angående svenska elevers försämrade kunskaper inom matematik. De undersökningar Myndigheten för skolutveckling (2007) har gjort visar också på försämrade resultat i två avseenden; den svagpresterande gruppen har ökat samtidigt som den högpresterande gruppen har minskat.

Utifrån TIMSS-studierna valde vi att fokusera på elevers svårigheter med positionssystemet. Vi fann även att forskning i NCTM (2000) stödjer vårt val, då den tyder på att positionssystemet är ett område som elever behöver utveckla sina kunskaper i genom matematisk kommunikation. Det vi anser vara bristfälligt i undervisningen är att den matematiska kommunikationen mellan elever och pedagoger saknas, som i sin tur kan bidra till ökad förståelse inom matematiken. Vidare forskning har visat att elever i stor utsträckning lär sig matematik utan att skapa sig en förståelse för ämnet. Det här har varit ett vanligt förekommande problem under större delen av 1900-talet och fram tills idag (NCTM 2000).

Då en universitetslärare vid institutionen för matematikdidaktik, MSI, nämnde matematikverkstäder insåg vi att en matematikverkstad var något som vårt arbete kunde utgå från. Under hösten 2008 fick vi möjlighet att besöka två varianter av matematikverkstäder i södra Sverige samt åka till Finland för att göra ytterligare studiebesök på två olika verkstäder. Att använda matematikverkstaden som en utgångspunkt såg vi som en källa för att finna ett lämpligt material till vår potentiella lösning av elevernas svårigheter med positionssystemet. I förlängningen skulle den här lösningen kunna leda till ett nyanserat arbetssätt bland verksamma pedagoger som möter ett liknande problem. Efter de här insikterna ville vi finna en potentiell lösning, med ett laborativt material som arbetssätt, för att öka elevernas förståelse genom matematisk kommunikation.



2. Syfte och frågeställning

Utgångspunkten i arbetet är att utifrån TIMSS välja ett område inom matematiken som det har visat sig att elever i år 4 kan ha svårigheter i (Skolverket 2008b). Syftet med arbetet blir därmed att utifrån den teoretiska bakgrunden utforma potentiella lösningar till svårigheten, genom att använda det laborativa materialet Multibas i ett undersökande arbetssätt, som även kan öka den matematiska kommunikationen i matematikundervisningen. Syftet utmynnar i följande frågeställning:

- Hur kan potentiella lösningar med Multibas utformas för att öka förståelsen av positionssystemet genom att använda samt utveckla matematisk kommunikation?

2.1. Avgränsningar

Vi har valt att avgränsa arbetet till att enbart granska hur ett material, Multibas, från en matematikverkstad kan medverka till potentiella lösningar för svårigheter inom positionssystemet. Då vi nämner Multibas, som i sin helhet innehåller komponenter för tre-, fyra-, fem-, sex- och tiobas, menar vi i det här avseendet endast materialet med basen tio. Vi kommer heller inte att undersöka materialet i en elevgrupp, utan lämnar det för vidare forskning.

3. Teoretisk bakgrund

I den teoretiska bakgrunden redogörs för vad tidigare forskning har kommit fram till om matematisk kommunikation utifrån de didaktiska frågorna vad, hur och varför. Därefter framhålls forskning ur NCTM (2000) om vad en givande matematisk kommunikation kan vara. Slutligen återges vad en matematikverkstad och laborativt material är.

3.1. Matematisk kommunikation

Det här avsnittet redogör för olika perspektiv kring matematisk kommunikation ur forskningssynpunkter.

” Communication is an essential part of mathematics and mathematics education”.

(NCTM 2000:60)

Kommunikation inom matematik är ett sätt att ta del av varandras tankar, idéer och därigenom synliggörs förståelsen (NCTM 2000). Genom reflektion och diskussion i kommunikationsprocessen skapas mening och tankarna görs offentliga (a.a.). Dessutom menar Skott (2009) att symboler eller laborativt material är en bra utgångspunkt för att eleverna ska kunna tillägna sig en första tanke kring det matematiska innehållet. I mötet med andra elever uppstår möjligheten att få fler perspektiv och därmed kan förståelsen utvecklas (NCTM 2000). Det har framkommit att samtal som innehåller matematiska tankar från flera perspektiv, gynnar deltagarnas tydliggörande av tankar samt att de kan se ett samband. Vidare har det visat sig att de elever som i samtal ges möjlighet att argumentera för sin lösning, besitter en bättre matematisk förmåga att övertyga sina kamrater i olika synpunkter. Genom att låta eleverna jämföra och diskutera sina lösningar, kan det leda till att de blir mer flexibla problemlösare samt skapar sig en djupare förståelse av olika metoder. Sådana samtal utvecklar ett språk för att uttrycka sina matematiska idéer. Elever som får ta del av varandras tankar, genom diskussioner och argumentationer, tillägnar sig dubbelsidig kunskap som innebär att de kommunicerar för att lära sig matematik samtidigt som de lär sig att kommunicera matematiskt (a.a.). Bergius och Emanuelsson (2008) menar att elever ska arbeta tillsammans med andra, i den proximala utvecklingszonen, för att nå bättre resultat. ”Elever ska inte arbeta med enbart det de kan klara på egen hand, utan med sådant som de kan lära sig tillsammans med någon som kan mer, i det som ligger i angränsande utvecklingszon” (Bergius & Emanuelsson 2008:5). Den ryske psykologen Vygotskij, som även hade ett pedagogiskt intresse, hävdar att det är genom språket som barn ges möjlighet att delta i det sociala samspelet (Vygotskij i Hwang & Nilsson 2006). Då de kan resonera med sig själv, i såväl inre dialoger som verkliga samtal, utvecklas tänkandet (a.a.).

3.1.1. Givande matematisk kommunikation

I den här delen presenteras vad som enligt forskning har visat sig vara god matematisk kommunikation. Vidare belyses pedagogen och elevernas roll i den matematiska kommunikationsprocessen.

Matematik framställs ofta genom symboler, där muntlig kommunikation vanligtvis inte kännetecknas som en betydande del av matematikundervisningen (NCTM 2000). Pedagogen måste träna eleverna i att samtala om matematik på ett naturligt sätt och därmed kommer kommunikationen att utvecklas genom åren i skolan. Elevernas verktyg och sätt att kommunicera ska bli allt mer nyanserat, vilket kräver ett stort engagemang från pedagogerna. För att skapa givande diskussioner måste pedagogerna dessutom utforma intressanta uppgifter som gör att eleverna ’go somewhere’, vilket innebär att elevernas tankar utmanas. Då eleverna redogör för sina tankesätt till olika lösningar genom att till exempel rita, förklara och skriva, påminns eleverna om det delade ansvaret för lärandet under lektionen samt att missförstånd kan upptäckas (a.a.). Det här arbetssättet stöds av kursplanen i matematik för grundskolan, där en utgångspunkt är att eleven ”… utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer” (Skolverket 2000:10). Eleverna kan också använda sig av sitt skrivande i matematik genom att de då kan läsa vad de tidigare gjort under en lektion och reflektera över sin insats (NCTM 2000). I elevernas vidare arbete med matematiska uträkningar och problem kan de gå tillbaka i sitt räknehäfte och finna passande strategier som de återigen kan tillämpa. För en ytterligare ökad kommunikation mellan elever och pedagog kan eleverna uppmuntras till att tänka högt. Det här tillvägagångssättet, tillsammans med genomtänkta frågor från pedagogen och klasskamrater, kan resultera i att eleverna kontrollerar sina tidigare matematiska resonemang (a.a.). Då elever blir medvetna om hur de tänker inför ett problem, menar Vygotskij att de kan förbättra sitt sätt att tänka och förmågan att lösa problem (Vygotskij i Hwang & Nilsson 2006).

”To support discourse effectively, teachers must build a community in which students will feel free to express their ideas” (NCTM 2000:61). För vissa elever är det en utmaning att delta i klassrumsdiskussioner, då de motvilligt gör sin åsikt hörd (NCTM 2000). Det är därför viktigt att skapa en engagerad och stödjande miljö för att ge eleverna möjlighet att våga och vilja tala inför kamraterna om sina upptäckter och upplevelser (Bergius & Emanuelsson 2008). För att uppnå en sådan miljö, med goda matematiska kommunikationer, är det viktigt att ta vara på elevernas utgångspunkter såsom deras intressen samt nyfikenhet (a.a.). En förutsättning för att eleverna sedan ska kunna föra rika konversationer inom matematik, utgår från att de både *kan* och *vill* uttrycka sig samt behärskar språket – det matematiska språket. Inkörsporten till att utveckla ett matematiskt språk kan gå via det vardagliga språket, där eleverna görs delaktiga genom det språk de redan besitter (NCTM 2000; Bergius & Emanuelsson 2008). Pedagogens roll i den här processen blir att synliggöra sådana ord som eleverna redan använder i sitt vardagsspråk och som kan appliceras i matematiska sammanhang (NCTM 2000). Exempel på sådana ord kan vara mindre, större, hälften och hel. Eleverna kan även nå det matematiska språket genom tillägnelse, då de i ett tidigt skede får ta del av matematiska uttryck som sätts in i sammanhang och som de med tiden skapar en förståelse för (Skott m.fl. 2008). Flera olika studier har visat att elever i år 3-4 ändrar inställning till matematiken. Då den upplevs som enskild och med tyst arbete utan kommunikation med andra, menar eleverna att det påverkar deras inställning negativt. Det behövs utmaning samt uppmuntran för att behålla elevers lust att lära (Bergius & Emanuelsson 2008).

