Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor

Linnaeus University Dissertations
Nr 48/2011

Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor

Eva Pettersson

LINNAEUS UNIVERSITY PRESS

STUDIESITUATIONEN FÖR ELEVER MED SÄRSKILDA MATEMATISKA FÖRMÅGOR

Akademisk avhandling för filosofie doktorsexamen i matematik med didaktisk inriktning vid Institutionen för datavetenskap, fysik och matematik, Linnéuniversitetet 2011

ISBN: 978-91-86491-77-2.
Tryck: Intellecta Infolog, Göteborg

ABSTRACT

Pettersson, Eva. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor* (Mathematically gifted students' study situation) Linnaeus University Dissertations No 48/2011. ISBN: 978-91-86491-77-2. Written in Swedish with a summary in English.

The study aims to describe variation in the expression of students' mathematical ability and the various ways in which their mathematical aptitude is acknowledged and supported by their teachers, parents and peers in a Swedish context. Ability is defined as a complex of various abilities each of which may be more or less pronounced in a given individual. The study is based on ten case studies of highly able students (ages 6-19). Six of the studies are longitudinal, ranging from three to six years. In order to validate the results of the case studies, two survey studies were carried out involving 180 teachers (preschool to Grade 9 in Swedish compulsory school) and 284 mathematics developers from 229 Swedish municipalities. The survey studies raised questions concerning the teachers' personal experience of identifying and supporting highly able students, the nature of their everyday teaching, and the support given to able students. The results show that mathematical abilities can take many different forms and there is great need for pedagogical support for this group of students. Since extra resources are rarely available for the benefit of nurturing talent and since there are, as yet, no Swedish national or local policy documents that specifically address the support of talent in students, teachers are on their own in figuring out how to best help able students develop mathematically. The study points to the importance of the social norms that influence the interaction between teacher and student(s): everyday social norms as well as socio-mathematical norms, i.e. norms specific to the subject of mathematics. The latter place considerable demands on the teachers' mathematical knowledge and competence. The benefits of early interventions, of supportive teaching environments, and of providing the students with challenging tasks and questions are also discussed.

Key words: gifted students, mathematics, mathematical abilities, talent development, social norms, socio-mathematical norms, teacher competence, case studies.

Förord

En avhandling är inget som skrivs ihop under en eftermiddag. Det kräver tid, tålamod, planering och hårt arbete. Att jag, som gärna vill ha saker klara innan de är påbörjade, jag som hatar att ha obesvarad e-post i inkorgen eller ej avklarade punkter på min lista, skulle kunna arbeta med en och samma sak under drygt sex år var ju egentligen otänkbart. Men genom ett stort stöd från min omgivning samt en tankebana som kan liknas vid den jag använder vid min idrottsutövning, inom orientering, har det trots allt fungerat. Vad menar jag då med dessa kryptiska formuleringar? Jo, i orientering tar vi oss fram en kontroll i taget, på väg mot det slutliga målet.

Orientering är självvald väg i okänd mark,
tankens skärpa vid kroppslig möda,
snabba beslut under spännande tävling.

Det är en härlig känsla i kroppen när man ensam genom skogen, med egna vägval, i egen takt, tar sig fram mot en kontroll och finner den. Just som man har funnit den infinner sig en lycka, en lättnad och en stolthet men nästan omedelbart förflyttar sig tanken mot nästa sträcka. Hur väljer jag vägval här, rakt på utan att väja för något eller runt om på stig som är lättare men något längre. På varje sträcka finns hinder och utmaningar, ibland kan man se andra utövare men man vet inte om de är på väg mot samma kontroll, troligen inte, man kan känna lite samhörighet men för det mesta är man ensam på väg mot det hägrande målet. När man kommit i mål kan man vara nöjd med loppet trots några missar och dåliga vägval – man är ju trots allt i mål och har tagit alla kontroller. Men man vet inte om man vunnit, det avgörs av andra. I orientering är dessa inte domare eller betygsnämnd utan medtävlare. Annars är likheterna stora. Jag har nu gått i mål med avhandlingen men i skrivande stund vet jag inte om jag vunnit. Det är det andra som avgör. Så till omgivningen, mina medtävlande, mina tränare och supportrar som trots allt är de viktigaste.

Jag vill börja med att tacka mina underbara fallstudieelever, Johan, Sara, Axel, Erica, Hampus, David, Ellen, Sixten, Gustav, Erik och Tor deras föräldrar och lärare för att ni alla gjort det möjligt för mig att genomföra studien. Sedan vill jag tacka Vetenskapsrådet, Linnéuniversitetet och Blekinge Tekniska Högskola för det ekonomiska stödet och för möjligheten att genomföra arbetet. Ett stort och varmt TACK till Inger Wistedt, min huvudhandledare, som från första stund trott på mig, som under perioder dragit upp mig från riktigt dåliga vägval eller då jag varit helt slut i kroppen. Du har varit ett stort stöd under mitt skrivande och lärt mig allt från presens och imperfekt till att utesluta runt och kring, vilka endast får användas tillsammans med ”gran” eller ”midsommarstång”. Tack till min biträdande handledare Håkan Sollervall för stöd, framförallt i de matematiska analyserna. Tack till er båda för underbara och givande diskussioner. Jag vill tacka mina arbetskamrater vid Blekinge Tekniska Högskola och Linnéuniversitetet. Tack för att ni peppat mig vid svåra stunder och glatts med mig vid roliga. Ingen nämnd ingen glömd! Tack till Jenny Hartman för översättning av abstract och sammanfattning och till Ingemar Holgersson för granskning inför slutseminarium.

Slutligen mina nära och kära, att ni orkat, att ni trott på att det skulle vara möjligt, att det någon gång skulle bli klart, det finns inget TACK stort nog för detta. Min käre make Anders, våra underbara barn Lisa, Maja, Moa och Emil, mina föräldrar och svärföräldrar. Tack Lisa för hjälp med layout av figurer i avhandlingen och tack Maja för den fina omslagsbilden. Kunskapens träd med elva frukter, alla olika till form och innehåll, alla med sin speciella karaktär, potential och utstrålning.

Innehållsförteckning

Tabeller

Figurer

Inledning

Studien som presenteras här handlar om barn och ungdomar som ofta förvånar och fascinerar sin omgivning – elever med exceptionell fallenhet för matematik. De är sinsemellan olika, lika olika som alla andra individer i samhället, men de har ett gemensamt: intresse för matematik och att få syssla med matematiska aktiviteter. I studien beskrivs vad som karaktäriserar dessa elever med särskilda matematiska förmågor och hur de bemöts i den svenska skolan.

Individer med särskilda matematiska förmågor

Många har schablonbilder av människor som i sin dagliga gärning ägnar sig åt matematisk forskning. Sådana bilder existerar om alla yrkesgrupper och står sig oftast så länge kunskaperna om gruppen är bristfälliga. Med ökad kunskap följer en nyansering av synen på vad som kännetecknar individer tillhöriga en viss grupp. Kristin Dahl (1991) beskriver i boken *Den fantastiska matematiken* hur hon fick anledning att ompröva sin syn på människor som ägnar sig åt forskning i matematik:

> Vad är det för slags människor som forskar om matematik? När jag skulle börja göra intervjuerna till den här boken såg jag framför mig en samling ensamma, smått inkrökta och världsfrånvända herrar. Jag närmade mig dem därför med en viss försiktighet. Men jag kan numera intyga att matematiker är som folk är mest. Några klär sig i jeans och träskor, andra i kostym och slips. Hos somliga ser det ut som om en jordbävning just har hemsökt arbetsrummet, hos andra är skrivbordet blankt så när som på papper och penna. (*ibid*, s. 51)

Individer med särskilda matematiska förmågor, deras karaktäristiska drag och olika sätt att uttrycka sina förmågor samt deras studiesituation i den svenska skolan är ämnet för denna studie. Vilket bemötande får dessa elever i den svenska skolan? Statliga rapporter och utvärderingar (Skolverket, 2003a; 2004a; 2008a) visar att matematiklektioner i svensk grundskola oftast består av enskilt arbete där en mängd uppgifter ska lösas, även av de elever som så snart de ser uppgiften också ser hur den kan lösas. Uppgifterna ger dem få utmaningar vilket kan leda till att eleverna tröttnar. När veckans beting i matematik är avklarat, vilket bland yngre elever oftast sker snabbt, får de i bästa fall nya mer stimulerande uppgifter eller möjlighet att gå vidare i en alternativ bok. Tyvärr gäller inte detta alla elever, inte ens flertalet av dem. Många får istället fler uppgifter av samma typ som de tidigare avklarade eller får ägna tiden åt annat än matematik. De får sällan beröm för att de når framgång inom ämnet, något som gärna ges till idrotts- eller musikbegåvade elever, och ibland vill de inte heller ha beröm, för det kan vara socialt känsligt att framstå som begåvad i matematik (Pettersson, 2008).

Skolans bemötande

Är den svenska skolan till för alla elever? Får nyfikna och vetgiriga barn det stöd och den stimulans som de har rätt att förvänta sig då de börjar skolan eller är skolan till för de elever som är ordentliga och flitiga men inte krävande? Under min tid som forskarstuderande har jag fått många brev och telefonsamtal från föräldrar som berättar om barn som vantrivs i skolan, elever som avstannat i utvecklingen istället för att förkovra sig, elever som inte får stöd i sin matematiska utveckling:

> *”Min äldsta pojke är förmodligen matematiskt särbegåvad. Hans uppväxt har kantats av många problematiska situationer och många häpnadsväckande uttalanden. När han var två-tre började han räkna utan att vi lärt honom det. Utvecklingen matematiskt var fantastisk, tills han började skolan. Nu har han snarare backat mycket och jag belastar skolan helt och hållet. Väldigt, väldigt trist! Jag känner stundtals att jag inte orkar med honom i alla lägen och blir lätt för arg när han vägrar ge med sig i vissa situationer och när han helt enkelt är på en annan planet. Vi skulle kanske behöva hjälp, jag vet inte riktigt. Framförallt var han gladare när han höll på att räkna.”*

Det finns även lärare som känner sig oroliga för att de inte räcker till för de elever som har särskild fallenhet för ämnet, som inte har tillräcklig kompetens och som inte får stöd från skolledningen:

> *”… är en självgående elev som sköter sig själv i hög grad. Han har oturen att gå i en klass som är väldigt stökig och svårarbetad vilket tyvärr medför att de bra eleverna inte får den arbetsro de behöver. Jag känner att han mest arbetar själv och inte får någon vidare bra undervisning. Kan du berätta vad du gör när du träffar honom och ge tips om hur jag ska göra?”*

Elevers och föräldrars förväntningar på skolan, på att barnet i skolan ska få lära sig något nytt, får enligt breven ett abrupt slut då de inser att skolan inte har möjlighet att möta eleverna där de befinner sig:

> *”Ingen kan ta hand om hans begåvning, den är med framgång motarbetad, och möta samt uppskatta honom som han är. Men han fortsätter försöka och ger aldrig upp.”*

Breven och deras budskap speglar vanligt förekommande myter i vårt samhälle, utsagor som ”*… de klarar väl sig själva, de som är så smarta*” eller ”*… deras undervisning tar ni föräldrar nog bäst hand om hemma*”. Myterna saknar stöd i forskning om särbegåvade individer. Tvärtom visar sådan forskning att dessa individer, precis som alla andra, behöver stimulans i interaktion med kompetenta pedagoger. Citatet ovan om att stöd till begåvade individer främst är föräldrarnas ansvar är det svar en förälder fick då hon under Skolforum 2009 frågade dåvarande skolministern hur hon skulle gå till väga med sina tvillingar och deras skolgång. Uttalandet visar, i ett exempel, att skolan inte alltid är till för alla elever trots att det i gällande läroplan, Lpo94, står att "… läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga." (Skolverket, 2006, s. 12). Elever som tidigt visar intresse för matematik och som ser fram emot skolstarten för att de i skolan ska få lära sig mer, berättar uppgivet för mig att det visade sig innebära att de fick lösa uppgifter, sida efter sida, och skriva fina siffror. Men det är möjligt att skapa variation i undervisningen och i studien ges exempel på hur matematikundervisningen kan anpassas till elever som behöver särskilt stöd på grund av sina särskilda förmågor.

Matematikdidaktisk forskning

Svenska forskningsstudier inom det generella begåvningsområdet är få (Persson, 2007; 2010), inom området matematik än färre. Matematikdidaktisk forskning i Sverige har istället varit inriktad mot elever med matematiksvårigheter (Bergqvist, 2003; Engström, 1999; Magne, 2001, 2003; Persson, 2001). Projektet "Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik" vid Växjö Universitet senare Linnéuniversitetet startade 2005 och är finansierat av Vetenskapsrådets utbildningsvetenskapliga kommitté (se www.giftedmath.se). Projektets syfte är att studera hur matematiska förmågor hos skolelever uttrycks, kommuniceras och värderas i skolans praktik på olika stadier i utbildningssystemet, men också att undersöka hur den pedagogiska praktiken kan utvecklas för att passa elever med särskild fallenhet för ämnet (Wistedt, 2007). Avhandlingen utgör en delstudie inom detta projekt.

Samhällets värderingar

Positiva attityder till begåvning och begåvade individer har i Sverige varit och är till stor del fortfarande förknippat med elitism (Wistedt & Sundström, 2011). I inledningen rönte projektet stort medialt intresse. Journalister ifrågasatte beslutet att satsa medel på individer som antogs klara sig på egen hand. Under projektets gång har dock attityderna förändrats både bland lärare och i samhället i övrigt. Efterhand som lärare haft möjlighet att ta del av information om projektet har de också börjat ställa frågor och visa intresse för begåvade elevers situation i skolan. Frågorna har kommit från lärare som har begåvade elever i sina klasser och som vill ha råd om hur de ska möta eleverna, som ställer frågor om undervisningsmetoder och hur de själva som lärare ska räcka till för alla elever. Även om lärarna känner sig begränsade vad gäller resurser finns nu ofta en förståelse för att elever med intresse och fallenhet för matematik inte klarar sig på egen hand och lärarna uttrycker allt oftare en vilja att stödja dessa elever. Spetsutbildningar för gymnasieelever visar att också politiker börjar få förståelse för begåvade elevers situation i skolan och för deras värde i samhället. Dock behövs betydligt fler och framför allt tidiga insatser för att elever med särskilda förmågor ska få möjlighet till en harmonisk uppväxt.