Det är pedagogens uppgift att göra eleverna medvetna samt få dem att uppskatta den styrka och makt som ett matematiskt språk medför (NCTM 2000). När eleverna börjar skolan är det betydelsefullt att pedagogen hjälper dem att utbyta sina tankar med klasskamraterna, eftersom de i tidiga åldrar har svårt för att inta andras perspektiv. Det är även ”… viktigt att vårt matematikämne, inte minst för unga elever, också relateras till språk, rytm, rörelse och bild” (Bergius & Emanuelsson 2008:2). Då de kanske ännu inte ha lärt sig att skriva, måste de använda sig av andra medel som till exempel att rita bilder samt muntlig kommunikation. Med det här utgångsläget ges eleverna en möjlighet att utveckla ett matematiskt skrivande, vilket inte skiljer sig nämnvärt från andra skrivprocesser. Efter hand kommer de att lära sig skriva ord och meningar, vilket leder till att de även skriftligt kan ta del av varandras tankegångar. Med tiden blir texterna mer detaljerade och anpassade efter mottagare (NCTM 2000). Gradvis ökar elevernas kunskaper och de kan i matematiken uttrycka sig på olika sätt genom såväl bilder och tal som mer formell skrift i form av terminologi (Lpo94 i Lärarförbundet 2006; NCTM 2000). Under skolgången tränar sig eleverna att successivt ta mer ansvar och delta i helklassdiskussioner. För att kommunikationerna ska bli rikare krävs det att de blir bättre på att lyssna, ställa frågor samt tyda varandras idéer. Det här leder till att eleverna förväntas bli skickligare på att argumentera och att dra slutsatser byggda på tidigare kunskaper. I slutet av skolgången ska eleverna ha som mål att kunna använda ett väl fungerande matematiskt språk, som presenterar tydliga och korrekta argument (a.a.).

3.2. Matematikverkstad

I kommande stycke beskrivs vad, hur och varför en matematikverkstad kan gynna matematikundervisningen.

Syftet med en matematikverkstad är att det ska locka fram elevers nyfikenhet, kreativitet och fantasi som ska bidra till positiva upplevelser samt upptäckter av matematik. Matematikverkstaden ska skapa vidgade och fördjupade kunskaper hos alla elever, såväl de som kräver en extra utmaning som de med behov av särskilt stöd. Då laborativt material finns att tillgå, innebär det inte med automatik att undervisningen blir mer intressant. En avgörande faktor för hur verkstaden kan nyttjas maximalt, är att lärare och elever är medvetna om syftet samt fokuserar på det matematiska innehållet (Rystedt & Trygg 2005). Rystedt och Trygg (2005), som båda har ett förflutet inom läraryrket och nu är anställda vid Nationellt Centrum för Matematikutbildning NCM, har utvecklat en matematikverkstad samt skrivit en tillhörande handledning. Rystedts och Tryggs utopi är att en matematikverkstad alltid ska vara en plats för lustfullt lärande, men kan utformas på olika vis. Den optimala matematikverkstaden är till ramarna en fylld lokal med laborativt material avsett för matematik. Innehållet ska ständigt utvecklas av pedagogen och elever samt gynna undervisningen.

I en matematikverkstad ges det möjlighet att arbeta på ett laborativt sätt, vilket kan bredda perspektivet på ämnet matematik (Rystedt & Trygg 2005). Laborativa aktiviteter kan även skapa förförståelse och synliggöra matematikens olika sidor. Alla elever är olika och det är av stor betydelse att pedagogen möter den enskilde individen, vilket leder till att undervisningen ska vara variationsrik. Däremot är det viktigt att inte bara stärka elevernas olikheter utan sträva efter att förena deras kunskaper för att de ska kunna skapa rika matematiska kommunikationer (a.a.).

Längre bakåt i tiden sett, har större delen av den grundläggande matematiken skapats från ett vardags- eller yrkesbehov (Löwing & Kilborn 2002). I dagens undervisning har den här kopplingen försvagats. Många räkneoperationer har fått en mer abstrakt karaktär än vad som är nödvändigt. Ett sätt att göra matematikundervisningen mer förståelig är användningen av laborativt material samt att gå tillbaka till matematikens rötter i vardagen (a.a.). Noterbart är att laborativt material är dött i sig och kräver att pedagogen har insikt om de didaktiska frågorna vad, hur och varför för att levandegöra materialet (Löwing & Kilborn 2002; Rystedt & Trygg 2005).

3.2.1. Laborativt material

Den här delen definierar vad ett laborativt material är, hur och varför elever ska ges möjlighet att arbeta med det i matematiken.

”Den gyllene regeln för lärare: allt skall så mycket som möjligt visas fram inför sinnena”

(Comenius i Rystedt & Trygg 2005:20)

Laborativt material används för att konkretisera en matematisk händelse eller räkneoperation (Löwing & Kilborn 2002). Det är viktigt att poängtera att det inte får benämnas vid konkret material (a.a.). Laborativt material är icke levande och löser inga problem, men genom att använda det för att tydliggöra operationer samt tankar har det nyttjas i ett konkretiserande syfte (Löwing & Kilborn 2002; Skott 2009). Det konkreta arbetssättet bör vara utgångspunkten för kunskapsprocessen inom matematik (Malmer 2002). För att det ska bli meningsfullt krävs det att materialet sätts in i ett genomtänkt sammanhang (a.a.). Laborativa aktiviteter ska verka som en brygga mellan det konkreta och det abstrakta, som förbinds med representationsformer (Malmer 2002; Rystedt & Trygg 2005). Den här kunskapsprocessen ska utmynna i att eleven ska kunna tillämpa sin nyförvärvade kunskap i nya och delvis förändrade moment (Malmer 2002). För att den här processen ska bli fulländad krävs det att eleverna kommunicerar genom till exempel reflektion, argumentation samt diskussion (a.a.).

I ett laborativt arbetssätt ges eleverna möjlighet att undersöka matematik med sina sinnen, då de får känna, se, lyssna, ta i och på ett kreativt sätt hantera olika material (Malmer 2002). Piaget, en inflytelserik teoretiker inom ämnet pedagogik och kunskapsteori, menar i det här avseendet att handen fungerar som hjärnans förlängda redskap (Piaget i Malmer 2002). Det här arbetssättet är till stor nytta, speciellt för de elever som har brister inom något område, då de får ta del av flera olika uttryckssätt och därefter använda sig av den som de känner sig mest trygg med (Malmer 2002). Det viktigaste i arbetet med laborativt material är att det ska ses som en naturlig och integrerad del av undervisningen (Rystedt & Trygg 2005). Materialet används för att göra matematiska modeller till konkreta händelser. Det ger eleverna tillfälle att på egen hand undersöka och samtidigt verka som ett demonstrationsmedel för valda delar inom matematiken. På samma sätt som för eleven, fungerar det laborativa materialet som ett redskap för pedagogen i undervisningen att påvisa abstrakta begrepp (a.a.).

3.3. Undervisning för att skapa förståelse

Följande delar ska enligt Malmer (2002) ingå i undervisningen för att inlärningen ska bli effektiv samt för att alla elever ska skapa sig en förståelse.

Erfarenhet/Ordförråd innebär att undervisningen utgår från något som eleverna har varit med om eller känner igen. Eleverna ges möjlighet att tala och tänka om sina upplevelser. En förutsättning för att de ska nå dit, är att pedagoger arbetar medvetet med att öka elevernas ordförråd (Malmer 2002).

Konkret handlande går ut på att elever arbetar med laborativt material. Då eleverna på ett kreativt sätt får ta del av flera perceptionsvägar, ökar deras delaktighet i inlärningsprocessen. Genom ett välplanerat laborativt arbetssätt skapar eleverna även ett inre bildarkiv som kan stödja dem i deras tankar (Malmer 2002).

Representationsformer betyder att eleverna ritar bilder, figurer, mönster och skapar sig inre illustrationer som representerar deras konkreta handlande (NCTM 2000; Malmer 2002). Eleverna ska kunna röra sig mellan fysiska modeller och abstrakta beräkningar genom olika representationsformer (McIntosh 2008). Den här förmågan underlättar för att eleverna ska kunna se sambandet mellan det konkreta och abstrakta. På det här sättet kan eleverna strukturera sina tankar som kan vara en övergång till abstraktion (a.a.).

Abstrakt/Symboler syftar till att eleverna använder sig av vedertagna symboler för matematiska uttryck och mönster. Det är viktigt att låta eleverna göra en muntlig framställning av sina symboler för att tydliggöra sin förståelse (Malmer 2002).

Tillämpa innebär att eleverna ska kunna sätta in sina nya kunskaper i andra sammanhang genom generalisering. Då eleverna kan tillämpa sina nyförvärvade kunskaper, kan de använda sitt inre bildarkiv och överföra sina insikter i nya situationer (Malmer 2002).

Inom *kommunikationen* är det eftersträvansvärt att eleverna reflekterar, argumenterar samt diskuterar sitt matematiska handlande för att medvetandegöra och delge varandra sina tankar (Malmer 2002).

4. Metodologiska överväganden

Under följande avsnitt kommer vi att presentera vårt val av område, positionssystemet, som elever i år 4 har uppvisat svårigheter i. Vidare tar vi upp vad som kännetecknar en god undervisning samt vad som är specifikt i undervisningen med positionssystemet. Därefter lägger vi fram kriterier för vad eleverna ska kunna inom området samt potentiella lösningar till svårigheten med hjälp av Multibas.

4.1. Val av svårighet

En nyligen genomförd djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper i år 4 och 8 har utförts av Skolverket (2008b) och presenteras i TIMSS 2007. I den rapporten framkom det att svenska elever i år 4 klarar sig mindre bra i matematik vad gäller geometri, aritmetik, mätning samt taluppfattning (a.a.). Utifrån vår inriktning på lärarutbildningen som är grundskolans tidiga år, den ovannämnda analysen och i samband med vår nyförvärvade kunskap om laborativt material, valde vi att fokusera på svårigheter som elever i år 4 uppvisat inom positionssystemet. Vi fann även att forskning i NCTM (2000) stödjer vårt val, då den tyder på att positionssystemet är ett område som elever i år 3-5 behöver utveckla sina kunskaper i samt att de ska kunna föra rika matematiska kommunikationer.

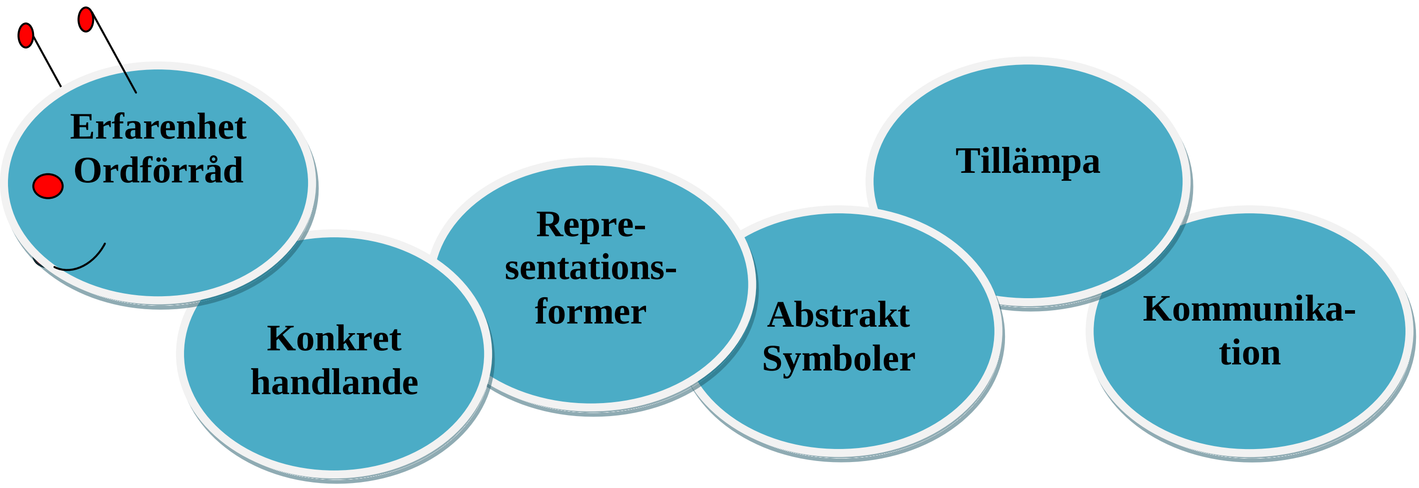
4.2. Undervisning som skapar förståelse

En viktig förutsättning för att skapa en gynnande matematikundervisning är en öppen och tillåtande klassrumsmiljö (NCTM 2000). Enligt NCTM bör en klassrumsmiljö som stödjer den matematiska inlärningen uppfylla följande kriterier där eleverna: känner trygghet, tillåts att göra och korrigerar misstag, ges belöning för goda insatser och framsteg samt själva tänker igenom och argumenterar för sina lösningar.

För att eleverna ska tillägna sig en god förståelse inom matematiken ställs det stora krav på undervisningen. Elever i år 3-5 uttrycker själva att matematik är praktiskt att kunna och upplever att det de lär sig är viktigt (NCTM 2000). Om matematikundersvisningen, under de skolåren, är intressant, begriplig och sätts i ett sammanhang kan elevernas engagemang och entusiasm öka (Myndigheten för skolutveckling 2003; NCTM 2000). Blir istället undervisningen en process av memorering och upprepning, kan eleverna tappa intresset för ämnet (NCTM 2000). Riktlinjerna för en god matematikundervisning blir därför att innehållet ska stimulera till såväl aktivitet som intellekt, vilket menas att eleverna ska involveras i reflekterande aktiviteter. Det här undervisningssättet kan hjälpa eleverna att stärka deras lärande samt skapa sig en matematisk förståelse (Myndigheten för skolutveckling 2003; NCTM 2000).

Ytterligare en faktor som verkar för en god matematisk undervisning är ett varierande arbetssätt (Myndigheten för skolutveckling 2003). I en variationsrik undervisning ska pedagogen eftersträva att välja lämpliga uppgifter, där elevens egen förmåga att utforska och söka kunskap är i fokus (Myndigheten för skolutveckling 2003; NCTM 2000). Eleverna kan öka sin produktivitet då de på egen hand ges möjligheten att lösa uppgifter, utforska matematiska tankar på ett flexibelt sätt samt inta flera olika perspektiv (NCTM 2000). För att eleverna ska kunna inta andras perspektiv är det till fördel om undervisningsmiljön genomsyras av en vilja till att kommunicera, respekt för varandras argument och ståndpunkter samt eftersträvar gemensamma beslut (Myndigheten för skolutveckling 2003). I förhållande till läroplanen för grundskolan stämmer det här undervisningssättet väl överens då skolan ska eftersträva att eleverna ”… utvecklar nyfikenhet och lust att lära” (Lärarförbundet 2006:14).

Masken - Matematik Ska Engagera



(Inspirerad av Malmer 2002)

Vi har tagit fram den här modellen utifrån Malmer (2002) som menar att de här inlärningsnivåerna ska vara med i undervisningen för att eleverna ska få en effektiv inlärning samt skapa sig en förståelse. Modellen kommer vi att ha i åtanke då vi utformar vårt potentiella undervisningsupplägg.

4.2.1. God undervisning inom positionssystemet

För att eleverna ska lära sig positionssystemet med basen tio, behöver de utveckla en förståelse för talen i såväl modeller som kontext. Ett exempel kan vara att bygga olika modeller med laborativt material, eftersom eleverna på så sätt blir bekanta med talens struktur, värde och relation som kan leda till att de kan arbeta mer flexibelt (NCTM 2000). I likhet med NCTM tyder även Malmers (2002) erfarenheter på att eleverna behöver en åskådlig och visualiserad bild av positionssystemet, då hon anser att det är ett av de viktigaste momenten för att elevernas ska kunna tillägna sig en säker taluppfattning. Forskningen i NCTM (2000) har kommit fram till att eleverna i årskurser 3-5 ska använda modeller och andra strategier, såsom miniräknaren, för att gestalta och undersöka decimaltal. Vidare bör eleverna även få möjlighet att, genom olika aktiviteter, granska relationen mellan bråk och decimaltal. Eleverna kan på så vis få en djupare insikt av vad talen står för och ett annat perspektiv på talens likvärdighet (NCTM 2000).

4.3. Vad eleverna ska kunna inom positionssystemet

Då eleverna går i år 4 finner vi inga exakta direktiv om vad de ska kunna inom positionssystemet. Vi kommer därför att använda oss av kursplanen i matematik för att bryta ner strävans- samt uppnåendemål för år 5. Vidare nämner NCTM: Principles and Standards (2000) vad eleverna i år 3-5 ska och förväntas kunna inom matematik. De här underlagen utmynnar i följande kriterier om vad eleverna ska kunna inom positionssystemet samt en tillhörande matris (bilaga 1).

Undervisningen skall sträva mot att eleven:

- utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang,
- muntligt och skriftligt förklarar och argumenterar för sitt tänkande,
- lär sig att lyssna, diskutera, argumentera och använda sina kunskaper som redskap för att formulera och pröva antaganden och lösa problem,
- reflekterar över erfarenheter och kritiskt granskar och värderar påståenden och förhållanden.

Efter att ha avslutat år 4 skall eleven:

- ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i decimalform,
- förstå platsvärdet i tiosystemet samt kunna visa och jämföra hel- och decimaltal,
- använda sig av visuella modeller och likvärdiga termer i decimaltal.

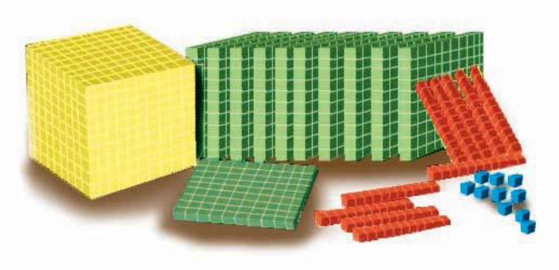
(Kursplanen i matematik för grundskolan i Skolverket 2000;
Lpo94 i Lärarförbundet 2006; NCTM 2000)

4.4. Multibas

Multibas är ett strukturerat, 3-dimensionellt, material i trä eller plast med tydliga markeringar. I materialet ingår tusenkub, hundraplattor, tiostavar och entalskuber. Det här är vad som vanligtvis utgör Multibas, men för vår del kommer även kompletterande delar som tiondel, hundradel och tusendel finnas representerade. Multibas är ett lämpligt material för att konkret illustrera och arbeta med många olika områden inom matematiken, t ex: antal, bråk, procent, decimaler, positionssystemet, mätning, volym och de fyra räknesätten (lar-lek.se 2009).

Ett utgångsläge i arbetet med vår potentiella lösning är att varje elev får ett underlag i form av ett papper där positionssystemet är representerat i spalter (bilaga 2). Det här underlaget verkar som stöd till Multibas vid kommande uppgifter inom positionssystemet. För att eleverna ska kunna använda underlaget flera gånger kommer det att vara laminerat och varje elev är utrustad med en OH-penna. Utöver det här kommer även eleverna att vid varje uppgift få en frågeguide (bilaga 3) med frågor att besvara, i förhoppning att öka den matematiska kommunikationen. De frågor som ska genomsyra uppgifterna och som finns med i guiden är:

- Vad har jag/vi gjort?
- Hur gjorde jag/vi?
- Varför gjorde jag/vi på det här sättet?
- Kan jag/vi göra på något annat sätt, i så fall hur?



Vi har valt att använda Multibas som laborativt material för att ge eleverna möjlighet att öka sin förståelse av positionssystemet samt skapa givande matematiska kommunikationer. Anledningen till att vi valt att arbeta med det kompletterande materialet beror på vårt besök i Finland, då vi för första gången kom i kontakt med det. Pedagogerna i Finland använde sig med fördel av materialet i matematikundervisningen med positionssystemet. De förklarade även för oss hur det kompletterande materialet underlättade för eleverna, eftersom de då inte behöver omvandla materialets ursprungsvärden när de arbetar med decimaltal. Vidare är symboler och laborativt material ett bra utgångsläge för att eleverna ska kunna tillägna sig en första tanke kring det matematiska innehållet. I mötet med andra elever uppstår möjligheten att få fler perspektiv och därmed kan förståelsen samt språket utvecklas.