Studiens omfattning och relation till tidigare publicerad licentiat-avhandling

En tidigare publicerad licentiatavhandling (Pettersson, 2008) utgör grunden för två av de sex longitudinella studier som presenteras i avhandlingen och som följer elever med särskilda matematiska förmågor. En av de två enkätstudier som ingår i avhandlingen, riktad till lärare i förskola och grundskola med frågor om deras erfarenheter av elever med matematiska förmågor och om den matematikundervisning de bedriver, har tidigare publicerats i licentiatavhandlingen. Resultaten från dessa tidigare studier har emellertid reviderats, sammanfattats och integrerats i doktorsavhandlingen. Avhandlingen ska därmed betraktas som en helhet omfattande tio fallstudier med elever i varierande åldrar (6-19 år) samt två enkätstudier, en besvarad av lärare i grundskolan, en ställd till s.k. matematikutvecklare: lärare som har som uppgift att utveckla matematikundervisningen i sina hemkommuner.

Studiens syfte och frågeställningar

Avhandlingens övergripande syfte är att beskriva och belysa studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor. Forskningsfrågorna som ställs är:

- Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor?
- Vilket bemötande i skolan får elever vilka visar intresse och fallenhet för matematik?
- Vad innebär skolans bemötande för eleverna och för deras möjligheter att utveckla sina särskilda matematiska förmågor?

Karaktäristiken av eleverna avser dels deras personliga egenskaper, bakgrund och nuvarande sociala situation dels deras matematiska förmågor så som de kommer till uttryck i skola, hem och övrig vardag. Bemötandet i skolan avser både de möjligheter eleverna har att uttrycka och utveckla sina särskilda förmågor i matematik under klassrumslektioner eller i enskilda samtal med lärare eller speciallärare men också vilket extra stöd som erbjuds dessa elever. Slutligen vill jag undersöka vad bemötandet innebär för dessa elevers utveckling i matematik, den senare frågan belyst i longitudinella studier (3 - 6 år) av sex elever.

Avhandlingens disposition

Kapitlet *Bakgrund och forskningsöversikt*, som närmast följer, ger en allmän översikt av forskning gjord inom begåvningsområdet, både generell och specifik för matematik. Här är syftet att placera den aktuella studien i ett forskningssammanhang samt att ge läsaren en möjlighet att skapa sig en bild av den forskning som bedrivits inom detta område i Sverige och internationellt. I kapitlet presenteras resultat från sådan forskning samt resultat presenterade i statliga rapporter och utvärderingar av skolorganisation, undervisning och lärarens roll, resultat med relevans för studiens frågeställningar. Kapitlet avslutas med en kort presentation av forskning om problemlösning, specifikt sådan forskning som diskuterar problemlösning som undervisningsform för utveckling av matematiska förmågor.

Kapitlet *Teoretisk bakgrund* redovisar det teoretiska ramverk som används vid analyserna av avhandlingens empiriska material. Här presenteras teorier om den matematiska förmågans struktur samt om de normsystem som reglerar undervisningen i matematik.

Kapitlet *Metod och studiens genomförande* ger en översikt över studiens omfattning. Här presenteras vidare upplägg och genomförande av studien. I kapitlet ges även en kortare presentation av fallstudieeleverna.

Kapitlet *Fallstudier av Johan och Sara* presenterar analyser och resultat av empiriska studier med två av fallstudieeleverna, Johan och Sara. Detta är longitudinella studier som följer eleverna genom senare delen av grundskolan samt gymnasiet.

Kapitlet *Fallstudier av Axel och Erica* presenterar analyser och resultat av empiriska studier med två yngre fallstudieelever, Axel och Erica. Även dessa är longitudinella studier som följer eleverna under deras tidiga år i grundskolan.

Kapitlet *Resultat av fallstudier* sammanfattar resultaten från fallstudierna. Presentationen utgår från studiens tre forskningsfrågor.

Kapitlet *Resultat av enkätstudier* presenterar sammanställningar, resultat och analyser av de två enkätstudierna med lärare och matematikutvecklare.

Kapitlet *Diskussion* inleds med en metoddiskussion. Därefter följer en sammanfattning och diskussion om studiens resultat.

Bakgrund och forskningsöversikt

Fascinationen inför människor med exceptionella förmågor har alltid varit stor hos mänskligheten. Historiskt sett har sådan övermänsklighet oftast förklarats med hänvisning till teologiska och mytologiska orsaker (Ziegler, 2010). Det finns emellertid än idag många myter om begåvning och begåvade individer (Winner, 1999). Några av dessa myter och föreställningar tas upp i kapitlets första avsnitt, *Begåvning i ett generellt perspektiv*, där syftet är att göra läsaren bekant med förändringar i begåvningsbegreppet över tid. I avsnittet ges en sammanfattning av begåvningsbegreppets utveckling och en presentation av olika benämningar av begåvning samt vilken innebörd som läggs i dessa. Vidare beskrivs begåvningsmodeller som, utgående från en eller flera faktorer, har som mål att identifiera begåvning hos individer. Avsnittet *Begåvning i matematik* tar upp forskning om hur vi kan identifiera och stimulera elever med särskilda förmågor i matematik. I avsnittet presenteras även forskares resultat om vilka gemensamma egenskaper och karaktärsdrag som finns hos elever med fallenhet för matematik. I avsnittet *Ämnet matematik* diskuteras distinktionen mellan matematik som skolämne och akademiskt ämne och möjligheten att utveckla skolämnet matematik till ett ämne som närmar sig det akademiska ämnet matematik. I avsnittet presenteras även utvalda forskningsstudier av klassrumspraktik där fokus är att lyfta fram ämnet matematik och där klassrumsinteraktionen syftar till att utveckla matematiska förmågor. Därefter följer ett avsnitt om *Matematikundervisningens utformning* som inleds med ett historiskt perspektiv på den svenska skolans organisatoriska struktur främst vad gäller undervisningens anpassning till elever i behov av särskilt stöd på grund av särskilda förmågor. I avsnittet presenteras och diskuteras även aktuella statliga rapporter, utvärderingar och forskningsrapporter om svensk matematikundervisning, dels generellt dels specifikt med hänsyn till elever med särskilda förmågor. Sedan följer en diskussion om lärarens roll i utvecklingen av elevernas matematiska förmågor. Avsnittet avslutas med en presentation av olika matematiska aktiviteter och hur dessa kan utformas för att stimulera elever med särskilda förmågor i matematik.

Begåvning i ett generellt perspektiv

Forskning om hög begåvning förekommer världen över (se Heller, Mönks, Sternberg, & Subotnik, 2000; Mönks & Pflüger, 2005; Mönks & Ypenburg, 2009; Shavinina, 2009; Sternberg & Davidson, 2005; Ziegler, 2010) även om forskning om hög begåvning ännu förekommer sparsamt i vårt land (Edfeldt & Wistedt, 2009; Mönks & Pflüger, 2005; Persson, 2009; Persson, Joswig & Baloggh, 2000). Begåvningsforskning ses i många länder som ett viktigt område då samhällsutvecklingen, i socialt, kulturellt och tekniskt hänseende, ofta har sin grund i exceptionella individuella prestationer (Sholy, 2008, s. 251; Ziegler, 2010, s. 9).

Benämning av begåvning

Himmelska barn är Platons beskrivning av barn utrustade med exceptionella kognitiva förmågor (Wistedt, 2007) och är en av de första benämningarna för de barn som vi idag betecknar som *särbegåvade*, vilken är den vedertagna svenska benämningen av elever med exceptionella förmågor (Persson, 1997). Betydligt fler benämningar används internationellt för att beskriva dessa individer eller i forskning om sådana individer. Enligt Persson (1997) används fortfarande begreppet *begåvad* (gifted) i USA medan man i Kanada talar om *exceptionella barn* och i Australien om *barn med särskilda förmågor* eller *särskilt kapabla barn* (*ibid*, s. 43). Även i Tyskland har benämningen länge varit *begåvad* eller *högt begåvad* (Hochbegabt), men andra benämningar förekommer. Ziegler (2010) använder termen *excellenta prestationsförmågor*, vilket är en relativt ny benämning som tänks innefatta övriga benämningar och som nedan presenteras i form av den så kallade Delfimodellen (*ibid*, s. 23), som fått sitt namn efter oraklet i Delfi.

Förmågor som under Platons och Konfucius tid (ca 500 f. Kr.) sågs som utförsgåvor med gudomlig härstamning, beskrevs under 1500-talet som personliga egenskaper. Begåvning ansågs vara en Guds välsignelse vilken även kunde ge personliga fördelar under individens livstid (Ziegler, 2010, s. 12). Begreppet *talang* användes för första gången år 1537 av filosofen Paracelsus för att beskriva intellektuell förmåga, något individen kunde utnyttja för att uppnå personliga mål (Passow, Mönks, & Heller, 1993). Under 1600- och 1700-talet fick det individuella perspektivet ännu större genomslag, som Ziegler uttrycker det, i framväxten av *synsättet* ”att vem som helst av egen kraft kunde skapa nya insikter” (Ziegler, 2010, s. 13). Detta synsätt, att personer presterar olika och att det finns ett ekonomiskt värde i personliga prestationer, resulterade exempelvis i utvecklingen av upphovsrätt och patenträtt (*ibid*, s. 14).

Trots vetenskapliga genombrott inom begåvningsforskningen under 1900-talet förekommer fortfarande myter om begåvningens ursprung och art. Diskussionen rör dels relationen mellan arv och miljö, dels relationen generell begåvning kontra begåvning inom någon specifik ämnesdomän (Bloom, 1985, s. 3; Edfeldt, 1993; Mayer, 2005; Persson, 1997, s. 98; Winner, 1999, s. 124; Ziegler, 2010, s. 17). Mayer (2005) menar att diskussionen om begåvning, som antingen medfödd eller utvecklad genom träning, är ett genomgående tema i begåvningsforskningen, men forskare är idag relativt överens om att ”giftedness depends on both natural endowment and life experience – that is, giftedness is both innate and learned” (*ibid*, s. 440). Winner uttrycker denna kombination av arv- och miljöberoende på följande sätt:

> Viljan att arbeta hårt med någonting, att öva och utforska under lång tid, kommer inifrån. Sådan inre motivation uppträder i typfallet när det finns en stor medfödd förmåga, under förutsättning att föräldrarna ger tillräckligt med stöd och uppmuntran. (Winner, 1999, s. 126).

När det gäller diskussionen om huruvida begåvning bör ses som generell eller specifik för en ämnesdomän hänvisar Mayer (2005) till forskare som menar att begåvning alltid är begåvning för något och följaktligen med nödvändighet domänspecifik. Naturligtvis finns generellt särbegåvade barn men dessa hör enligt Winner (1999) mer till undantag än till regel då en kombination av starka och svaga sidor är vanlig hos alla särbegåvade individer (*ibid*, s. 40).

Begåvningsbegreppets innebörd

Även vetenskapligt har det varit svårt att ge en tydlig och avgränsad definition av begåvningsbegreppet. Det finns idag över hundra olika definitioner av begreppet (Hany, 1987) och en genomgång av den vetenskapliga litteraturen inom området visar att extremt olika uppfattningar råder om hur begreppet kan och bör definieras (Feldhusen & Jarwan, 1993).

Många forskare skiljer mellan begreppen talang och begåvning (se George, 1992, s. 1; Mönks & Ypenburg, 2009, s. 43; Persson, 1997, s. 46; Ziegler, 2010, s. 19). Enligt Ziegler betraktas begreppet *talang* av vissa som underordnat begåvning (*ibid*, s. 19). Andra anser, enligt Mönks & Ypenburg (2009), att begåvning eller hög begåvning avser framstående prestationer inom flera områden och *talang* framgång inom ett specifikt område (exempelvis idrott, musik, matematik etc.). Enligt Persson (1997) beskriver vissa forskare begåvning som ”en medfödd potential”, och talang som ”manifestationen av denna potential” (*ibid*, s. 46). Det betyder, enligt denna tolkning, att en individ kan vara begåvad utan manifesterad talang men kan knappast ha talang utan att vara begåvad.

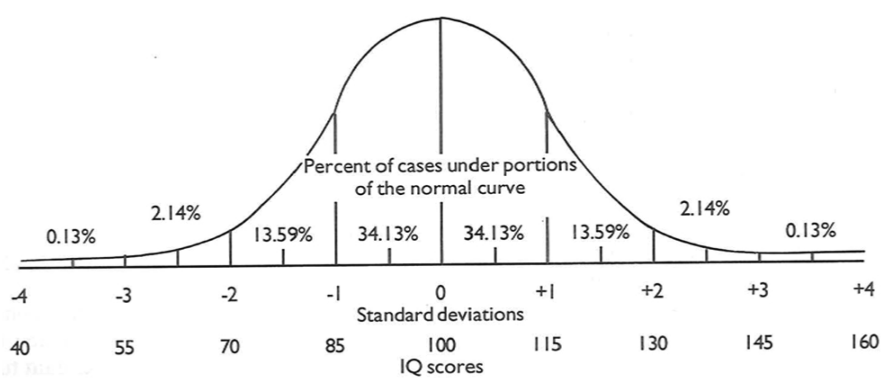
Ett sätt att benämna och definiera begåvning är, vilket nämndes ovan, Delfimodellen, efter oraklet i Delfi (Ziegler, 2010). Modellen ”bygger på expertutlåtanden om hur en viss individ sannolikt kommer att klara av sina studier och vilka prestationer man kan förvänta sig av henne” (*ibid*, s. 20). Zieglers modell innefattar definitioner av tre begrepp; *talang*, *särbegåvning* och *expert*. Definitionen av talang är ”en person som möjligen kommer att kunna uppnå excellent prestationsförmåga i framtiden” medan definitionen av särbegåvning är ”en person som sannolikt kommer att uppnå excellent prestationsförmåga i framtiden” och definitionen av expert ”en person som med säkerhet redan uppnått excellent prestationsförmåga” (*ibid*, s. 21). Modellen innehåller även aspekter som ligger utanför de personliga egenskaperna då Ziegler menar att ”vetenskapligt grundade omdömen om utvecklingen gäller hela systemet utgående från en person och hennes omgivning" (*ibid*, s. 21). Han ger även definitioner av underpresterande individer och högpresterande individer (*ibid*, s. 21-22).