5. Potentiellt undervisningsupplägg

Nedan följer instruktioner för hur pedagogen ska förhålla sig i undervisningen till de efterföljande fyra potentiella lösningarna av positionssystemet.

5.1. Pedagogens roll i undervisningen

Undervisningen av positionssystemet inleds med att pedagogen delar ut matrisen (bilaga 1) samt går igenom den med de mål eleverna ska uppnå efter avslutat arbete, vad de ska kunna samt hur de visar att de kan. Pedagogen förklarar även hur matrisen används vid bedömning av elevernas kunskaper och poängterar att elevernas egna bedömningar är av stor betydelse vid slutbedömningen. Under genomgången kan eleverna ställa frågor till pedagogen om matrisen och hur den är upplagd.

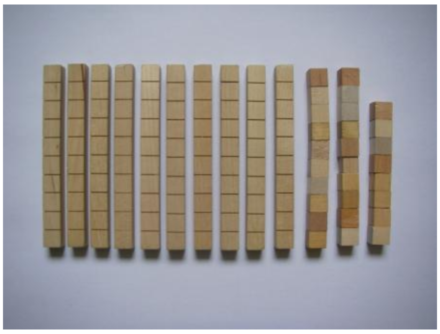
Med den här utgångspunkten är det sedan pedagogens uppgift att presentera positionssystemet, underlaget (bilaga 2) och Multibas. Pedagogen delar ut underlaget och har sedan en genomgång av positionssystemet där den förklarar hur det är uppbyggt samt hur underlaget används. Genomgången ska även bestå av hur de olika värdena kan omvandlas genom att till exempel tio ental är lika mycket som ett tiotal och vidare. Därefter introducerar pedagogen Multibas, vilka olika delar det innehåller samt hur det med fördel kan användas. Eleverna ska sedan ges möjlighet att laborera med det tillsammans med sitt underlag, för att de ska få en tydligare bild av hur materialet och underlaget kan fungera ihop. Det är pedagogens uppgift att formulera tal som alla i klassen sedan får gestalta med sitt material, samtidigt som samma tal visas på tavlan och förklaras av pedagogen. Säger pedagogen till exempel talet 15, är det elevernas uppgift att lägga det med hjälp av underlaget och Multibas. Därefter lyfter pedagogen elevsvar för att skapa sig en bild av vad eleverna befinner sig. Vidare går pedagogen igenom rätt svar samt förklarar hur talet är uppbyggt med underlaget som stöd. Det är viktigt att pedagogen observerar att femton ental är lika mycket rätt som att lägga ett tiotal och fem ental. Uppstår den här situationen kan pedagogen med fördel använda den som ett exempel på växling samt hur de olika värdena förhåller sig till varandra.

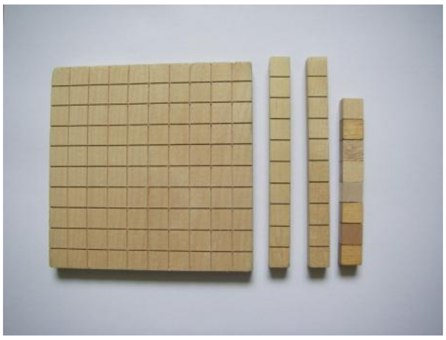
I undervisningen av de fyra kommande potentiella lösningarna ska pedagogens förhållningssätt dels vara ett stöd för att utveckla och uppmuntra eleverna i deras arbete och dels verka som en handledare för att elevernas egen förmåga ska visa sig samt utmanas. Under uppgifterna finner pedagogen ett stöd, i sitt förhållningssätt till eleverna, genom frågeguiden och andra genomtänkta frågor som till exempel: Kan du se ett samband med uppgiften och ett problem som har/kan uppstå i verkligheten? Ytterligare frågor som kan väckas av pedagogen i diskussioner med eleverna är: Kan ni se ett samband mellan de olika uppgifterna samt tillhörande lösningar? Om någon elev/elever svarar på en lösning muntligt, kan pedagogen fråga om de även kan gestalta lösningen med hjälp av Multibas och/eller andra representationsformer såsom mönster eller rita. Det är även viktigt att pedagogen låter alla elever använda det språk som de känner sig mest bekväma med, oavsett om det är ett avancerat matematiskt språk eller ett vardagsspråk med matematiskt karaktär.

5.2. Potentiell lösning 1- Taluppfattning

Forskning i TIMSS 2007 (Skolverket 2008b) tyder på att elever i år 4 har svårigheter med växlingsförfarande särskilt vad gäller subtraktion. För att eleverna ska ges en tydligare bild av olika tals uppbyggnad, kan meningsfullt arbete med Multibas vara en potentiell lösning för att skapa sig en sådan. Eleverna delas in i grupper om 3-4 personer, där de ska ha en gemensam uppsättning av Multibas och de som vill kan ha med sig sitt underlag som stöd. I gruppen turas eleverna om att bestämma ett tal som alla därefter enskilt ska gestalta och sedan presentera för sina kamrater. För de elever som inte är i behov av att använda Multibas då de bygger talen, kan använda sig av andra representationsformer såsom att rita bilder. Utifrån frågeguiden diskuterar eleverna sina lösningar efter varje gestaltat tal. Eleverna ska försöka komma på mesta möjliga antal lösningar som står för ett och samma tal. Den här uppgiften pågår tills alla elever i gruppen har fått bestämma tal minst en gång.

Exempel:





Två förslag på hur talet **128** kan gestaltas.

5.2.1. Modellens delar i lösningen

Utifrån den modell som vi har tagit fram, med inlärningsnivåer som ska ingå i undervisningen, anser vi att följande delar finns med i den första lösningen. I lösningen utgår varje elev från sitt ordförråd och erfarenheter då de får bestämma ett tal som kamraterna ska gestalta. Därefter kommer delen om konkret handlande in när de gestaltar det nämnda talet med Multibas. De elever som inte är i behov av att använda Multibas kan använda sig av andra representationsformer såsom att rita bilder, vilket utgör en del av modellen. Den kunskap eleverna tillägnar sig i den här lösningen kan de sedan tillämpa i de nästkommande uppgifterna. Slutligen innefattar uppgiften kommunikation då de ska diskutera sina lösningar efter varje byggt tal.

5.2.2. Matematisk kommunikation

I det här arbetsupplägget ges eleverna möjlighet att redogöra för sina tankesätt till de olika lösningarna då de bygger, använder sig av olika representationsformer, förklarar och diskuterar med varandra. På det här sättet utbyter eleverna förslag och idéer med varandra.

För att skapa givande diskussioner har eleverna frågeguiden som stöd, där deras tankar utmanas och som i förlängningen kan leda till att de ’go somewhere’ genom den här uppgiften. Den matematiska kommunikationen som elever för kring lösningarna, kan leda till att missuppfattningar upptäcks och kan därefter åtgärdas. Missuppfattningarna kan upptäckas av såväl pedagog som klasskamrater och kan i sin tur skapa nya diskussioner. Vi anser därmed att den här uppgiften ger eleverna goda möjligheter till att utveckla sin matematiska kommunikation.

5.2.3. Matematiskt innehåll

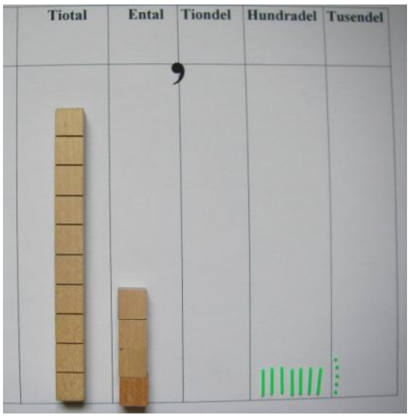
Av den orsaken att det har visat sig att elever har svårigheter med växling, anser vi att den här uppgiften ger eleverna goda tillfällen att genom den matematiska kommunikationen öka sin förståelse för talens uppbyggnad. Då eleverna tar del av den diskussion som förs i samband med att de visuella modellerna visas, kan de upptäcka att ett tal kan gestaltas på olika sätt. Vi menar att eleverna på så sätt får en insyn i att till exempel hundra kan bestå av ett hundratal, tio tiotal eller hundra ental. När de har skapat sig den här förståelsen, kan det underlätta för dem när de sedan ska växla. Vi anser att eleverna genom den här uppgiften kan skapa sig en grundläggande taluppfattning.

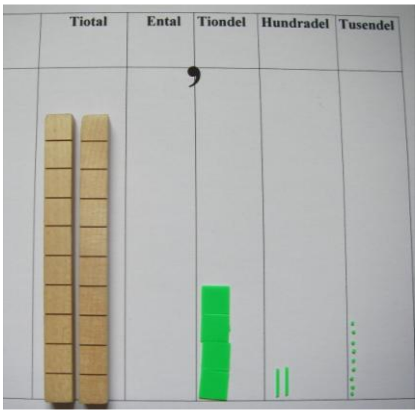
Det vi kan tänka oss vara problematiskt med uppgiften är att inte alla elever blir tillfredställda om de inte arbetar tillsammans med kamrater som befinner sig på en snarlik kunskapsnivå. Om grupperingarna är för ojämna kan utmaningen antingen bli för stor eller för liten, vilket kan resultera i att eleverna tappar lusten att lära. Följden av den ojämna gruppkonstellationen kan även vara att några elever blir mindre delaktiga och inte uppnår önskad utveckling. En bristande uppmuntran från pedagog och klasskamrater är något som också kan leda till att elevens intresse för matematiken falnar. Därför är det av stor vikt att miljön i klassrummet är stödjande och har en positiv anda.