Olika förklaringsmodeller för särbegåvning

Som framgått ovan finns ingen entydig definition av begreppet begåvning. Det innebär att det också finns olika förklaringsmodeller eller begåvningsmodeller, presenterade på varierande sätt i litteraturen om särbegåvning. Syftet är emellertid gemensamt: att identifiera begåvning hos individer, helst tidigt, samt i vissa fall även beskriva processen att utveckla medfödd talang till begåvning. Dessa förklaringsmodeller kan antingen vara *monokausala*, vilket innebär att de betraktar särbegåvning som funktion av en enda orsak eller *multikausala* vilket innebär att de tar hänsyn till flera olika faktorer.

Monokausala modeller

Enligt Mönks & Ypenburg (2009) utgår *färdighetsmodeller*, vilka är monokausala modeller, från "antagandet att mentala (intellektuella) förmågor kan fastställas redan i tidig ålder och att de sedan inte avsevärt förändras under en persons livstid" (*ibid*, s. 20). En företrädare för denna inriktning är den amerikanske forskaren Lewis Terman, vars studie inom intelligensforskning påbörjades år 1921 (Terman, 1925). Han utgick från att särbegåvning kunde påvisas i mätningar av intelligenskvot (dvs. kvoten mellan uppmätt intelligensålder och levnadsålder, multiplicerad med 100). Deltagarna i hans studie, ca 1500 högt begåvade personer, hade den genomsnittliga intelligenskvoten 150. Att detta var en anmärkningsvärt hög genomsnittlig intelligensnivå kan ses i figuren nedan som visar den procentuella fördelningen av IQ-värden över en population (Silverman, 1993).



Figur 1. "The theoretical curve of distribution of intelligence" (Silverman, 1993, s. 8)

Terman (1925) kunde visa att deltagarna i hans studie låg över genomsnittet även i många andra hänseenden. De var exempelvis friskare och längre än genomsnittet, hade bättre ledaregenskaper och blev som vuxna utomordentligt framgångsrika. Men studien visar också att deltagarna fick bättre mat, bättre möjligheter till fysisk aktivitet samt bättre skolundervisning än genomsnittet. Inom studien kunde forskarna emellertid inte se någon korrelation mellan deltagarnas framgång inom sina respektive domäner och deras IQ (se Feldhusen, 2005; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010).

Strax före sin död konstaterade Terman att de forskningsdata som han samlat under drygt trettio år tydligt klargjorde att enbart intelligens inte är tillräcklig för att beskriva en individs begåvning. En rad exempel på individer i Termans undersökningsgrupp, vilka alla hade nått framgång, visade att de inte bara var intelligenta utan även högt motiverade men också omgivna av människor vilka varit positivt inställda och villiga att ge stöd, stimulans och hjälp (Mönks & Ypenburg, 2009). Resultat från senare studier (Deary, 2006; Feldman & Goldsmidt, 1986; Subotnik, Kassan, Summers & Wasser, 1993) visar även dessa att IQ varken har något entydigt samband med yrkesframgång eller med excellenta prestationer. Forskare har även uttryckt sin tveksamhet mot IQ-kriteriet som mått på mänsklig förmåga då inte alla typer av förmågor visar sig som hög IQ, exempelvis musikaliska, konstnärliga eller idrottsliga förmågor (Ericsson, 1996; Sternberg & Davidson, 2005; Winner, 1999). En utvidgning av intelligensbegreppet, att inte enbart handla om en intelligens och ett mätvärde, har gjorts av en rad forskare där Gardners (1983) modell för multipla intelligenser är den mest refererade.

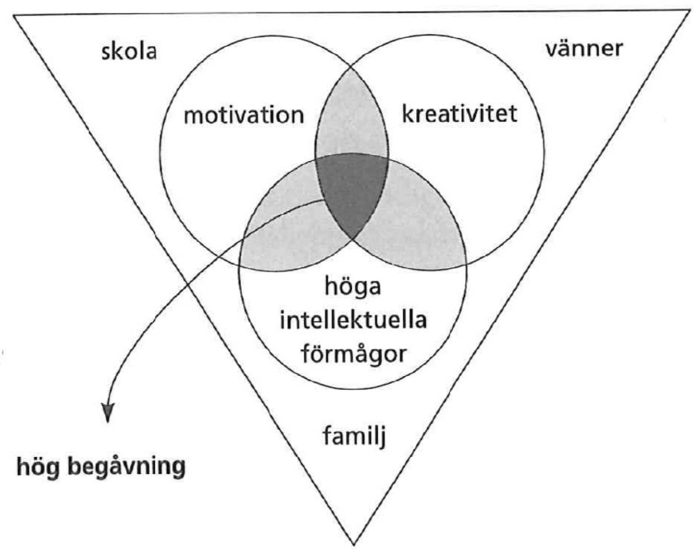
Andra monokausala förklaringsmodeller är *prestationsorienterade* modeller och modeller som bygger på *expertisforskning*. De förra används ofta i undervisningspraktiken och bygger på observationer av utomordentliga prestationer. Här ses högpresterande individer, exempelvis de som är bäst i klassen eller vinner tävlingar, som särbegåvade. Prestationer som ligger över genomsnittet ses framförallt inom musik, konst och idrott som indikatorer för talang och begåvning, förmodligen beroende på att dessa discipliner haft svårt att använda sig av intelligenskvot för identifiering av begåvningar. Även inom akademiska ämnen förekommer att man ser prestationer över genomsnittet som indikationer på att det föreligger begåvning (Mönks & Ypenburg, 2009; Persson, 2010; Ziegler, 2010).

Expertisforskningen, som är en relativ ung gren av begåvningsforskningen, inleddes för ca 40 år sedan. Den skiljer sig från övrig begåvningsforskning i det att den utgår från högt begåvade individer, experter, och försöker klarlägga vad som gör att dessa kan prestera på toppnivå och hur de lyckats skaffa sig denna särbegåvning. Begåvningsmodellen visar entydigt på att dessa experters begåvning är domänspecifik och till största delen beroende av domänspecifika inlärningsprocesser (Ziegler, 2010 s. 40). En forskare som använder sig av denna modell är Bloom (1985). Hans studie omfattar 120 vuxna individer vilka alla nått den absolut högsta nivån inom sina respektive områden. Studien bygger på intervjuer där intervjupersonerna ombeds blicka tillbaka på sin uppväxt och utveckling och Bloom söker i intervjumaterialet förklaringar till vad som gjort dem så framgångsrika. Vi återkommer till denna studie nedan.

Multikausala modeller

Begåvningsmodellerna har utvecklats under senare årtionden från att tidigare endast ha omfattat enstaka faktorer, som de ovan, till att inkludera flera olika faktorer, s.k. multikausala förklaringsmodeller eller multifaktoriella modeller (Ziegler, 2010 s. 56). En liknande utveckling gäller modeller för intelligensbegreppet där nutida forskning beskriver multipla intelligenser (Gardner, 1983). De samverkande faktorerna i dessa multifaktoriella förklaringsmodeller kan, förutom de ovan nämnda faktorerna intelligens, prestationer och lärmiljön, inkludera andra omvärldsfaktorer som t.ex. familj, vänner och skola.

Renzulli (2005) introducerar en modell med tre ringar vilka betecknar de personlighetsegenskaper som han menar ligger till grund för särbegåvning: intellektuella förmågor, kreativitet och motivation. Samma personlighetsegenskaper använder Mönks (1992, s. 194) då han presenterar sin modell, den *triadiska interdependensen*, men i denna modell finns även tre omvärldsfaktorer inkluderade: skola, vänner och familj (se figur 2).

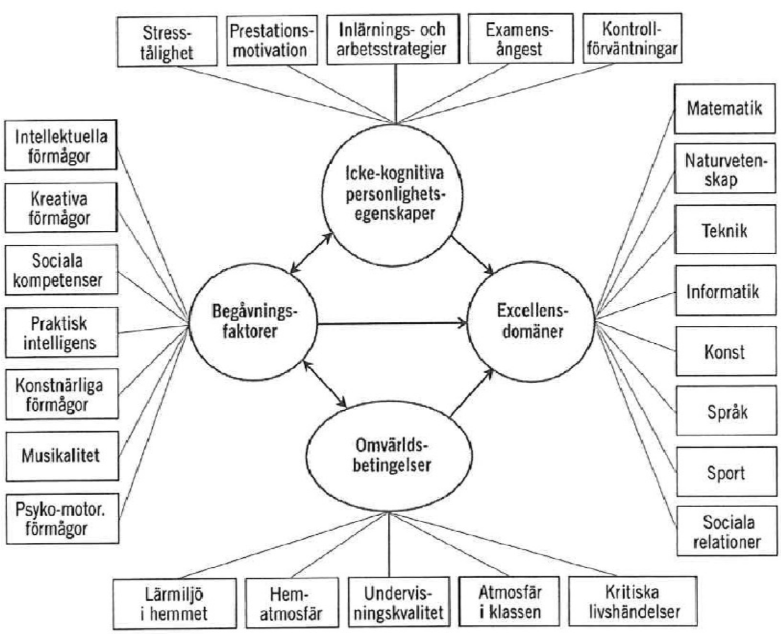


Figur 2. *Triadiska interdependensen (Mönks & Ypenburg, 2009, s. 30)*

Med *höga intellektuella förmågor* avser Mönks & Ypenburg (2009) en intelligenskvot som ligger över genomsnittet. I de flesta fall handlar det om de

5-10 översta procenten i en population. *Motivation* innebär enligt Mönks ”att någon har viljan och kraften att slutföra en bestämd uppgift eller ett påbörjat arbete” (*ibid*, s. 27). Det innebär även att individen är kapabel att planera, sätta upp mål och förutse risker. Vidare innebär *kreativitet*, enligt Mönks, ”att man har förmågan att på ett originellt och uppfinningsrikt sätt hitta lösningar på problem” (*ibid*, s. 28). Det innebär också ett ”självständigt och produktivt tänkande” (*ibid*, s. 28) som står i kontrast till det reproducerande och repeterande undervisningssätt som ofta förekommer i skolan. Modellen borde enligt Mönks vara tredimensionell då alla element påverkar varandra i ett ömsesidigt beroende, interdependensen (*ibid*, s. 28). Särbegåvning föreligger först då alla sex faktorer samverkar och en harmonisk utveckling kan ske. Mönks definierar särbegåvning som “an individual potential for exceptional or outstanding achievements in one or more domains” (Mönks & Katzko, 2005, s. 191). Kritik har emellertid riktats mot denna modell då modellen inte genomgått någon empirisk giltighetsprövning (Ziegler, 2010).

En modell som tar hänsyn till flera prestationsområden, och som därmed skiljer sig från mer traditionella begåvningsmodeller vilka har fokus på det akademiska fältet, är *Münchenmodellen* (Heller, Perleth & Lim, 2005). Forskarna särskiljer, precis som Mönks, olika begåvningsfaktorer och omvärldsfaktorer och gör detta på ett detaljerat sätt enligt figur 3 (*ibid*, s. 149).



Figur 3. *Münchenmodellen (Heller, Perleth & Lim, 2005).*

Även denna modell får kritik i form av att den fortfarande avser intellektuella förmågor baserade på IQ-test samt att det är oklart hur växelverkan mellan de olika faktorerna påverkar varandra (Ziegler, 2010).

I en modell, som av Ziegler fått benämningen *aktiotopmodellen*, spelar de mänskliga egenskaperna inte någon oberoende roll utan är alltid kopplade till den värld som omger individen. Modellen har likheter med en prestationsbaserad modell av särbegåvning men är en klar utvidgning av den tidigare. I denna modell ses utvecklandet av excellent prestationsförmåga, vilket är modellens benämning av särbegåvning, som en utvidgning av den individuella handlingsrepertoaren. Modellen stöder sig på det *föregående stegets princip* (se exempelvis Dai & Renzulli, 2008) där nästa inlärningssteg alltid ligger inom räckhåll för en individ. Detta kan liknas vid Vygotskys *Zone of Proximal Development* (ZPD) där zonen avser skillnaden mellan vad eleven klarar av på egen hand och vad denne kan lära sig med assistans från en vuxen (Vygotsky, 1978, s. 84-91). I aktiotopmodellen betecknas en individ som ”talangfull ifall man har kunnat identifiera en lärväg för henne som överbryggar klyftan mellan den nuvarande handlingsrepertoaren inom en talangdomän och en excellent handlingsrepertoar” (Ziegler, 2010, s. 63). Det är viktigt att påpeka att excellent prestationsförmåga alltid visar sig inom en specifik domän på samma sätt som särbegåvning alltid innebär hög begåvning *för* någonting. Modellen innehåller förutom handlingsrepertoaren ytterligare tre faktorer; målsättningar, omvärld och subjektivt handlingsutrymme (*ibid*, s. 65).