5.3. Potentiell lösning 2 – Visuella modeller och likvärdiga termer

Då forskning har visat att elever kan ha flera olika uppfattningar av samma begrepp är det en fördel att ha gemensamma diskussioner i helklass ledda av pedagogen. De olika uppfattningarna kan vara felaktiga såväl som korrekta och genom samtal i helklass bekräftas de korrekta samt att missuppfattningarna successivt försvinner (Skolverket 2008b). För att eleverna ska kunna röra sig mellan visuella modeller och likvärdiga termer, använder vi oss av Multibas för att konkretisera det abstrakta. Eleverna ska i den här uppgiften arbeta tillsammans med en kamrat och använda sig av sitt underlag, OH-penna samt Multibas. Till en början lägger en av eleverna ett tal med hjälp av Multibas, där det sedan blir kamratens uppgift att läsa av modellen samt skriva talet i termer. Nästa delmoment går ut på att en av eleverna skriver ett decimaltal och kamraten bygger en visuellmodell. För de elever som vill, går det lika bra att använda sig av olika representationsformer då de gestaltar talen. Tillsammans blir det deras uppgift att läsa av modellen och se om den stämmer överens med det skrivna decimaltalet samt undersöka om det går att gestalta talet på något annat sätt. Slutligen ska varje par presentera sina olika lösningar till ett tal inför hela klassen. Under båda övningarna turas eleverna om att vara den som bygger och skriver.

Exempel:





De visuella modellerna visar talen **14,075** respektive **20,429**.

5.3.1. Modellens delar i lösningen

Utifrån den modell som vi har tagit fram med inlärningsnivåer som ska ingå i undervisningen, anser vi att följande delar finns med i den andra lösningen. Den här uppgiften bygger på att eleverna lägger ett tal, vilket de har fått erfarenhet från i föregående uppgift. Vidare finner vi både konkret handlande och symboler då de använder Multibas för att konkretisera det abstrakta, det vill säga från visuella modeller till likvärdiga termer. När eleverna gestaltar talen går det lika bra att de använder sig av olika representationsformer. De kunskaper eleverna förvärvar sig i den här uppgiften, kan de tillämpa i uppgift tre som bygger vidare på positionssystemet. Delen som utgörs av kommunikation finner vi under uppgiftens gång samt i slutet då de ska presentera sina olika lösningar inför klassen.

5.3.2. Matematisk kommunikation

För att eleverna ska tillägna sig ett matematiskt språk, kan den här uppgiften vara en inkörsport då de får användning av det vardagsspråk som de redan besitter. I uppgiften ges de nämligen möjlighet att tillsammans med en kamrat diskutera, argumentera och förklara sina olika lösningar. Frågeguiden som eleverna blivit tillhandahållna är en bra utgångspunkt, tillsammans med pedagogen som handledare, för att givande matematiska kommunikationer ska uppstå. Vidare menar vi att uppgiften till viss del förutsätter att eleverna både kan och vill uttrycka sig, för att de ska kunna föra rika konversationer inom matematik. Pedagogens handledning samt den goda uppbyggda klassrumsmiljön är faktorer som ligger till grund för att eleverna skapar de förutsättningar som krävs för givande matematiska kommunikationer. Pedagogen måste träna eleverna i att samtala om matematik på ett naturligt sätt och därmed kommer kommunikationen att utvecklas genom åren i skolan.

5.3.3. Matematiskt innehåll

En fördel med att eleverna använder laborativt material, är att det går att konstruera visuella modeller som tydliggör talen och som samtidigt är mer flexibla än de bilder som förekommer i läroböckerna. Eleverna blir dessutom mer delaktiga i den matematiska processen, då de i den här uppgiften själva får bygga modeller parallellt som de förklara och argumentera för sina lösningar. Vidare får eleverna prova på att kontrollera såväl sina egna som kamratens lösningar och därmed kan deras tankar utmanas. Genom det här arbetssättet tränas eleverna i att överföra visuella modeller till ett decimaltal och vice versa.

Något som vi anser kan vara mindre bra med det här upplägget är att den ena eleven kan bli styrd av den andra när de arbetar parvis. Därför är det viktigt att kemin mellan eleverna fungerar bra, att de har tålamod samt att pedagogen har skapar ett tillåtande klimat i klassrummet.

5.4. Potentiell lösning 3 – Hel- och decimaltal

Forskning i TIMSS presenterar att år 4 elevers lösningsfrekvens, vad gäller skillnaden mellan hel- och decimaltal, inte är tillfredställande nog. För att öka elevernas kunskaper inom det här området anser vi att matematisk kommunikation, stöd av ett material samt pedagogens handledning bidrar till den utvecklingen. En potentiell lösning kan vi finna då Multibas används som stödmaterial tillsammans med aktiv pedagogisk närvaro. Den här uppgiften, som utförs tillsammans med en kamrat, innebär att eleverna ska bygga hel- och decimaltal. Pedagogen ger eleverna angivna tal som till exempel 10,0 och 0,10. Det blir därefter elevernas uppgift att på egen hand bygga en modell av varsitt tal med Multibas och sedan redogöra för sin lösning samt kännetecken för talen inför kamraten. Nästa steg blir att eleverna kan jämföra och diskutera vad som skiljer talen åt, då till exempel ett tal bestående av samma siffror placeras i olika spalter.

Exempel:

De visuella modellerna ska gestalta **1** och **0** som ett tiotal och som en tiondel.

5.4.1. Modellens delar i lösningen

Utifrån den modell som vi har tagit fram med inlärningsnivåer som ska ingå i undervisningen, anser vi att följande delar finns med i den tredje lösningen. Erfarenheter från föregående uppgifter stödjer eleverna när de i den här uppgiften ska bygga hel- och decimaltal. När de gestaltar sina tal, gör de det genom konkret handlande med hjälp av Multibas. De tal som eleverna gestaltar har de fått genom matematikens abstrakta symbolspråk. Tillämpning finns med i uppgifter, där eleverna kan generalisera sina nya kunskaper och använda till nästkommande uppgift. Då eleverna redogör för sin lösning, jämför och diskuterar talen krävs det kommunikation och därmed genomsyrar det uppgiften.

5.4.2. Matematisk kommunikation

I uppgiften tränar sig eleverna på att lyssna, ställa frågor samt tyda varandras idéer och tankar, vilket krävs för att rika matematiska kommunikationer ska uppstå. Då de arbetar i par samt att lösningen förutsätter att de samtalar med varandra, kan det leda till att eleverna förväntas bli skickligare på att argumentera och komma fram till slutsatser byggda på tidigare kunskaper. Det som kan tänkas vara en nackdel med uppgiften är att det kan uppstå svårigheter för de elever som ännu inte har det matematiska språket. Vår uppfattning är att de eleverna kan känna sig underlägsna, som i sin tur kan påverka dem till att de inte våga uttrycka sig och delta med sin maximala kapacitet. Det kan även leda till att elevernas matematiska språkutveckling hämmas samt att deras intresse för matematiken minskar. I en sådan situation är det viktigt att pedagogen betonar att det är accepterat att använda sig av vardagsspråket samt synliggöra sådana ord som eleverna redan besitter och kan appliceras i matematiska sammanhang. Slutligen menar vi att Multibas kan vara ett stöd för att utveckla ett matematiskt språk då det konkretiserar det abstrakta samtidigt som de får sätta ord på sina tankar.

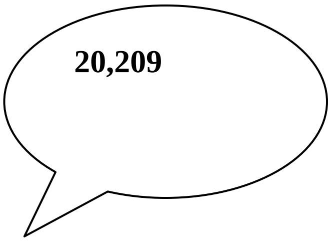
5.4.3. Matematiskt innehåll

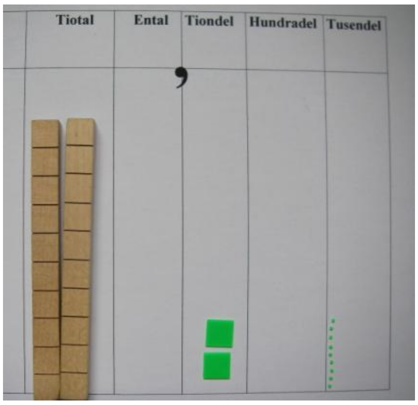
Utöver det matematiska språket, som eleverna använder, är det viktigt att de även ser till det matematiska innehållet i diskussionen där de kan skapa sig en förståelse för hel- och decimaltal. När de samtalar och jämför sina olika visuella modeller, blir det tydligt att de olika spalterna representerar olika värden, eftersom eleverna kan se att till exempel entalskuben är större än tiondelsbrickan samt att det ryms tio tiondelar på en entalskub. Beroende på antal tomma spalter före siffran 1, som den här uppgiften utgår från, synliggörs det vilken betydelse nollan har. Då eleverna får gestalta det här på egen hand genom ett konkret handlande, är vår förhoppning att de på så sätt skapar sig en uppfattning om nollans innebörd som kan vara avgörande. Vi anser att det här blir särskilt tydligt då eleverna har tillgång till underlaget och Multibas i samband med att de genomför samt diskuterar uppgiften utifrån frågeguiden.

5.5. Potentiell lösning 4 – Platsvärde

Det är enligt nationell forskning känt att elever i år 4 har vaga uppfattningar angående begreppet platsvärde, då studier har visat att elever kastar om siffror i tal (Skolverket 2008b). För att eleverna ska tillägna sig kunskaper om talens platsvärde i positionssystemet, finner vi en potentiell lösning med att sammanföra olika representationsformer med utgångspunkt i Multibas. Den här uppgiften ska utföras i helklass och bygger på att pedagogen säger ett tal inför klassen, utan att skriva upp det på tavlan. Därpå ska eleverna gestalta det nämnda talet på sitt underlag med Multibas. Efter att alla har byggt sin modell ska de jämföra och diskutera sina svar samt bestämma siffrornas värde med en kamrat. Efter att ha fastställt siffrornas värde skriver de talet i termer under rätt spalt på underlaget. Med den här utgångspunkten kommer pedagogen att lyfta ett flertal elevsvar i helklass. Det underlag som eleverna har som stöd kommer även pedagogen att ha på stordia för att tydliggöra och låta eleverna visa sina svar på.