Den begåvade individen

Vad utmärker en begåvad individ? Precis som när det gäller definitionen av begåvningsbegreppet och de över hundra olika förslag som finns till hur begreppet kan definieras, gäller olika åsikter om hur vi beskriver eller definierar en särbegåvad individ. Persson (1997) ger följande beskrivning:

> Den är särbegåvad som kontinuerligt förvånar både kunskapsmässigt och tillämpningsmässigt genom sin osedvanliga förmåga i ett eller flera beteenden. Ett beteende i detta sammanhang förstås som en mänsklig prestation, aktivitet eller funktion. (*ibid*, s. 50)

Roland Persson är tillsammans med Åke Edfeldt och Inger Wistedt (se t.ex. Edfeldt & Wistedt, 2009) några av de relativt få forskare i Sverige som ägnat sig åt området begåvning och särbegåvade individer. Det finns därför få studier om och analyser av svenska individer med begåvning. Denna blygsamma svenska framtoning inom begåvningsforskningen har inte sällan setts som ett resultat av den egalitära svenska kulturen där individuell begåvning, främst inom det akademiska området, varken framhävs eller uppmuntras (Edfeldt & Wistedt, 2009; Persson, Joswig & Baloggh, 2000;

Wistedt & Sundström, 2011). Uttryck som ”varför ska vi satsa på de redan duktiga, de klarar ju sig själva” är vanliga i Sverige där stöd till begåvade individer eller individer med särskilda förmågor inom en domän snarare ses som elitistiskt (Edfeldt, 1992; Persson, 1997; 1999). Edfeldt skriver: “In Sweden it is considered undemocratic not only to be mentally gifted, but also to be gifted and demand special treatment because of this fact” (*ibid*, s. 47).

En större studie, med ca 300 intellektuellt särbegåvade svenska individer, har genomförts och resultat har nyligen publicerats (Persson, 2007; 2010). Studien följer individerna genom deras utbildning från grundskola till universitet samt deras socioemotionella utveckling. Ett huvudresultat är att 92 % av de deltagande individerna beskriver hur de lidit sig igenom grundskolan (Persson, 2010, s. 550). Följande citat beskriver hur en individ kan uppleva sin skolsituation och lärarnas bemötande:

> If I did my math too quickly, the teacher made me erase everything and start all over again so that I would finish together with the rest”; “I was held back, and was frequently told off for not having done my assignment exactly as I had been told to do it”; and “when weaker students improved the teacher rewarded them. I always scored 100 % and was never rewarded. (*ibid*, s. 550).

Persson menar att den svenska grundskolan är en fientlig miljö för dessa elever och att ett av de mer alarmerande resultaten i studien är att det finns lärare på alla nivåer i utbildningssystemet som straffar begåvat beteende (*ibid*, s. 560). Vidare lämnade 27 % av deltagarna i studien det svenska skolväsendet, vid 18 års ålder, utan att förstå att de var unikt begåvade (*ibid*, s. 545). Istället trodde många att det var fel på dem och att de inte dög. Att ingen hade upplyst dem om deras talang eller uppmuntrat dem i deras utveckling, får ses som ett stort misslyckande i den svenska skolan, som ska vara ”en skola för alla” (*ibid*, s. 558).

Studien av dessa individers socioemotionella utveckling visar, i kontrast till mytbildningen, att dessa elever är empatiska och synnerligen ansvarsfulla samhällsmedborgare (Persson, 2007, s. 26). De har personliga egenskaper som nyfikenhet, kreativitet och självständighet, de är kritiska och ifrågasättande och känner starkt för rättvisa (*ibid*, s. 25). De särbegåvade individerna har generellt ingen bristande social kompetens, snarare tvärtom. Det är istället omgivningens behandling av dessa individer under deras uppväxt som orsakar problem (jfr. Freeman, 2000; Persson, 2007; Robinson, 2008). Persson säger att ”emotional problems are very real for the highly gifted, but they are not qualitatively different from anyone who is not gifted, nor are they in most cases prompted by some pervasive psychological disorder” (Persson, 2007, s. 31). Problemen är oftast orsakade av en oförstående och okunnig omgivning där både familj, vänner och utbildningsväsende ingår. Persson visar att deltagarna i studien inte heller hade fullt stöd från sina familjer (2010, s. 548). Endast hälften av deltagarna upplevde att de hade stöd hemifrån, den andra hälften uppgav att de kunde hånas för sin förmåga eller förbjudas att visa den offentligt. Det framgår även av Perssons studie att 10 % av de deltagande individerna någon gång fällts för ett begånget brott (Persson, 2007, s. 27). Detta jämför Persson, med referens till statistik från Brottsförebyggande rådet, med att endast 0,02 % av svenska medborgare över 18 år har begått brott med rättslig påföljd. Bristen på stimulans, vilken är tydlig i det svenska utbildningssystemet, menar Persson är en orsak. En annan orsak kan vara att individerna, trots eller kanske tack vare sin höga moral, ser sig som personer som behöver hjälpa till att förändra världen och då tar lagarna i egna händer (*ibid*, s. 28).

Barn som inte blir förstådda eller får liten eller ingen uppmärksamhet för sina förmågor känner ett utanförskap och barnen gör i vissa fall allt för att passa in i den sociala miljön (Csikszentmihalyi, Rathunde & Whalen, 1997; Leyden, 2002; Persson, 2005). Många elever döljer sina förmågor och känner att de måste göra ett val mellan möjligheten att visa sina förmågor och utsikten att bli populär (Leyden, 2002, s. 60). Kombinationen, att vara duktig och populär, fungerar oftast inte, framförallt inte i Sverige. Persson (2005) beskriver, i en fallstudie, en svensk pojke i grundskolan som ”hated his own ability to understand and to learn with greater ease than most of his contemporaries” (*ibid*, s. 269). Pojken, som Persson kallar Punch, vantrivdes och kände ett sådant utanförskap att han bestämde sig för att försöka få bort “det” som gjorde honom annorlunda. ”To make himself more like ”everyone else” he decided to inhale the solvent fumes of a certain type of glue, which he knew would cause brain damage if he exposed himself to it long enough” (*ibid*, s. 269). Punch lyckades lyckligtvis inte med detta men hade, enligt Persson, som även fungerade som pojkens mentor, mycket svårt att tolka sin talang som något positivt och var väl medveten om att det i Sverige passade sig bättre att vara som alla andra (*ibid*, s. 270). Liknande kommentarer finns från de ca 300 särbegåvade individerna i Perssons studie från 2010 då dessa beskriver sin studiesituation i grundskolan ”I deliberately kept my achievements low so I would fit in” och ”I had to shut down my brain to adapt to the teacher´s level of instruction” (Persson, 2010, s. 550).

Det finns även elever som inte har möjlighet att kontrollera sitt beteende. Oftast är dessa elever understimulerade, och de kan av lärare upplevas som besvärliga och stökiga (Engström, 2005b). De understimulerade eleverna har ofta fallenhet för något ämne eller område och får inte det stöd och de utmaningar som behövs för att stimuleras att arbeta. Det finns elever som under grundskolan aldrig behövt anstränga sig, aldrig behövt göra en läxa och så snart de hört lärarens genomgång har de förstått. Eleverna har därmed inte utvecklat någon studieteknik eller något arbetssätt och är helt oförberedda när kraven ökar (Engström, 2006). En longitudinell studie i Schweiz, ”Frühlesen und Frührechnen als soziale Tatsachen 1995-2008” (Stamm, 2006; Stutz & Stamm, 2006), har följt 193 barn som innan skolstart kunde läsa och/eller räkna. Barnen, som valdes ut bland 2667 barn i Schweiz och Liechtenstein, dels genom lärares rekommendationer dels genom testresultat, delades in i tre grupper efter sina förutsättningar innan skolstart: tidiga läsare (TL), tidiga räknade (TR) och tidiga läsare och räknare (TLR) (Stamm, 2006, s. 28). Dessa barn har, tillsammans med en kontrollgrupp bestående av 181 barn, följts kontinuerligt under drygt 10 år. Alla barnen i undersökningsgruppen låg minst ett år före i jämförelse med den Schweiziska utbildningsplanen (Stamm, 2006, s. 35). Studien visar att barnen i undersökningsgruppen i slutet av sin obligatoriska skolgång fortfarande utmärkte sig i förhållande till kontrollgruppen när det gäller kognitiv förmåga samt förmågor inom matematik respektive tyska. De skilde sig däremot inte från kontrollgruppen när det gällde social kompetens och integration inom och utanför skolan (Stutz & Stamm, 2006, s. 6). Studien visar även att det är de tidiga läsarna och räknarna (TLR) som utmärkte sig mest, uppvisade högre prestationsförmåga, högre motivation och högre inlärningshastighet än sina kamrater. Men det var även bland dessa (TLR) som de flesta underpresterarna fanns. De utmärkte sig genom höga resultat på intelligenstester men betydligt sämre resultat på skolprov och måttliga betyg. Dessa elever uppvisade låg självkänsla, låg motivation för att lära sig ordinarie kursutbud och svårigheter att arbeta under press (*ibid*, s. 7). Detta kan vara ett resultat av att de fått för lite utmaningar och stimulans under de tidigare åren vilket lett till dåliga arbetsvanor och brist på studieteknik.

Häggblom (2000) har i en longitudinell studie följt drygt 100 elever från 6 till 15 års ålder. Eleverna har vid 6, 9, 12 och 15 års ålder testats på uppgifter inom områdena tal, räkneoperationer och lösningar av textuppgifter. Elevernas svar har analyserats och elevernas utveckling har följts. Studien visar att de kunskaper eleverna visar vid skolstarten endast till liten del kan förutsäga hur barnen kommer att lyckas under skoltiden. Endast 20 % av eleverna i undersökningsgruppen tillhörde samma prestationsgrupp (låg-, mellan- respektive högpresterande) under hela skoltiden. Som vi ser, av studierna som presenterats ovan, är förmågor utvecklingsbara, i olika utsträckning och i olika riktningar för olika elever.

Persson (2007) menar att mentorskap som stöd till särbegåvade elever är en av de viktigaste åtgärderna som kan vidtas men säger vidare att detta faktum många gånger är förbisett inom begåvningsforskningen (*ibid*, s. 270). En mentor bör ha bred kunskap om begåvning och begåvade individer medan val av mentor och förutsättning för mentorskapet kan variera från individ till individ. Det är viktigt att det särbegåvade barnet själv får vara med och påverka vem som ska vara mentor då det är viktigt med ömsesidig förståelse (*ibid*, s. 272). I USA finns olika modeller för ”counseling” (Silverman, 1993) av särbegåvade individer, en form av stöd som inte har någon svensk motsvarighet. I USA har alla barn en lagstadgad rätt till stöd om de blir identifierade som begåvade. Liknande villkor råder även i andra länder såsom exempelvis Storbritannien, Nederländerna, Tyskland, och Ungern (Persson, Joswig & Balogh, 2000).

Av vad som sagts ovan framgår att forskning om begåvning och begåvade individer är betydligt mer utbredd i övriga världen än i Skandinavien och internationella forskare har på olika sätt försökt beskriva hur dessa särbegåvade barn kan karaktäriseras. En av dessa beskrivningar gör Ellen Winner (1999):

> Särbegåvade barn är brådmogna. De börjar ta de första stegen mot behärskande av någon domän i en lägre ålder än genomsnittet. De gör också snabbare framsteg inom denna domän än vad normalbegåvade barn gör, eftersom lärandet inom domänen går lätt för dem. Med domän syftar jag på ett organiserat kunskapsområde, t.ex. språk, matematik, musik, konst, schack, bridge, balett, gymnastik, tennis eller skridskoåkning. (*ibid*, s. 14)

Både Winners (1999) och Perssons (1997) beskrivningar anger andelen särbegåvade individer till ca 2-5 % av en årskull. Eftersom det råder olika definitioner och tolkningar av begreppet särbegåvad finns också delade meningar om antalet särbegåvade individer. Ziegler (2010) redogör för hur ett antal forskare inom begåvningsfältet anger gränsen för särbegåvning.

> I nuvarande standardverk om begåvningsteorier (Sternberg & Davidson, 2005) finner man bland annat att de särbegåvade utgör från 1 % av alla människor (Terman), 1-3 % (Robinson), 3 % (Stanley), 5 % (Mayer), 5-10 % (Freeman), 10 % (Gagné), 15 % (Gordon) ända upp till 20 % (Renzulli). Dessa gränsdragningar är fullkomligt godtyckliga. Men de har till följd att Renzulli uppskattar antalet begåvade individer nästan 2000 procent högre än Terman. (*ibid*, s. 19)

Nedan, i avsnittet *Begåvning i matematik*, presenteras forskning om lovande elever i matematik. Forskare inom detta fält menar att dessa elever, som är i behov av extra stöd och stimulans för att ha möjlighet att utvecklas efter sina förutsättningar, i vissa fall utgör upp emot 20 % av en årskull.

En beskrivning av särbegåvade individer där hänsyn tas både till deras intellektuella drag och personliga drag görs av Silverman (1993):

Intellectual Characteristics	Personality Characteristics
exceptional reasoning ability	insightfulness

intellectual curiosity	need to understand
rapid learning rate	need for mental stimulation
facility with abstraction	perfectionism
complex thought processes	need for precision/logic
vivid imagination	excellent sense of humor
early moral concern	sensitivity/empathy
passion for learning	intensity
powers of concentration	perseverance
analytical thinking	acute self-awareness
divergent thinking/creativity	nonconformity
keen sense of justice	questioning of rules/authority
capacity for reflection	tendency toward introversion

(*ibid*, s. 53)

Silverman menar att det är viktigt att alla som arbetar med eller umgås med de särbegåvade barnen känner till dessa egenskaper och karaktärsdrag för att kunna ge råd och stödja både barnen och deras föräldrar. Silverman beskriver de olika intellektuella och personliga egenskaperna och menar att *nyfikenheten*, som både kan anses vara en intellektuell och personlig egenskap, är den som föräldrar först lägger märke till hos sina särbegåvade barn (*ibid*, s. 55). Även *insiktsfullhet* eller *förmågan att resonera* och visa förståelse är egenskaper som de flesta föräldrar känner igen hos sina barn. Detta är kvalitéer som ofta leder till förmåga att lösa problem men också att finna nya problem (*ibid*, s. 54). *Hög abstraktionsförmåga* och *perfektionism* är, enligt Silverman, troligen de mest slående karaktärerna hos särbegåvade medan relationen mellan dem kan kännas otydlig. Medan förmågan att resonera abstrakt är den mest accepterade aspekten av särbegåvning är perfektionism den minst förstådda och mest baktalade, detta trots att den sistnämnda är en direkt följd av den tidigare. Perfektionism är medvetenhet om vad som är möjligt, ett abstrakt ideal bortom det som för närvarande existerar (*ibid*, s. 57). Perfektionism kan även ta sig uttryck i en *stark känsla för rättvisa* vilken ofta leder till *ifrågasättande om regler och auktoritet*. För många särbegåvade barn är emellertid ifrågasättande och argumenterande lika mycket former för mental träning och möjligheter att lära som ett medel att vinna poäng i en diskussion. I vissa familjer är argumentation en vanlig form för kommunikation. Alla deltagare är införstådda med spelets regler och den mest övertygande individen vinner både den mentala kampen om klokhet eller kvickhet och övriga deltagares uppskattning för sin begåvning (*ibid*, s. 67).