Exempel:





Pedagogen säger talet **20,209** som kan gestaltas enligt bilden.

5.5.1. Modellens delar i lösningen

Utifrån den modell som vi har tagit fram med inlärningsnivåer som ska ingå i undervisningen, anser vi att följande delar finns med i den sista lösningen. Till den här uppgiften har eleverna samlat på sig erfarenheter från de tre tidigare uppgifterna. Då pedagogen säger ett tal ska eleverna, genom konkret handlande eller olika representationsformer, gestalta det nämnda talet på sitt underlag. Den abstrakta delen utgörs av talet som pedagogen säger till eleverna. Vidare har eleverna nu skapat sig en viss förståelse för positionssystemet som de kan tillämpa vid framtida problem, såväl som i skolmiljön som i verkliga händelser. Slutligen har eleverna tränats i kommunikation då de har jämfört och diskuterat sina svar med en kamrat samt att elevsvaren har lyfts i helklass.

5.5.2. Matematisk kommunikation

I och med att den här uppgiften sker i helklass kan eleverna ta del av varandras sätt att tänka, vilket leder till att de i ett tidigt skede får ta del av matematiska uttryck som sätts in i sammanhang och som de med tiden kan frambringa en förståelse för. Då eleverna ges möjlighet att tänka högt, angående sina lösningar, kan den matematiska kommunikationen öka. Vidare kan eleverna förbättra sitt sätt att tänka och förmåga att lösa problem då de blir medvetna om sin egen tankegång. För att kunna delta i helklassdiskussioner ska pedagogen ha skapat en tillåtande miljö, då vissa elever ser det som en utmaning och motvilligt gör sin röst hörd inför andra.

5.5.3. Matematiskt innehåll

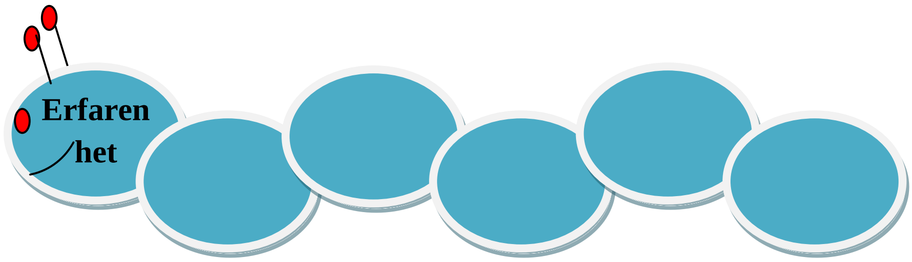
I föregående uppgift påbörjades platsvärdet i och med att eleverna gavs möjlighet att skapa sig en förståelse för nollans betydelse. I den här uppgiften får eleverna enbart ta del av tal auditivt och ska sedan överföra dem till sitt underlag. Återigen kan Multibas gestalta siffrornas olika värden i talen då det tydligt visar vilken del som är störst respektive minst samt att delarna är uppbyggda av mindre komponenter. Till exempel går det tio hundradelar på en tiondel och tio tiotal på ett hundratal och vidare. Det här tillvägagångssättet, tillsammans med frågeguiden, genomtänkta frågor från pedagogen samt klasskamraternas funderingar, kan resultera i att eleverna tillägnar sig en djupare förståelse för platsvärdet i tiosystemet. Genom att varje elevsvar lyfts i helklass kan eleverna kontrollerar sina matematiska resonemang.

En nackdel med uppgiften kan vara att eleverna enbart får talet auditivt, vilket kan försvåra för dem som har problem med att inta information på det här viset. Dessutom kan de elever med koncentrationssvårigheter uppleva att uppgiften är komplicerad på grund av att den bedrivs i helklass och att deras matematiska förmåga därmed inte blir förmedlad. Det är därför pedagogens skyldighet att komplettera uppgiften till de elever som har det behovet, vilket kan ske i form av att pedagogen antingen upprepar talet enskilt för eleven eller att den får talet nedskrivet.

6. Analys

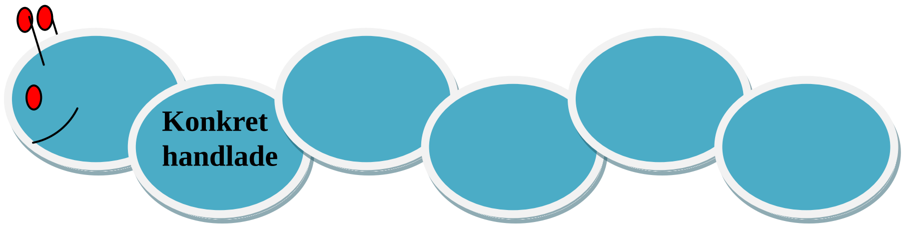
6.1. Modellens delar i de potentiella lösningarna

Efter att ha tagit fram fyra potentiella lösningar som kan bidra till elevers ökade förståelse av positionssystemet, kommer vi att analysera de här i förhållande till vår skapade modell samt den teoretiska bakgrunden.

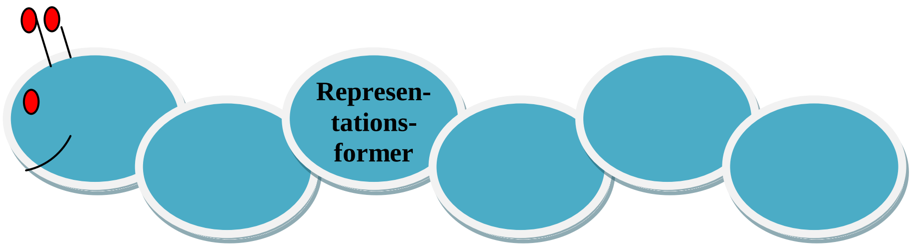


Den första av maskens delar består av erfarenhet och ordförråd som syftar till att undervisningen utgår från något eleven varit med om eller känner igen. Där ges de möjlighet att tala och tänka för att de ska öka sitt ordförråd (Malmer 2002). I våra potentiella lösningar blir eleverna allt eftersom bekanta med uppgifterna och förväntas kunna generalisera sina nyförvärvade kunskaper i efterföljande uppgifter. Då uppgifterna bygger på varandra och ökar i svårighetsgrad känner eleverna igen innehållet och kan därmed använda sig av sina tidigare kunskaper.

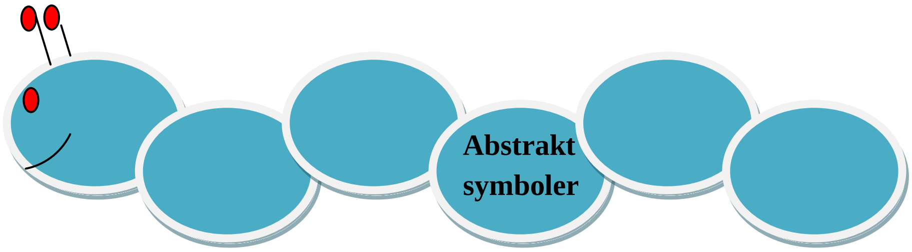
Vi anser att eleverna ges möjlighet att tänka och tala i samtliga av våra potentiella lösningar, eftersom de får ett stort utrymme till att föra meningsfulla diskussioner. För att eleverna ska kunna frambringa meningsfulla diskussioner krävs det enligt NCTM (2000) ett stort engagemang från pedagogen och därför har vi tagit fram en frågeguide som stöd till såväl elever som pedagog. Vad har jag/vi gjort? Hur gjorde jag/vi? Varför gjorde jag/vi på det här sättet? Kan jag/vi göra på något annat sätt, i så fall hur? Den kan skapa gynnsammare förutsättningar för dem i deras samtal. Vår förhoppning är att eleverna bär med sig de didaktiska frågorna och ser det som en naturlig tankegång när de möter nya matematiska problem. Då eleverna ges möjlighet att föra givande konversationer blir vår förväntan att de tillägnar sig ett rikare ordförråd. NCTM (2000) menar att genom att låta eleverna jämföra och diskutera sina lösningar, kan det leda till att de blir mer flexibla problemlösare samt skapar sig en djupare förståelse av olika metoder. Sådana samtal utvecklar ett språk för att uttrycka sina matematiska idéer. Eftersom det i våra potentiella lösningar är tillåtet att använda sig av såväl det matematiska språket som vardagsspråket i samtalen, kan eleverna då utveckla sitt språk genom antingen deltagande eller tillägnelse. Att utveckla ett matematiskt språk genom deltagande kan gå via det vardagliga språket, där eleverna görs delaktiga genom det språk de redan besitter (NCTM 2000; Bergius & Emanuelsson 2008). Pedagogens roll i den här processen blir att synliggöra sådana ord som eleverna redan använder i sitt vardagsspråk och som kan appliceras i matematiska sammanhang (NCTM 2000). Då eleverna utvecklar sitt matematiska språk genom tillägnelse, får de i ett tidigt skede ta del av matematiska uttryck som sätts in i sammanhang och som de med tiden skapar sig en förståelse för (Skott m.fl. 2008).



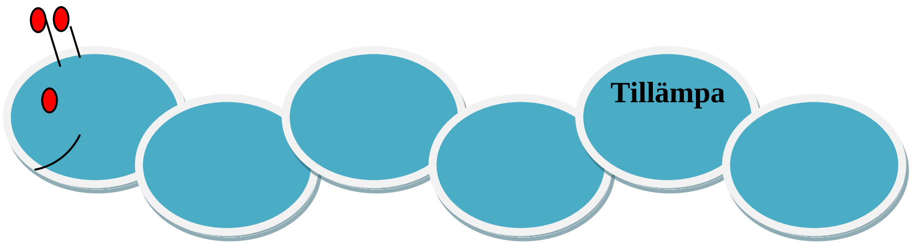
Nästkommande del av modellen utgörs av arbete med laborativt material och omfattar konkret handlande. Alla våra potentiella lösningar bygger på laborativt material i form av Multibas. Eleverna får ta del av flera perceptionsvägar som kan öka deras delaktighet i inlärningsprocessen samt skapar förutsättningar för att de ska bilda sig ett inre bildarkiv (Malmer 2002). Vi menar att uppgifterna tillsammans med Multibas och det tillhörande underlaget, bidrar till elevernas konkreta handlande samt att de ser det som en naturlig del av matematiken. Våra tankar syftar till att de likväl kan använda sig av Multibas, underlag samt OH-penna istället för lärobok, räknehäfte och penna då de arbetar med positionssystemet. De visuella modeller, som eleverna har byggt, kan hjälpa dem att skapa inre bilder som kan stödja dem i deras tankar och kommande uppgifter. Laborativa aktiviteter ska verka som en brygga mellan det konkreta och det abstrakta, som förbinds med representationsformer (Malmer 2002; Rystedt & Trygg 2005). Laborativa aktiviteter kan även skapa förförståelse och synliggöra matematikens olika sidor. Alla elever är olika och det är av stor betydelse att pedagogen möter den enskilde individen, vilket leder till att undervisningen ska vara variationsrik (Rystedt & Trygg 2005). I och med att våra potentiella lösningar går att variera svårighetsmässigt, kan de anpassas till varje enskild individ.



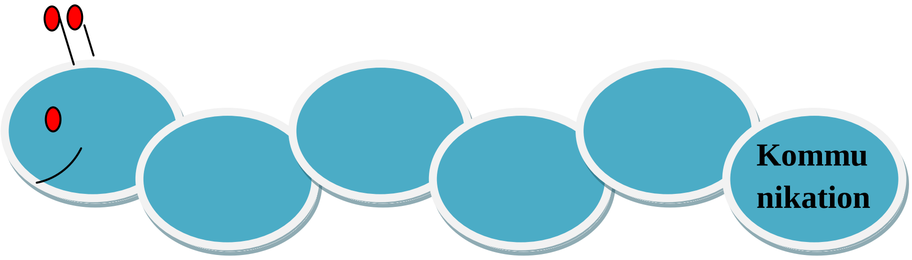
Representationsformer är den tredje av modellens delar och innebär att eleverna tränas i att gestalta en brygga mellan det konkreta och abstrakta. Den här bryggan kan vara ritade bilder, figurer, mönster samt andra inre illustrationer. Användandet av representationsformer, som förekommer tydligt i uppgift 1 och 2, anser vi gynnar de elever vars intresse annars kan minska eftersom de kanske inte alltid ser någon utmaning i arbetet med konkret material. Vår förhoppning är att representationsformer inspirerar eleverna till att finna flera olika lösningar, vilket kan bli en utmaning. NCTM (2000) menar att då eleverna redogör för sina tankesätt till olika lösningar genom att till exempel rita, förklara och skriva, påminns de om det delade ansvaret för lärandet under lektionen. Det här arbetssättet stärker kursplanen i matematik för grundskolan, där en utgångspunkt är att eleven ”… utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer” (Skolverket 2000:10). Tanken är att alla elever ska känna sig trygga med att använda representationsformer för att de i förlängningen ska kunna se sambandet mellan det konkreta och abstrakta. Representationsformer kan även vara ett stöd vid deras diskussioner, då de på ett enklare sätt kan visa hur de tänker genom illustrationer. Det är ”… viktigt att vårt matematikämne, inte minst för unga elever, också relateras till språk, rytm, rörelse och bild” (Bergius & Emanuelsson 2008:2). Då eleverna kanske ännu inte ha lärt sig att skriva, måste de använda sig av andra medel som till exempel att rita bilder tillsammans med muntlig kommunikation (NCTM 2000).



Modellens fjärde del, abstrakt och symboler, syftar till att eleverna använder sig av vedertagna symboler för matematiska uttryck och mönster (Malmer 2002). Vi anser att alla uppgifter uppfyller det här kravet eftersom en muntlig framställning, med matematiska uttryck och mönster, görs när eleverna presenterar och förklarar sina lösningar inför en eller flera kamrater. Skott (2009) menar att symboler eller laborativt material är en bra utgångspunkt för att eleverna ska kunna tillägna sig en första tanke kring det matematiska innehållet. I mötet med andra elever uppstår möjligheten att få fler perspektiv och därmed kan förståelsen utvecklas (NCTM 2000). Gradvis ökar elevernas kunskaper och de kan i matematiken uttrycka sig på olika sätt genom såväl bilder och tal som mer formell skrift i form av terminologi (Lpo94 i Lärarförbundet 2006; NCTM 2000). I uppgift 1 får varje elev redogöra för sina svar i gruppen som innefattar 3-4 personer, vilket då kan leda till att förståelsen utvecklas. Det kan även medföra att kamraterna i gruppen vågar ställa följdfrågor och föra ett resonemang, vilket ger fler perspektiv och kan resultera i en djupare förståelse. I den tredje uppgiften samarbetar eleverna i par och gör inför varandra en muntlig framställning av sina symboler för att redogöra för sin lösning som kan utveckla deras förståelse. I uppgift 2 och 4 visar eleverna upp sina lösningar inför hela klassen och samtidigt bekräftas eller korrigeras matematiska uppfattningar. Då eleverna redogör för sina tankesätt till olika lösningar kan missförstånd upptäckas (NCTM 2000). För att öka kommunikationen mellan eleverna och pedagogen kan eleverna uppmuntras till att tänka högt. Det här tillvägagångssättet, tillsammans med genomtänkta frågor från pedagogen och klasskamrater, kan resultera i att eleverna kontrollerar sina tidigare matematiska resonemang (a.a.). Då elever blir medvetna om hur de tänker inför ett problem kan de förbättra sitt sätt att tänka och förmågan att lösa problem (Hwang & Nilsson 2006).



Tillämpning innebär att eleverna ska kunna sätta in sina nya kunskaper i andra sammanhang genom generalisering (Malmer 2002). Våra uppgifter utgår från samma struktur och eleverna ges därmed möjlighet att använda sina nya kunskaper i nästkommande uppgift genom generalisering. Med det menar vi att de kunskaper som eleverna erövrar vid varje uppgift, med fördel går att applicera på de efterföljande. Våra uppgifter börjar med att eleverna gestaltar olika nämnda tal med Multibas eller andra representationsformer. Efter det ska de både skapa visuella modeller och använda sig av terminologin som i uppgift 3 utvecklas till att de ska kunna visa samt förklara skillnaden mellan hel- och decimaltal. I den sista uppgiften benämns talen auditivt och kunskaper från tidigare uppgifter vävs in då de ska bestämma siffrornas värde i talen. Vår förhoppning är att de har skaffat sig ett rikare ordförråd samt inre bildarkiv när de överför sina insikter i nya situationer.



Den sjätte och sista delen av modellen består av kommunikation och är något som genomsyrar samtliga uppgifter. Det är eftersträvansvärt att eleverna reflekterar, argumenterar samt diskuterar sitt matematiska handlande för att medvetandegöra och delge varandra sina tankar, vilket hela vårt upplägg bygger på. Elever ska arbeta tillsammans med andra, i den proximala utvecklingszonen, för att nå bättre resultat (Bergius & Emanuelsson 2008). Hwang och Nilsson (2006) hävdar att det är genom språket som barn ges möjlighet att delta i det sociala samspelet och då de kan resonera med sig själva i såväl inre dialoger som verkliga samtal, utvecklas tänkandet. NCTM (2000) menar även att elever som får ta del av varandras tankar, genom diskussioner och argumentationer, tillägnar sig dubbelsidig kunskap som innebär att de kommunicerar för att lära sig matematik samtidigt som de lär sig att kommunicera matematiskt. I alla uppgifterna ges eleverna möjlighet att föra goda matematiska samtal, med frågeguiden som underlag. För att kommunikationerna ska bli rikare krävs det att de blir bättre på att lyssna, ställa frågor samt tyda varandras idéer. Det här leder till att eleverna förväntas bli skickligare på att argumentera och att dra slutsatser byggda på tidigare kunskaper. I slutet av skolgången ska eleverna ha som mål att kunna använda ett väl fungerande matematiskt språk, som presenterar tydliga och korrekta argument (NCTM 2000).

6.2. Pedagogens roll i undervisningen

En grundläggande förutsättning för givande matematiska kommunikationer, som kan leda till ökad förståelse i de potentiella lösningarna, är att pedagogen skapar en tillåtande och positiv klassrumsmiljö där eleverna vågar uttrycka sina tankar samt idéer. ”To support discourse effectively, teachers must build a community in which students will feel free to express their ideas” (NCTM 2000:61). Vi menar att skapandet av goda relationer i klassen samt en vi-känsla är något som byggs upp med tiden. Den här aspekten är betydelsefull att ha i åtanke vid genomförande av de potentiella lösningarna.

Då alla elever är olika, är det pedagogens roll att göra undervisningen variationsrik för att alla elever ska ges möjlighet att visa sina förmågor inom olika områden. För att uppnå en variationsrik undervisning är det viktigt att all undervisning tar sin utgångspunkt i elevernas nyfikenhet och intresse (Bergius & Emanuelsson 2008). Ett sätt att göra undervisningen variationsrik är att pedagogen använder laborativt material, eftersom det är en fördel att låta elevernas alla sinnen får vara delaktiga. Rystedt och Trygg (2005) menar att det finns en gyllene regel för pedagoger som innebär att de ska sträva efter att visa fram så mycket som möjligt för elevernas sinnen. I de potentiella lösningarna med Multibas aktiveras elevernas känsel, hörsel samt syn. För att undervisningen med Multibas ska bli meningsfull, krävs det dels att den sätts in i genomtänkta sammanhang och dels att pedagogen ställer den i relation till de didaktiska frågorna vad, hur och varför som även finns med i frågeguiden. Eftersom laborativt material är dött i sig krävs det att pedagogen har insikt om de didaktiska frågorna för att levandegöra materialet (Löwing & Kilborn 2002; Rystedt & Trygg 2005).