I Silvermans ”developing model for counseling the gifted” (*ibid*, s. 53) finns även en beskrivning av olika möjligheter till stöd som elever, vilka uppvisar delar av ovanstående intellektuella och personliga karaktärsdrag, är i behov av. Bland dessa nämns exempelvis mentorskap, nätverk, grupparbete och diskussioner med kamrater med samma intresse samt även rådgivning, både individuell rådgivning och familjerådgivning.

Det finns andra beskrivningar, eller snarare checklistor, som anger vanliga karaktärsdrag hos elever med generell särbegåvning eller särskilda förmågor inom någon domän. Dessa listor kan fungera som användbara verktyg för lärare som vill upptäcka och möta dessa elever. Bates & Munday (2005) beskriver, precis som Silverman ovan, att de särbegåvade barnen är nyfikna, frågvisa, har sinne för humor samt förmåga att tänka abstrakt. Men de framhåller även att dessa barn gärna umgås med vuxna då de har svårt att hitta vänner i sin egen ålder. Vidare har de särbegåvade barnen ett utmärkt minne och förmåga att bevara och använda tidigare information i nya situationer. De har ibland ett utmanande beteende, särskilt då de är uttråkade eller frustrerade, vilket de kan vara i skolarbetet om de tycker att det saknar mening (*ibid*, s. 6-7).

Dessa beskrivningar av generellt begåvade individers intellektuella och personliga egenskaper sammanfaller till stora delar med beskrivningar av individer som har särskilda förmågor i matematik vilka presenteras och diskuteras nedan.

Sammanfattning och slutsatser av diskussionen ovan för min studie

Redovisningen ovan av begåvningsbegreppets utveckling ger en historisk belysning av forskningsområdet och en allmän bakgrund till denna studies något smalare område: elever med särskilda förmågor i matematik. Den generella begåvningsforskningen är både äldre och mer omfattande än den forskning som specifikt inriktas mot begåvning i matematik. Den ger därmed en bredare bild av begreppet begåvning samt av de egenskaper och personlighetsdrag som är utmärkande för begåvade individer. Framförallt behövs denna bakgrund för förståelsen av begåvade individers situation och behov av stöd och stimulans. Av de ovan redovisade begåvningsmodellerna är det främst Mönks triadiska modell som kommer att användas i den aktuella studien. Skälet är att modellen inkluderar både individens särskilda förmågor men även sociala aspekter som stöd från skola, familj och vänner. I diskussionen återkommer jag till beskrivningen av begåvningsbegreppet och de begåvade individernas situation i skola och klassrum. Vi lämnar dock tillfälligt det generella perspektivet och tar oss an ett perspektiv med särskild relevans för den aktuella studien – begåvning i matematik och de begåvade individerna i matematik.

Begåvning i matematik

Forskning om begåvning i matematik och hur vi kan identifiera och stimulera elever med särskilda förmågor i matematik pågår världen över även om den fortfarande, precis som generell begåvningsforskning, inte har någon framträdande roll i vårt land.

En definition av matematisk begåvning ges här med referens till en berömd och ofta refererad studie (Krutetskii, 1976) vilken också utgör ett teoretiskt ramverk för denna studie.

> Mathematical giftedness is the name we shall give to a unique aggregate of mathematical abilities that opens up the possibility of successful performance in mathematical activity (or, with schoolchildren in mind, the possibility of a creative mastery of the subject). (*ibid*, s. 77)

Krutetskii beskriver vidare en struktur för matematiska förmågor och hur dessa uttrycks vid arbete med matematisk problemlösning. Denna struktur ligger till grund avhandlingen och används vid analyser av empiriska studier där fallstudieelever löser matematiska problem. Krutetskiis arbete kommer att presenteras och diskuteras närmare i teoriavsnittet nedan. Många av de forskare som är aktiva inom området idag (t.ex. Bicknell, 2009; Freiman, 2006; Gavin, Casa, Adelson, Carroll, & Sheffield, 2009; Koshy, Ernest & Casey, 2009; Kilpatrick m.fl., 2001; Käpnick & Fuchs, 2004; Sriraman, 2008; Vilkomir & O'Donoghue, 2009) använder Krutetskiis definition då de studerar identifiering och stimulering av matematiska förmågor hos elever.

Matematisk kreativitet är relativt outforskad i matematikdidaktisk forskning (Sriraman, 2008, s. 1). Däremot förekommer matematisk kreativitet numera ofta i samband med forskning om matematisk begåvning (Sriraman, 2008a; Leikin, Berman & Koichu, 2009). Krutetskii (1976) tar i sin studie upp begreppet kreativitet, bland annat i samband med en differentiering av begreppet matematisk förmåga i två aspekter: "as school ability"och "as creative (scientific) ability", där han menar att den första aspekten ofta jämförs med "understanding of mathematical theories", en sorts reproducerande arbete och den andra med "invention of new theories" eller ett producerande arbete (*ibid*, s. 68). Krutetskii menar att denna indelning av matematisk förmåga i två aspekter inte är absolut. Matematisk kreativitet förekommer i skolmatematik eller i skolelevers förmågor då de upptäcker *för dem* nya samband och teorier (*ibid*, s. 69).

Sriraman (2008b) anser det tillräckligt att definiera matematisk kreativitet som förmågan att producera nytt eller originellt arbete eller, som han mer formellt uttrycker det, att matematisk kreativitet är en process som resulterar i ovanliga och insiktsfulla lösningar till givna problem oavsett nivå på problemen (*ibid*, s. 4). Sriraman (2008c) diskuterar även skillnader och likheter mellan matematisk kreativitet och matematisk begåvning, bl.a. med referenser till Krutetskii, och menar att matematisk begåvning inte nödvändigtvis inkluderar matematisk kreativitet, men att det omvända gäller (*ibid*, s. 85). Sriraman menar vidare att de kreativa matematikerna är de som har "…the potential to move the field forward through their atypical/unorthodox methods and insights" (*ibid*, s. 106; jfr. Usiskin, 2000).

Sheffield (2009) menar att utveckling av matematisk kreativitet är det främsta målet för matematikundervisning och det lärare bör sträva efter att elever ska uppnå. Vi lever idag i en komplex värld där det inte längre är tillräckligt för lärare att lära elever att memorera regler och metoder som gör att de kan svara på lärarens frågor. Lärarens frågor är dock viktiga om de ställs på ett sådant sätt att de lockar fram intresse och ger upphov till en matematisk diskussion. Det som är än viktigare är att eleverna genom lärarens frågor lär sig ställa liknande frågor till sig själva eller andra för att fortsätta den matematiska diskussionen (jfr. Mason, 2000). Sheffield (2009) menar att elever, för att kunna bemöta framtidens frågor, måste utvecklas långsiktigt och denna utveckling handlar då om att gå från ett memorerande av kunskap till ett problemlösande och slutligen kreativt handlande. Sheffield väljer att illustrera denna utveckling inom matematik med hjälp av figuren nedan.

Innumerates	doers	computers	consumers	problem-solvers	problem-posers	creators

Figur 4. Continuum of mathematical proficiency (Sheffield, 2009, s. 88)

Sheffield menar att skolan tidigare har varit nöjd med att ge eleverna basfärdigheter fram till och med konsumenter (consumers) medan problemlösning är något som blivit accepterat som ett basområde i skolmatematik först under senare år. Hur denna undervisning i problemlösning utförs och vilka problem som används är av stor betydelse för elevernas matematiska utveckling mot matematisk kreativitet. Sheffield förespråkar rika matematiska problem, där eleverna erbjuds flera möjligheter att upptäcka samband, utforska lösningsstrategier och reflektera över tillämpningsområden samt öppna problem, där mer än ett rätt svar finns och inte någon given lösningsmetod (jfr. Bergman Ärlebäck, 2010). Sheffield menar vidare att "for students to be creative in mathematics, they should be able to pose mathematical questions that extend and deepen the original problem as well as solve the problem in a variety of ways" (Sheffield, 2009, s.

88). Sporren, och det som ger de mest kreativa matematikerna kraft och framgång, är att ställa nya frågor och lägga fram nya problem. Ytterligare diskussioner om frågornas betydelse för utvecklingen av matematiska förmågor, matematisk kreativitet och matematisk förståelse, återkommer vi till senare i avsnittet *Ämnet matematik*.

Forskare som likt Sheffield (2009) för en diskussion om hur undervisningen bör förändras för att stimulera kreativitet hos elever med fallenhet för matematik är exempelvis Diezmann (2005), Freiman, (2006), Koshy, Ernest & Casey (2009) och Vilkomir & O'Donoghue (2009). De menar alla att det krävs utmanande uppgifter om eleverna ska utveckla matematisk kreativitet och ta dem ytterligare ett steg på vägen mot matematisk förståelse av begrepp, metoder och processer (jfr. Lithner, 2008; Boesen, 2006). Många forskare menar också att det krävs olika former av organisatoriskt stöd, t.ex. särskilda utbildningsplaner, särskilda kursplaner eller olika former av nivågruppering, för att elever med fallenhet, generellt eller inom någon domän (exempelvis matematik) ska ha möjlighet att utveckla sina kreativa förmågor (Gavin, Casa, Adelson, Carroll, & Sheffield, 2009; jfr. VanTassel-Baska, 2004; Fischer, Mönks & Grindel, 2004).

I en studie av Koshy, Ernest & Casey (2009) valde lärare ut elever som ansågs lovande i matematik. Eleverna, som alla var i åldern 9-10 år, fick i början av projektet frågan "Vad är matematik?". 84 % av eleverna beskrev matematik i termer av "summor", "lära sig allt om siffror" och "lära sig att räkna" (*ibid*, s. 224). I projektet, som var tvåårigt, kunde forskarna observera en förändring av undervisningen i de klasser där lärarna själva strävade efter att utveckla sin förmåga att stödja elever med fallenhet för matematik (*ibid*, s. 219). Lärarna uppmanades att använda sig av diskussioner och ett undersökande arbetssätt med utmanande uppgifter. Då projektet var genomfört fick eleverna återigen frågan "Vad är matematik?". Mer än hälften av de elever som tidigare beskrivit matematik i termer av summera, lära sig allt om siffror och lära sig att räkna beskrev nu matematik som "lösa problem", "leta information i tabeller och diagram och skriva rapporter om det" samt "arbete med mönster" (*ibid*, s. 224). I artikeln redogör forskarna även för den skillnad som eleverna uttryckte om sin upplevelse av de tidigare matematiklektionerna jämfört med de som ingick i projektet. 74 % av eleverna beskrev de ordinarie matematiklektionerna som "tråkiga, repeterande och för lätta" Lektionerna inom projektet beskrevs som "mycket trevliga men svåra", "får dig att tänka" och "lär dig att göra fenomenala saker som att addera alla tal från 1 till 1000 på 3 minuter" (*ibid*, s. 225). Det fanns även andra kommentarer som handlade om att det numera fanns tillräckligt med tid för att tänka samt att lärarna hade en mer positiv attityd till och acceptans av elevers misstag.

Studier där observatörer, forskare eller lärare går in med berikningsuppgifter, i form av exempelvis mer utmanande problem likt de ovan nämnda, för att identifiera och stimulera matematiska förmågor hos elever är vanliga inom forskningsområdet ”gifted education”. Tyvärr förekommer denna form av matematiska aktiviteter ytterst sparsamt i den ordinarie undervisningen i vårt land vilket vi återkommer till senare.

Den begåvade individen i matematik

Många av de karaktärsdrag som beskrivits ovan och som gäller för elever med särskilda förmågor oberoende av intresseområde stämmer även in på elever med särskilda förmågor i matematik. Det är dock viktigt att inte se alla elever med särskilda förmågor som en homogen grupp. På samma sätt som normalbegåvade elever är de olika sinsemellan (Mönks, Heller & Passow, 2000). Trots detta har de ofta gemensamma drag både avseende personlighet och uppväxtmiljö.

I en omfattande studie av Bloom (1985) finner vi några av dessa gemensamma drag. I studien beskrivs karaktärsdrag och uppväxtmiljö för 120 vuxna personer som nått den absolut högsta nivån inom sina respektive områden. Blooms huvudsakliga syfte med studien var att se om det bland dessa personer fanns gemensamma faktorer som kunde kopplas till deras framgång. Han undrade vidare om de som lyckades hade gjort detta för att de hade en speciell begåvning och/eller om framgången var ett resultat av speciell träning. Studiens resultat visar att:

> … no matter what the initial characteristics (or gift) of the individuals, unless there is a long and intensive process of encouragement, nurturance, education, and training, the individuals will not attain extreme levels of capability in these particular fields. (*ibid*, s. 3)

Inom matematik, vilken är den delstudie i Blooms undersökning som vi fokuserar här, redogör han för de intervjuer han genomfört med 20 personer, 19 män och 1 kvinna, i åldrarna 29 - 38 år. I intervjuerna ombads de vuxna matematikerna se tillbaka på sin egen utveckling och uppväxtmiljö. Deras föräldrar och lärare intervjuades också och fick beskriva sin syn på personen och dennes utveckling (*ibid*, s. 270).