För att matematikundervisningen ska bli mer förståelig kan pedagogen använda laborativt material samt gå tillbaka till matematikens rötter i vardagen (Löwing & Kilborn 2002). I de potentiella lösningarna finner pedagogen ett stöd i förhållningssättet till eleverna, genom frågeguiden och andra genomtänkta frågor som till exempel: Kan du se ett samband med uppgiften och ett problem som har/kan uppstå i verkligheten? Då såväl anknytningen till vardagen och ett laborativt material förekommer i de potentiella lösningarna, anser vi att matematikundervisningen kan bli mer förståelig.

Vidare anser vi att det är pedagogens roll att utforma intressanta uppgifter som utmanar elevernas tankar, vilket de potentiella lösningarna består av. Dessutom bidrar lösningarna till att skapa givande matematiska kommunikationer, då de förutsätter att eleverna samtalar med varandra utifrån frågeguiden. Det är pedagogens uppgift att träna eleverna i att samtala om matematik på ett naturligt sätt och därmed kommer kommunikationen att utvecklas genom åren i skolan. Elevernas verktyg och sätt att kommunicera ska bli allt mer nyanserat, vilket kräver ett stort engagemang från pedagogerna (NCTM 2000). Det är även pedagogens uppgift att göra eleverna medvetna och synliggöra sådana ord som de redan använder i sitt vardagliga språk och som går att överföra till matematiska sammanhang (a.a.). I de potentiella lösningarna uppmanas eleverna att använda det språk som de känner sig mest bekväma med samtidigt som de får ta del av mer avancerade matematiska termer och symboler. Lösningarna utgår också från metoden att tänka högt, vilket är att lämpligt sätt för eleverna att utbyta tankar och strategier.

I pedagogens roll att bedöma eleverna har vi tagit fram en matris som stöd (bilaga 1). Matrisen sätts i relation till de potentiella lösningarna, där det första målet är kopplat till lösning ett, andra till lösning två o.s.v. Genom att pedagogen använder matrisen anser vi att målen för varje lösning tydliggörs, elevernas insatser blir mer synliga samt att bedömningen underlättas. Ytterligare fördelar med att använda en matris är att eleverna kan få en tydligare bild av vad de ska kunna som medför att de kan ta kontroll över sin inlärning och förhoppningsvis når bättre resultat. NCTM (2000) anser att då eleverna får redogöra för sitt tankesätt påminns de om det delade ansvaret för sitt eget lärande. Ansvaret delas mellan pedagog och eleven. Vi menar att eleverna på så sätt kan bli mer motiverade och fokuserade då de får matrisen som stöd till undervisningen.

7. Diskussion

Modellen i inledningen illustrerar hur verksamma pedagoger och elever, tillsammans med ett laborativt material kan vara en förutsättning för att skapa förståelse samt matematiska kommunikationer. De potentiella lösningar med Multibas som vi utformat har förhoppningen att skapa en förståelse för positionssystemet samt frambringa en matematisk kommunikation. Då våra erfarenheter tyder på att många verksamma pedagoger är bundna till endast ett läromedel, anser vi att laborativt material som arbetssätt ska ses som ett naturligt inslag i undervisningen. En matematikverkstad, som innehåller olika laborativa material, ger ett bra utgångsläge för ett undersökande arbetssätt samt kan inspirera pedagoger om det finns ett meningsfullt upplägg tillsammans med materialet. De tankar, som våra potentiella lösningar grundar sig på, kan med fördel appliceras på annat laborativt material. Finns det en god insikt om vad som ska göras, hur det ska göras samt varför det görs, menar vi att vårt potentiella undervisningsupplägg kan användas inom andra områden i matematiken. Det är inte materialet i sig som löser problem utan det är idéerna och planeringen bakom som är den avgörande betydelsen.

Vi anser att arbetets syfte är uppnått då de fyra olika potentiella lösningar med Multibas som vi har skapat kan öka förståelsen av positionssystemet, där matematiska kommunikationer är i fokus. De olika lösningarna berör flera delar inom positionssystemet och därför menar vi att de är goda exempel på hur Multibas kan användas. Den matematiska kommunikationen ser vi dels som ett medel, för att klara lösningarna och dels som en kompetens eleverna ska utveckla genom lösningarna. Genom våra potentiella lösningar ges eleven möjlighet att utveckla den dubbelsidiga kunskapen inom kommunikation. Dessutom har vi tagit fram en undervisningsmodell med kriterier för en god matematisk undervisning, som enligt vår mening stödjer de potentiella lösningarna.

Undersökning av de potentiella lösningarna i en elevgrupp samt om de går att sätta i relation till området bråk, lämnar vi härmed för vidare forskning.

Referenser

Bergius, Berit & Emanuelsson, Lillemor (2008). *Hur många prickar har en gepard?* Unga elever upptäcker matematik. Kungälv: Grafikerna Livréna AB.

Lärarförbundet (2006). *Lärarens handbok.* Solna: Tryckindustri Information.

Lär och Lek (2009). *http://privat.lar-lek.se/*. 2009-05-04.

Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, Hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, Gudrun (2002). *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, Alistair (2008). *Förstå och använda tal – en handbok.* Göteborg: Livréna AB.

Myndigheten för skolutveckling (2003). *Baskunnande i matematik.* Stockholm: Dreamforce Infomedia AB.

Myndigheten för skolutveckling (2007). Matematik – en samtalsguide om kunskap, arbetssätt *och bedömning.* Västerås: Edita.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for* School Mathematics. USA.

Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena (2005). *Matematikverkstad.* Kungälv: Grafikerna Livréna AB.

Science Daily (2009). It Pays To Compare: Comparison Helps Children Grasp Math Concepts. *http://www.sciencedaily.com/releases/2009/04/090410143807.htm*. 2009-04-22.

Skolverket (2008a). TIMSS 2007 - Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2008b). Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007- En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2000). Analysschema i matematik – för åren före skolår 6. Stockholm: EditaVästra Aros.

Skott, Jeppe (2009). *Examensarbete*. Muntlig handledning vid Växjö Universitet. 2009-04-15.

Skott, Jeppe m.fl. (2008). Matematik for lærerstuderende: delta, fagdidaktik. Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Bilaga 1

Mål att uppnå	Vad ska jag kunna?	Hur visar jag att jag kan?	Osäker / Säker X
Eleven ska ha grundläggande taluppfattning. Kommentar:	Jag förstår och kan redogöra för hur talen är uppbyggda.	Jag kan gestalta samma tal på flera olika sätt med hjälp av Multibas.	
Eleven ska kunna använda sig av visuella modeller och likvärdiga termer i decimaltal. Kommentar:	Jag kan använda Multibas och överföra modellen till ett decimaltal och vice versa.	Jag lägger och/eller läser av en visuell modell av Multibas och skriver därefter det likvärdiga decimaltalet. Utifrån ett fastställt tal lägger jag en visuell modell av Multibas.	
Eleven ska kunna visa och jämföra hel- och decimaltal. Kommentar:	Jag kan skillnaden mellan hel- och decimaltal.	Jag bygger hel och decimaltal med hjälp av Multibas och berättar vad skillnaden är.	
Eleven ska ha kunskaper om platsvärdet i tiosystemet. Kommentar:	Jag kan talens plats i positionssystemet.	Jag placerar ut material som motsvarar angivet tal och berättar värdet på siffrorna.	

Tolkning av kursplanen i matematik för grundskolan, Lpo94 samt NCTM 2000
(Johanna Yngvesson & Josefine Jönsson 2009)

Bilaga 2

Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental	Tiondel	Hundradel	Tusendel
			,			

Bilaga 3

Frågeguide

Vad har jag/vi gjort?

Eleverna ska bli medvetna om vad de har gjort genom att de reflekterar över samt presenterar uppgiften. Då eleverna ges möjlighet att förklara för sina kamrater vad de gjort, anser vi att de kan få en djupare förståelse för uppgiftens innebörd. Målet med den här frågan är att eleverna ska kunna sätta ord på sina tankar och sitt agerande samt förstå vad de har gjort.

Hur gjorde jag/vi?

Eleverna ska genom samtal förklara hur de gjorde uppgiften för att skapa förståelse samt få insyn hur de kan använda sig av olika strategier som leder till samma korrekta lösning. Genom den här frågan blir eleverna medvetna om olika strategier, där de sedan kan välja ut delar som kan vara mer passande för dem i kommande uppgifter. Då eleverna har tagit del av andras lösningar, kan de tillämpa den nyvunna kunskapen i påföljande uppgift. Målet är att eleverna ska förstå hur de gjort, att det finns flera vägar till en korrekt lösning samt övervägt andras lösningsstrategier.

Varför gjorde jag/vi på det här sättet?

Eleverna får diskutera och argumentera för sina lösningar om varför de gjorde som de gjort. Genom att de redogör för sina lösningar, repeterar de sin tankegång och kunskapen kan då befästas. Vidare kan det leda till att eleverna generaliserar sina kunskaper som kan bidra till att de i nästkommande uppgifter har med sig en förförståelse som kan fördjupa deras förståelse. Målet är att eleverna ska förstå varför de gjorde på det här sättet samt att de ska kunna generalisera kunskapen.

Kan jag/vi göra på något annat sätt, i så fall hur?

Eleverna ska inte bara reflektera över lösningen, utan genom laboration ska de även upptäcka om det finns ytterligare sätt att utföra uppgiften på. Vidare ska de tänka igenom om det finns någon koppling mellan den genomförda uppgiften och den föregående samt nästkommande. Målet är att eleverna ska kunna reflektera över tillvägagångssättet, se om det finns ett samband till andra uppgifter och i så fall förklara hur de förhåller sig till varandra.

Matematiska och systemtekniska institutionen
SE-351 95 Växjö

Tel. +46 (0)470 70 80 00, fax +46 (0)470 840 04
http://www.vxu.se/msi/