Bland de 20 matematikerna i Blooms studie var 14 förstfödda i sin familj och av dessa 14 var fyra ensambarn. Detta är ingen ovanlig fördelning när det gäller särskilt begåvade barn och deras familjesituation. Det finns en rad undersökningar (Freeman, 1979; Gottfried, Bathurst & Guerin, 1994; Terman, 1925) som visar att särbegåvade barn och framstående vuxna i oproportionellt hög grad är just förstfödda barn (jfr. Winner, 1999). Det finns idag ingen genetisk förklaring till att förstfödda skulle ha fördel i förhållande till sina yngre syskon. Sambandet mellan barnets särbegåvning och positionen i familjen måste därför förklaras som en miljömässig snarare än en genetisk fördel. En möjlig förklaring är att förstfödda tillbringar sina första år ensamma tillsammans med föräldrarna och de har då en framträdande ställning. Denna förlorar de när ett syskon föds och de kan då drivas till att prestera för att återta ställningen (Winner, 1999, s. 161).

Bloom (1985) fann att ett tidigt drag som lyftes fram i berättelserna av dessa vuxna som barn med särskilda förmågor i matematik var deras nyfikenhet. Detta är inte något ovanligt hos barn i en viss ålder. Alla föräldrar känner igen frågor som: ”Varför då?”, ”Hur fungerar den?” och ”Vad är det?” (*ibid*, s. 277). Skillnaden mellan barn som visade normal utveckling och denna grupp av barn låg i hur deras föräldrar agerade. De svarade alltid på barnens frågor med stort engagemang och på ett mycket seriöst sätt. Detta ledde i sin tur till fler frågor och många intressanta diskussioner. Speciellt utmärkande var diskussionerna som fördes vid måltiderna. Oftast var det far och son/dotter som satt kvar efter måltiden och diskuterade, men initiativet till diskussionen kom alltid från barnet (*ibid*, s. 282).

Ett annat gemensamt drag som beskrevs hos barnen med särskild förmåga i matematik i Blooms studie var att de spenderade mycket tid ensamma med olika aktiviteter. De kunde sitta i timmar med byggklossar eller andra konstruktioner och var då djupt koncentrerade (*ibid*, s. 279). Att ägna mycket tid själva åt egna aktiviteter och på så sätt inte umgås socialt med andra barn är ett typiskt drag hos särbegåvade barn i alla åldrar och domäner, ett drag som också uppmärksammats i andra studier (jfr. Csikszentmihalyi m.fl., 1997; Terman, 1925; Winner, 1999).

Drygt hälften av matematikerna i Blooms studie beskrev sig som generellt begåvade under grundskolan, tre menade att de visade sina förmågor och beskrevs som begåvade inom de områden som intresserade dem och fyra beskrev sig som normalbegåvade (Bloom, 1985, s. 291). De flesta upplevde inte att deras talang eller begåvning uppmärksammades under grundskolan. De uttryckte även att de ”bästa” lärarna var de som försåg dem med böcker och material så att de kunde arbeta på egen hand (*ibid*, s. 293). De flesta av matematikerna visste redan tidigt under grundskolan att de skulle läsa vidare på högskola eller universitet. Av studiens 20 matematiker studerade 19 vid en allmän skola. Deras föräldrar ville att de skulle ha en så normal uppväxt och skoltid som möjligt. Under gymnasiet valde sju av matematikerna specialutformade program där de kunde läsa i snabbare takt. Ytterligare nio valde att läsa minst en termin extra matematik (*ibid*, s. 303). Flertalet av matematikerna var under denna period medlemmar i skollaget i matematik och deltog i matematiktävlingar och talangjakter. Flera deltog även i sommar- och helgaktiviteter i matematik och ansåg att innehållet i dessa aktiviteter skilde sig från den vanliga undervisningen i skolan i det att aktiviteterna var mer utmanade och intressanta för dem. ”They had the opportunity to explore topics with which they were fascinated and develop their own techniques for solving problems” (*ibid*, s. 309). Det var först under dessa aktiviteter som matematikerna upplevde att de fick uppmärksamhet, erkännande och beröm för sina insatser (jfr. Persson, 2007; 2010).

Gemensamma drag för föräldrarna till matematikerna i Blooms studie var att de själva var välutbildade och att de värderade utbildning och intellektuella prestationer mycket högt. De uttryckte samtidigt att de gett sina barn en normal uppfostran där de aldrig försökt tvinga på barnen intresset för matematik eller för den delen för något annat ämne (*ibid*, s. 272).

Bloom (1985) beskriver i sin studie hemmets roll som viktig för utvecklingen av begåvning och barnen fostrades alltid till att göra sitt bästa. Det fanns en förväntan att det skulle gå bra för dem i skolan, inte så att de blev straffade om de inte var bäst, men det var en självklarhet att de skulle arbeta hårt, vara noggranna och göra så gott de kunde (*ibid*, s. 274). Av Csikszentmihalyi m.fl. (1997) longitudinella studie av tonåringar med särskilda förmågor inom bl.a. matematik framgår att en optimal miljö för utveckling av talang skapas av familjens värme och stöd i kombination med stimulans och höga förväntningar i hemmet och i skolan.

Till skillnad från studier av matematiskt begåvade elever (mathematically gifted students) fokuserar en del av den internationella forskningen nu även matematiskt lovande elever (mathematically promising students) (se t.ex. Sheffield, 2003). En arbetsgrupp inom National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) lade i mitten av 1990-talent fram en rapport där de beskrev matematiskt lovande elever som “those who have the potential to become the leaders and problem solvers of the future” (Sheffield, Bennett, Beriozabal, DeArmond & Wertheimer, 1995). Att vara matematiskt lovande ska ses som en funktion av ”abitity, motivation, belief and experience or opportunity” (*ibid*). Arbetsgruppen menar vidare att identifiering av lovande elever i matematik inte enbart får genomföras med stöd av testresultat. Hänsyn behöver tas till flera olika aspekter. Bland annat nämns “self-selection, observations of students during the problem-solving process, teacher recommendation and parent recommendation” (*ibid*). Identifieringen ska snarare vara inkluderande än exkluderande, d.v.s. målet med projektet var att inkludera fler elever i forskningsstudier än den relativt smala grupp om 2-5 % av befolkningen som tidigare identifierats som matematiskt begåvade. Arbetsgruppens beskrivning syftar till att visa att matematisk begåvning inte finns given hos individer utan är något som utvecklas under aktivitet. Forskning har under senare tid visat att hjärnan växer och utvecklas när den får möjlighet att arbeta med utmanande problem som till exempel vissa typer av matematiska problem (Clark, 1997; Sheffield, 2009, s. 89; jfr. Sjöstrand, 1970, s. 213). Förutom en viss fallenhet för matematik krävs, som nämnts ovan, andra faktorer såsom motivation, självtillit samt en stimulerande omgivning för att matematisk begåvning ska utvecklas (Sheffield, 2003). Sheffield ger även en beskrivning av de karaktärsdrag som hon menar finns hos matematiskt lovande elever.

Mathematical frame of mind:

1. Loves exploring patterns and puzzles.
2. Sees mathematics and structure in a variety of situations.
3. Recognizes, creates, and extends patterns.
4. Organizes and categorizes information.
5. Has a deep understanding of simple mathematical concepts, including a strong number sense.

Mathematical formalization and generalization:

1. Generalizes the structure of a problem, often from only a few examples.
2. Uses proportional reasoning.
3. Thinks logically and symbolically with quantitative and spatial relations.
4. Develops proofs and other convincing arguments.

Mathematical creativity:

1. Processes information flexibly – switches from computation to visual to symbolic to graphic representations as appropriate in solving problems.
2. Reverses processes – can switch from direct to reverse train of thought.
3. Has original approaches to problem solving – solves problems in unique ways, tries unusual methods.
4. Strives for mathematical elegance and clarity in explaining reasoning.

Mathematical curiosity and perseverance:

1. Is curious about mathematical connections and relationships – asks "why" and "what if".
2. Has energy and persistence in solving difficult problems.
3. Digs beyond the surface of a problem, continues to explore after the initial problem has been solved. (*ibid*, s. 3-4)

Sheffield förtydligar att alla matematiskt lovande elever inte besitter alla dessa karaktärsdrag och kanske inte ens flertalet av dem. Andra karaktärsdrag omnämns av Sheffield, drag som inte nödvändigtvis finns hos matematiskt lovande elever: snabbhet och noggrannhet vid beräkningar, minne för formler och fakta samt spatial begåvning (*ibid*, s. 4).

Sheffields beskrivning av matematisk förmåga sammanfaller till stora delar med Krutetskiis (1976) struktur av matematisk förmåga vilken kommer att presenteras närmre i teoriavsnittet. Detta visar, vilket nämnts tidigare, att Krutetskii har satt sin prägel på forskning om matematisk förmåga och de flesta forskare som nu är aktiva inom området utgår på ett eller annat sätt från hans definition av matematisk förmåga.

Barger (1998) beskriver, precis som Sheffield, gemensamma egenskaper och kännetecken hos elever med särskilda förmågor i matematik. Hon gör detta i syfte att underlätta för föräldrar och lärare att identifiera och bemöta dessa barn. Enligt Barger ska barnet, för att anses ha särskilda förmågor i matematik, visa prov på ett flertal av följande egenskaper.

> Computes easily, creates his own methods for working complex computations, unable to explain how he arrived at the answer – just knows that it is correct. Often these students express surprise that everyone doesn´t know that fact, picks up mathematics "on his own", able to reason abstractly at an early age, looks for extensions or patterns, tries to "change the rules" and wants to know why he must follow certain rules, has a good sense of numbers and operations, recognizing errors in adult situations without being taught.
>
> They are the ones who pick up new concepts and topics almost immediately, have multiple ways of working problems, make connections between new material and previously learned material easily and quickly, always want to know "why", create unusual examples: for instance, if you ask for a number between 1 and 10, they might say 3.14. (*ibid*, s. 1-3)

Dessa beskrivningar av karaktärsdrag hos elever med fallenhet för matematik samt beskrivningar av deras uppväxtmiljö återvänder vi till då fallstudieeleverna i denna studie diskuteras.

Sammanfattning och slutsatser av diskussionen ovan för min studie

En stor del av den forskning som finns inom området begåvning i matematik (gifted education in mathematics) handlar om identifiering. För att identifiera elever med fallenhet för matematik krävs en definition av vad matematisk förmåga innebär och hur den kommer till uttryck då elever arbetar med matematiska aktiviteter. Jag har inte gått djupare in på detta i avsnittet ovan då definitionen ges av det teoretiska ramverk som jag använder mig av i denna studie och därför återkommer till senare. Karaktärsdragen hos elever med särskilda förmågor i matematik och beskrivningen av deras uppväxtmiljö och sociala situation återvänder jag till i diskussionerna av de fallstudieelever som ingår i studien.

Ett område som blivit allt vanligare i diskussionen om begåvade individer i matematik är matematisk kreativitet. Vilka möjligheter som finns att i skolan inspirera elever att arbeta kreativt i matematik och på så sätt utveckla matematiska förmågor och matematisk förståelse för begrepp, metoder och processer är omdiskuterat men viktigt för min studie, likaså hur vi med en undervisning av undersökande karaktär kan skapa en förändrad attityd till ämnet, något som påverkar alla elever och ger större möjligheter för elever med fallenhet att uttrycka sina förmågor.

Ämnet matematik

Vad innebär det att kunna matematik och vilken matematik är värd att kunna? Det är frågor som är centrala för matematikundervisningens mål och syfte och som väcker diskussioner om vilka förmågor, färdigheter och kompetenser elever ska utveckla och vilket ämnesinnehåll matematikundervisningen bör ha (se exempelvis Ernest, 2006; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Lerman, 2006; NCTM, 2000; Niss & Höjgaard-Jensen, 2002). Ernest diskuterar frågan om matematikens värde i termer av *relevans* och *nytta*. Han hävdar att det som är *relevant* matematik för den som lär måste relateras till personliga mål och intressen. Termen *nytta* står, enligt Ernest, för en snäv och begränsad användbarhet som kan påvisas omedelbart eller i det korta perspektivet, utan tanke på långsiktiga mål (Ernest, 2006).

Ramverk för matematikämnets innehåll

Tre ramverk som alla väljer att presentera matematiskt innehåll i form av matematisk kompetens, kompetensmål eller processmål för matematikundervisningen är *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), *Kompetencer og Matematiklæring* (Niss & Höjgaard-Jensen, 2002) samt *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick m.fl., 2001). Dessa ramverk har haft betydelse för den diskussion som förs världen över om matematikämnets innehåll och form, så även i Sverige. Ramverken och deras författare önskar att fokus förflyttas från ämnesinnehåll till kompetensinnehåll. Fokus ligger alltså på lärprocessen snarare än på produkten av lärandet, med tonvikt på förmågor snarare än på färdigheter, en förändring som vi återkommer till senare. De tre ramverken, som presenteras nedan, har likheter men olika terminologi används. Samtliga ramverk är avsedda att utgöra ett stöd för beslutsfattare och lärare vid utformning av kursplaner och vid planering av undervisningens genomförande.

Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) är ett innehållsrikt dokument framtaget av National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Ramverket anger övergripande mål från förskola till gymnasium och kan även ses som en *undervisningsvision* där hänsyn inte enbart tas till innehåll och form för undervisning utan även till omgivande faktorer såsom skolorganisation, lärares tid för samtal och reflektion m.m. (jfr. Mouwitz, 2001). Ramverket har haft, och kommer fortsättningsvis att ha, inflytande på kursutformning, undervisning och kompetensutveckling både i USA och världen över. Ramverket *Standards* består av tio delmål indelade i innehållsmål och processmål. Det matematiska innehållet är tal och operationer, algebra, geometri, mätning, dataanalys och sannolikhetslära. De matematiska processerna är problemlösning, resonemang, procedurhantering, kommunikation, representation av abstrakta begrepp och samband mellan matematiska objekt och idéer.

I rapporten *Kompetencer og Matematiklæring* (Niss & Höjgaard-Jensen, 2002) definieras matematisk kompetens som kompetensen att vara medveten om, förstå, utöva, använda och kunna ta ställning till matematik och matematisk verksamhet. Beskrivningen omfattar åtta delkompetenser som tillsammans utgör den totala matematiska kompetensen som tänks utvecklas från förskola till gymnasium. De åtta delkompetenserna, som alla är beroende av varandra, är indelade i två huvudgrupper: att kunna fråga och svara i, med och om matematik samt att kunna hantera matematikens språk och redskap. I den första gruppen ingår delkompetenserna tankegångskompetens, problembehandlingskompetens, modelleringskompetens och resonemangskompetens medan den andra gruppen innefattar delkompetenserna representationskompetens, symbol- och formaliseringskompetens, kommunikationskompetens och hjälpmedelskompetens.

Rapporten *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick m.fl., 2001) är en omfattande sammanställning av vad kunskap i matematik innebär och vilka kompetenser som bör prioriteras i matematikutbildning. Rapportens huvudsyfte är att bidra till förbättrade matematikkunskaper hos elever, med fokus på förskola och grundskola. Författarna framhåller betydelsen av att knyta samman elevers informella kunskaper och erfarenheter med matematiska abstraktioner. I rapporten presenteras fem inbördes relaterade komponenter vilka, enligt författarna, tillsammans ger en bred matematisk kompetens: begreppsförståelse, räknefärdighet, problemlösningsförmåga, förmåga att utföra matematiskt-logiska resonemang samt en positiv inställning till matematik.

I ramverken, som presenterats ovan, används, som nämnts, i vissa fall olika terminologi för beskrivningar av kompetenser eller processer men innehållet är i flera avseenden gemensamt. Problemlösningskompetens och resonemangskompetens uttrycks och beskrivs på liknande sätt i alla tre ramverken. I mina empiriska studier kommer jag att observera elever då de arbetar med matematisk problemlösning och där de uppmanas att "tänka högt" och därmed föra ett matematiskt resonemang vilket gör dessa två kompetenser särskilt intressanta.

Problemlösning innebär, enligt de refererade ramverken, att eleverna formulerar och löser matematiska problem utan att från början veta vilken metod som bör användas. Med problem avses då en matematisk fråga som kräver en matematisk undersökning för att besvaras. Här skiljer forskarna på *uppgift* och *problem*. En uppgift är ett problem om eleven inte har någon färdig metod att applicera för att lösa den. Uppgifter som inte är problem har karaktären av rutinuppgifter (jfr. Björkqvist, 2001; Boesen, 2006; Lithner, 2008). Relationen mellan den givna uppgiften och individens beredskap att arbeta med den, i form av tidigare kunskaper och färdigheter, är därför avgörande för om uppgiften kan benämnas som problem eller ej.

Att *resonera matematiskt* är kompetensen att utveckla matematiska argument samt att följa och utvärdera matematiska resonemang. Elever med denna kompetens kan motivera varför de använder ett visst räknesätt men även argumentera för och förklara varför ett svar eller en lösning av ett problem är matematiskt rimligt. I resonemangskompetens ingår även matematisk bevisföring.

Några kompetenser skiljer ramverken emellan och finns endast nämnda i ett av dessa. Ett sådant exempel är kompetensen *positiv inställning till matematik*. Forskarna menar att en positiv attityd till matematik, som en kompetens i sig, utvecklas i samspel med övriga kompetenser. En positiv inställning till ämnet gör det lättare att lära sig, vilket i sin tur leder till ökade förmågor och en positiv inställning och därmed förutsättningar att söka ny kunskap. Elever som är understimulerade och som därigenom har tröttnat på ämnet saknar ofta denna positiva inställning vilket medför att de inte längre har samma möjligheter att utvecklas.

Matematik som skolämne och som akademiskt ämne

Ibland görs en distinktion mellan matematik som skolämne och som vetenskapligt eller akademiskt ämne (Björklund Boistrup, Pettersson & Tambour, 2007; Lampert, 1990; Lerman, 2006; Lundin, 2008; Stadler, 2009). *Skolmatematik* förknippas, historiskt sett, ofta med en nyttoaspekt (Björklund Boistrup m.fl., 2007; Pettersson, 2010; Wistedt, Brattström & Jacobsson, 1992), elever ska lära sig sådan matematik som gör att de klarar sig i vardagen, s.k. vardagsmatematik. I vår nuvarande kursplan är detta fortfarande ett av huvudsyftena för ämnets roll i utbildningen: "Grundskolan har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer" (Skolverket, 2000). Skolmatematik avser oftast den matematik som ingår i det formella utbildningssystemet från förskola till och med gymnasium (Gustafsson & Mouwitz, 2002) och beskrivs då med hänvisning till traditionella undervisningsformer där läraren har en kort genomgång varpå eleverna ägnar sig åt enskilt arbete (Lampert, 1990; Skolverket, 2003a; Stadler, 2009). Det enskilda arbetet består främst av att eleverna löser liknande uppgifter som de läraren introducerat vid genomgången, ofta s.k. rutinuppgifter (Boesen, 2006; Brändström, 2005; Lithner, 2008). Uppgifterna löses med en viss metod och har ett korrekt svar. Arbetssättet kan beskrivas som reproducerande i det att eleverna memorerar matematiska recept snarare än utvecklar förmågor och arbetar kreativt (jfr. Krutetskii, 1976).

Matematik som vetenskapligt eller akademiskt ämne avser främst matematik på universitetsnivå eller som forskningsämne. Studier av akademisk matematik har sin början i exempelvis grundutbildningen i tekniska och naturvetenskapliga universitetsstudier eller i studier av akademisk matematik som enskilt ämne. Här betonas att studenten ska bli väl förtrogen med de matematiska begrepp och metoder som ingår i matematikkurserna samt i olika matematiska tillämpningar (Stadler, 2009). Matematik som akademiskt eller vetenskapligt ämne ”utmärks av ett symbolspråk, som är kompakt, koncist och mycket precist. Definitioner och påståenden måste vara glasklara” (Björklund Boistrup m.fl., 2007, s. 9).

Klassrumspraktiken som matematisk praktik med fokus på matematiska frågor

Vanligen associeras matematik i skolan med konsten att få fram ett korrekt svar på en given uppgift, helst snabbt. Skolmatematik handlar därför ofta om att följa regler framlagda av läraren. Att kunna matematik handlar om att komma ihåg och använda de korrekta reglerna när läraren ställer en fråga och den matematiska sanningen är bestämd då svaret är bekräftat av läraren. I många klassrum ses läraren och läroboken som auktoriteter och där finns litet utrymme för att skapa och utforska matematik (Lampert, 1990; Lester & Lambdin, 2006; jfr. Johansson, 2006; Skolverket, 2003a). I skolan är lärarens förklaringar och lärobokens facit sanningar. Där hörs sällan ord som ”kanske” eller ”kanhända”, då detta strider mot ämnets natur som stringent och exakt. Lampert (1990) menar att läraren genom att uppmuntra medvetna gissningar och hylla den mänskliga förmågan till mod och anspråkslöshet kan skapa en undervisningssituation ”där problemet inte utgörs av frågan och lösningen inte utgör svaret”. Lampert refererar till Lakatos analys av vad som menas med att kunna matematik och hans idé om hur ny kunskap utvecklas inom området. Lakatos menar att naiva gissningar, motexempel, krokiga vägar (”zig-zag ways”) av upptäckter och undersökningar, av premisser och antagande, inte kan urskiljas i den färdiga lösningen. Lakatos (1976) och Pólya (1954) menar att den som vill lära sig matematik bör ha förmåga att reflektera över sin egen kunskap, utvärdera tidigare antaganden, diskutera det grundläggande i deras legitimitet och vara beredd på att andra gör detsamma (jfr. Lampert, 1990). Läraren har naturligtvis en avgörande roll för hur undervisningssituationen kan präglas av ett mer vetenskapligt förhållningssätt. Läraren har möjlighet att välja problem och utforma undervisningen på ett sätt som gör att eleverna får möjlighet att förklara sina resonemang, bekräfta sina påståenden och diskutera och ifrågasätta sina egna och övriga elevers tankar.

Klassrumsforskning som fokuserar ämnesinnehållet är relativt sällsynt (Shulman, 1986). Watson (2007) har emellertid skapat ett analysredskap för att studera kvalitén av det matematiska innehållet i klassrumsundervisningen. Vid tidigare studier har hon använt befintliga ramverk, vilkas syfte är att identifiera resultat av lärande, kunskapsstrukturer, lärares syfte och handlingar i klassrummet. Watsons erfarenhet från dessa studier är att ramverken inte är tillräckliga för att analysera de detaljer som skiljer en matematiklektion från en annan (*ibid*, s. 118). Watsons analysredskap fokuserar, till skillnad från tidigare ramverk, matematikinnehållet och hur detta kommuniceras i klassrummet. Hon studerar vilka möjligheter eleverna erbjuds att agera matematiskt och vilka utmaningar och frågor som ställs till dem.

> The focus, the unit of analysis, is the teacher's utterances or other expressions (such as through what is written on the board, or handed out on worksheets) which might be instructions about what to do, or demonstrations of what is possible, or other kinds of teacherly subject-focused instruction. (*ibid*, s. 118)

Watson (2007) menar att syftet med att undervisa matematik bör vara att möjliggöra för eleverna att agera matematiskt. Hon menar vidare att lärare därför behöver gå från att förmedla fakta och därmed uppmuntra eleverna till att kopiera procedurer och memorera kunskap till att istället lyssna in och efterfråga elevernas svar. Läraren bör ge eleverna möjlighet att söka mönster, förklara sina tankegångar och utforska olika lösningsförslag och skapa ett interaktivt klimat där diskussioner och förklaringar av matematiska idéer ses som självklara. Ett liknande synsätt har Sheffield (2009) som anser att utveckling av matematisk kreativitet är det främsta målet för matematikundervisning och att elever bör gå från att memorera regler och metoder till ett problemlösande och kreativt handlande.

Studier av olika diskurser vid bedömning, i vidare mening, har även gjorts av Björklund Boistrup (2010). Hennes studie handlar om klassrumsbedömning, vilken hon menar ”påverkar elevers engagemang och lärande” (*ibid*, s. 204). Förutom tester, diagnoser och andra former av examination i klassrummet studerar hon klassrumskommunikation i det dagliga skolarbetet och hur bedömning sker där. Hon menar att klassrumsinteraktionen går att dela in i fyra olika bedömningsdiskurser, ”Gör det fort och gör det rätt”, ”Vad som helst duger”, ”Allt kan tas som utgångspunkt för en diskussion” och

”Resonemang tar tid” (*ibid*, s. 206). Varje diskurs innehåller olika former av interaktion mellan lärare och elev där interaktionen också kan tolkas som en bedömning av elevernas arbete och kunskap.

I *Gör det fort och gör det rätt* är frågorna som ställs av läraren oftast slutna och av karaktären att läraren redan vet svaret (jfr. Mason, 2000). Läraren ställer sällan följdfrågor och utmaningar för eleverna saknas. Fokus ligger på uppgiften och på att få fram ett rätt svar (jfr. Emanuelsson, 2001), möjligheterna för eleverna att utveckla matematiska förmågor är små. Även i diskursen *Vad som helst duger* sker återkopplingen främst från lärare till elev men här förekommer ibland öppna frågor även om dessa sällan utmanar eleverna. Läraren lämnar ofta elevers felaktiga lösningar och resonemang obesvarade och intar en mer passiv roll. Även i denna diskurs anses de möjligheter som eleverna erbjuds i form av matematiska resonemang och utvecklande av matematiska förmågor vara små. I diskurserna *Allt kan tas som utgångspunkt för en diskussion* och *Resonemang tar tid* sker interaktionen både i riktning lärare till elev och i riktning elev till lärare. Frågorna som ställs är oftast öppna och det finns ett intresse hos båda parter att kommunicera matematik. Även felaktiga svar tas om hand och används som utgångspunkter för diskussioner. Olika semiotiska resurser, som symboler, gester, prat och liknande, som i de två tidigare diskurserna varit osynliga, accepteras här och används för elevernas lärande och utveckling. I den senare diskursen, *Resonemang tar tid*, får elever ofta erkännande för sin visade kunskap och de utmanas till nytt lärande: ”Bedömningshandlingarnas fokus ligger ofta på processer, med störst betoning på processerna undersökande/problemlösning, resonerande/argumenterande, definierande/beskrivande och konstruerande/skapande”. I de båda sistnämnda diskurserna anses möjligheterna för elevers lärande av matematik vara stora. En slutsats av studien är att fokus bör läggas på processer snarare än på eleven själv eller uppgiften. Då finns möjligheter för elevers lärande och ”hantering av matematiska begrepp och metoder, tillämpande av matematiska begrepp och metoder samt kritiskt reflekterande av matematiska tillämpningar” (*ibid*, s. 205).

Även Mason (2000) fokuserar frågorna i klassrumspraktiken och menar att lärare genom att ställa vissa frågor till eleverna, liknande de frågor som matematiker ställer till sig själva, kan berika elevernas upplevelse av matematik. Han menar vidare att frågor från läraren bör ha en form som gör att eleverna får ett intresse och tar ansvar för att fortsätta att ställa frågor till sig själva och på detta sätt utveckla sitt lärande (*ibid*, s. 107; jfr. Björklund Boistrup, 2010). Enligt Mason (2000) finns tre olika anledningar för lärare att ställa frågor till elever. Frågor kan ställas i syfte att få elevernas uppmärksamhet, att testa elevernas kunnande eller för att få svar på en genuint undersökande fråga (*ibid*, s. 103). Mason menar att det är den tredje typen av frågor, genuint undersökande frågor, som är de viktigaste för att eleverna ska utveckla matematisk kunskap och få förståelse för vad matematik handlar om.

En genuin fråga beskriver Mason som en fråga där frågeställaren inte har något förutbestämt svar i åtanke och inte heller vet vad den svarande kommer att säga. Detta kan vara svårt för lärare som årligen återkommer till samma stoff och liknande uppgifter. Det går dock alltid att vara genuint intresserad och ställa följdfrågor om elevernas sätt att tänka och deras sätt att arbeta med ett problem eller en fråga, men om elever alltid omges av lärare som har alla rätta svar och förmedlar dessa, förlorar de sin nyfikenhet och undersökande attityd. De får istället uppfattningen att det finns en stor mängd fakta och kunskap som ska förmedlas av lärarna och som de ska lära in. Istället vill samhället, enligt Mason, att varje elev ska ”learn to enquire, to weigh up, to analyse, to conjecture and to draw and justify conclusions” (*ibid*, s. 107). Att ställa frågor där svaren eller lösningarna inte är självklara kan ses som en ordentlig utmaning som kräver mod och matematisk kunskap. Men förutom detta krävs också, enligt Mason, att läraren har kunskap om elevernas sätt att förstå det aktuella området. Läraren förflyttar därmed fokus från eleven själv och uppgiften till processen och det viktiga blir inte om svaret är rätt eller fel utan kvalitéerna i elevernas kunnande (jfr. Björklund Boistrup, 2010).

Ytterligare en studie som berör lärarens frågor är Emanuelssons (2001) studie ”En fråga om frågor” där författarens syfte är att beskriva ”variation i hur lärares frågor i klassrummet öppnar för deras möjligheter att se, förstå, uppfatta, erfara elevernas sätt att förstå inom matematik och naturvetenskap” (*ibid*, s. 7). I Emanuelssons studie läggs fokus på hur elevernas kunnande kommer till uttryck i det dagliga arbetet men författaren menar att även lärare har möjlighet till lärande i denna praktik. Han syftar då framförallt på lärares lärande om sina elevers kunnande. Han studerar lärares frågor och menar att dessa kan ha en mängd olika funktioner som att ge variation i vem som talar, att få eleverna att koncentrera sig eller att försöka ta reda på om eleverna kan eller inte kan något specifikt. Frågor som har som funktion att ta reda på eller söka efter hur elever förstår är, menar Emanuelsson, viktiga för lärares möjligheter att fatta beslut om hur undervisningen skall gå vidare och hur varje elev bör bemötas (*ibid*, s. 14). Emanuelsson diskuterar också vilka frågor som vidgar lärandet för både lärare och elever och menar att detta oftast sker via öppna frågor (*ibid*, s. 15; jfr. Björklund Boistrup, 2010; Mason, 2000). Emanuelssons studie visar att lärare i matematik genom sina frågor har större möjligheter att ”bedöma elevernas kunnande i termer av rätt respektive fel svar eller lösningsmetod” medan de har ”svårare att avgöra om eleverna förstår den matematik de hanterar” (*ibid*, s. 210). Detta stämmer väl överens med hur undervisningen i matematik är utformad, där elevernas enskilda arbete i läromedel dominerar och där lärarna fungerar som handledare. Frågor som ställs i en sådan praktik fokuserar snarare eleven själv eller uppgiften än processen (jfr. Björklund Boistrup, 2010).

Ett undersökande arbetssätt, likt det som Koshy, Ernest & Casey (2009) använde i sin studie och som Lampert (1990) förespråkar ser vi i de empiriska studier som ligger till grund för Cobbs och Yackels (1996) definition av så kallade *sociomatematiska normer*, d.v.s. normer som styr lärandet av exempelvis matematiska begrepp och metoder. De sociomatematiska normerna skapas, modifieras och etableras då elever och lärare arbetar med matematiska aktiviteter i klassrumsmiljö. I interaktionen som uppkommer vid matematiska aktiviteter, då elever förklarar sina lösningar, lyssnar till övriga elevers lösningar och då elever och lärare argumenterar utifrån dessa förklaringar, skapas klassrummets sociomatematiska normer. De sociomatematiska normerna kan exempelvis vara normer för vad som utgör en matematiskt acceptabel förklaring, en annorlunda lösning av ett problem eller en effektiv eller elegant lösning. Cobb & Yackels (1996) teori ligger till grund för analyser av mina empiriska studier där bland annat klassrumsobservationer och enskilda samtal mellan mig och eleverna ingår. Vi återkommer därför till deras studie nedan under rubriken *Sociala och sociomatematiska normer* i kapitlet *Teoretisk bakgrund*.

Sammanfattning och slutsatser av diskussionen ovan för min studie

I detta avsnitt har en huvudfråga varit vilken matematik som ska undervisas i skolan och på vilket sätt detta ska göras. Studier som refererats ovan föreslår en förändring av karaktären på innehållet i skolämnet matematik, en förändring som också syns i nya utbildnings- och kursplaner. Förändringen syftar till att skolämnet matematik bör närma sig det utforskande förhållningssätt som karaktäriserar matematisk verksamhet. Problemlösning ses som viktig, både som innehåll och form, och något som stimulerar till utveckling av matematisk kompetens. Att ställa frågor som ingång till matematiska diskussioner och som medel för att fördjupa en matematisk diskussion är, enligt många forskare, viktiga redskap inom det didaktiska fältet. Frågornas betydelse för elevernas möjligheter att uttrycka och utveckla matematiska förmågor är också något som studeras i denna studie, både i samband med observationer i klassrummet och i enskilda samtal mellan elever och lärare och mellan elever och mig.

Matematikundervisningens utformning

Hur undervisningen utformas och genomförs och hur den kan anpassas till elever med olika kunskaper och färdigheter i ämnet beror av många olika faktorer. Lärarnas ämneskompetens och didaktiska kompetens liksom organisatoriska förutsättningar är naturligtvis viktiga komponenter. De ekonomiska resurserna, vilken tid som finns till förfogande och gruppstorlekar är andra aspekter som påverkar undervisningens utförande och resultatet av denna. I detta avsnitt ges först en bakgrund till skolans organisation av undervisning i ett historiskt perspektiv. Vidare presenteras och diskuteras nuvarande och kommande läroplan och kursplan i matematik med fokus på elever med särskilda förmågor i matematik och deras behov av särskilt stöd. Därefter beskrivs lärarens roll och betydelse för undervisningens utformning och för elevernas möjligheter att utveckla sina matematiska förmågor. Avsnittet avslutas med en presentation av olika matematiska aktiviteter och hur dessa kan utformas för att stimulera elever med särskilda förmågor i matematik.

Skolans organisation av undervisning i ett svenskt historiskt perspektiv

I Sverige fanns, fram till i slutet av 1900-talet, ett differentierat utbildningssystem, först i form av ett parallellskolesystem bestående av folkskola och realskola och därefter inom en enhetsskola med möjlighet att välja mellan särskild och allmän kurs i vissa ämnen. Kampen för en gemensam bottenskola började redan under 1880-talet då röster höjdes för att knyta samman folkskola och läroverk (Sjöstrand, 1970, s. 121). Under första hälften av 1900-talet tillsattes kommissioner med uppdrag att lägga fram ett förslag om en enhetlig skolorganisation (Unenge, 1999). Idén om en gemensam enhetsskola hade sin bakgrund i sociala och politiska förhållanden och uppgiften var att skapa jämlikhet mellan samhällsklasser och kön (Sjöstrand, 1970).

> Både strävandena efter nationell samling och kravet på social fostran låg dessutom bakom tanken på att alla barn borde åtminstone en viss tid gå i en och samma skola samt därvid lära sig att respektera varandra. (*ibid*, s. 128)

Förslag framfördes om en sexårig, för alla gemensam, bottenskola. Förslaget möttes av starkt motstånd från olika håll och med olika argument. Somliga menade att alltför många skulle lockas till en teoretisk utbildning och samhället skulle inte kunna ge meningsfullt arbete till dem alla. Inom bonde- och arbetarklassen var man orolig för att de mest begåvade barnen skulle frestas att studera vidare och därmed inte bidra till hemmets försörjning (Richardsson, 1999; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a). Men det fanns även en rädsla för att en gemensam skola skulle leda till att de begåvade eleverna skulle möta för litet motstånd och på så sätt riskera att utveckla ”tröghet, lättja och skolleda” (Axelsson, 2007).

1946 års skolkommission med Tage Erlander, sedermera statsminister, som ordförande fick i uppdrag att utreda behovet av att reformera skolan och ännu en gång var målet en sammanhållen bottenskola, kallad enhetsskola. Kommissionen tog hjälp av forskare för att avgöra vid vilken ålder en differentiering av eleverna utifrån studieförmåga var lämpligast. Efter några års arbete lade kommissionen fram ett förslag om en obligatorisk 9-årig enhetsskola. En försöksverksamhet inleddes och resulterade drygt 10 år senare i den första grundskolan med åtföljande läroplan, Lgr 62 (Axelsson, 2007; Unenge, 1999; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a). Detta var en kompromiss och skolan var enligt denna läroplan sammanhållen under de första sex åren och därefter kunde eleverna välja olika alternativkurser.

Under förarbetet till nästkommande läroplan Lgr 69 fanns förslag om att slopa de nyss införda alternativkurserna i matematik, detta främst till följd av resultat från IMU-projektet (Individualiserad matematikundervisning) som pågick, och som vi återkommer till i avsnittet nedan. Även i förarbetet till Lgr 80 föreslog Skolöverstyrelsen att alternativkurserna i matematik skulle slopas (Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a). Regeringen ansåg att frågan borde utredas ytterligare och under 1980-talet tillsattes ännu en utredning, GEM-projektet (Grupperingsfrågor i Engelska och Matematik), även denna återkommer vi till i avsnittet nedan. Det är först i vår nuvarande läroplan Lpo 94 som alternativkurserna är borta och vi har en fullständigt sammanhållen bottenskola på nio år.

Differentieringsfrågan ur ett svenskt historiskt perspektiv

De undervisningsplaner och läroplaner som funnits i Sverige under 1900-talet har på skilda sätt beskrivit undervisningens anpassning till elevernas olika behov. Det fanns i 1920-talets undervisningsplan en neutral skrivelse om detta, men det gjordes ingen tolkning av hur man skulle uppfatta begreppet ”särskilda behov”. Lärare uppmanades att anpassa innehåll och svårighetsgrad efter barnens förmåga, dock utan att specificera om det rörde sig om särskilt högpresterande eller särskilt lågpresterande elever.

I läroplanen från 1962 diskuteras hur undervisningen bör anpassas till elever med särskilda behov men då riktad enbart till elever med skolsvårigheter. Diskussioner om och benämningar av begåvade elever eller elever med särskilda förmågor var under efterkrigstiden sparsamma. Förändringen i diskussionerna om och benämningarna av begåvade elever som skedde i mitten av 1900-talet kan enligt Edfeldt (1992) ha sin grund i den ideologi som rådde i Sverige. En stark förgrundsgestalt för den svenska skolpolitiken var Alva Myrdahl och hennes budskap om ett allmänbildningsideal på bekostnad av specialistutbildning och specialkunskaper (*ibid*). Hennes starka position i frågan kan ha sin förklaring i erfarenheter från 40-talets nazistvälde i Europa och att ledande politiker ansåg att skolans viktigaste uppgift var att fostra människor så att de inte, kanske till en följd av en stark specialisering, blev blinda för vad som hände ute i samhället (Erlander, 1973, s. 237; Persson, 1997; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a). Vid ungefär samma tidpunkt genomförde Härnqvist (1958) en uppmärksammad studie där han visade att det i Sverige fanns en *begåvningsreserv* motsvarande ca 20 % av en årskull. Härnqvists studie bygger på en undersökning av manliga elever som, enligt ett mönstringstest, hade potential att klara studentexamen men som inte, av olika anledningar, realiserat denna möjlighet. De flesta av dessa män kom från familjer med låg inkomst (Husén och Härnqvist, 2000).

Som en följd av läroplanen 1962 och dess införande av alternativkurser startade IMU-projektet (Individualiserad matematikundervisning) (Larsson, 1973). Bakgrunden var lärarnas svårigheter att lösa individualiseringsfrågan. I vissa skolor var lärare, till följd av bristen på högstadielärare, tvungna att undervisa de olika alternativkurserna i samma klassrum. Detta visade sig problematiskt med den tidens metoder och läromedel och man valde att till de duktigaste eleverna utveckla en speciell korrespondenskurs, vilken ansågs ge goda resultat. IMU-projektet hade två huvudsyften: dels skulle ett individualiserat läromedel produceras, dels skulle effekterna av läromedlet utvärderas. Materialet blev snart mönsterbildande för andra, mer eller mindre självinstruerande undervisningsmaterial i matematik. Eleverna arbetade var och en för sig, i sin egen takt, starkt styrda av undervisningsmaterialet. Resultatet blev att de sysslade med helt olika innehåll och läraren fungerade som handledare, med några minuters undervisning per elev och lektion (Löwing, 2004; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a).

Ytterligare ett större individualiseringsprojekt, GEM (Grupperingsfrågor i Engelska och Matematik), genomfördes i samband med utredningen om alternativkursernas existens. Detta projekt hade som syfte att belysa i vad mån undervisningen inom olika slags grupperingar kunde sägas innebära olika inlärningsvillkor för olika elever (Hellström, 1987). Projektet resulterade i slutsatsen att skillnaden i inlärningsresultat främst var av kvantitativ karaktär. Undervisningen i långsam grupp skiljde sig från den i snabb grupp främst genom att stoffmängden begränsades för elever i långsam grupp. Det gick inte att se någon förändring av kunskapsutvecklingen vare sig för duktiga eller svaga elever enbart med hänvisning till sättet att organisera undervisningen. Detta är också ett resultat som kommit fram i andra studier. Redan innan GEM-projektet avrapporterades skrev Wiggo Kilborn i en artikel ”Att individualisera är inte att organisera” (Kilborn, 1981) följande rader:

> Organisation och grupperingar är varken nödvändiga eller tillräckliga villkor för att förändra elevernas kunskaper eller tankeformer. (*ibid*, s. 23).

Det är viktigt att påpeka att ovanstående resonemang gäller grupperingar där differentieringen enbart är organisatorisk. Det är alltså inte en nivågruppering som gör att olika grupper av elever möter en undervisning med olika syfte, innehåll, arbetssätt. I sådan nivågruppering kan undervisningen ha gynnsam effekt för utveckling av matematisk förmåga. Vi återkommer till detta i avsnittet *Differentiering och individualisering* nedan.

Differentieringsfrågan i vår nuvarande läroplan

1994 antogs en ny läroplan, Lpo 94 (Skolverket, 2006), som gäller för alla elever i grundskolan. Där anges *Mål att uppnå* och *Mål att sträva mot*, men även särskilda mål för sameskolan, specialskolan och särskolan. I fråga om beskrivningar av stöd till elever med särskilda behov har pendeln svängt och vi närmar oss den formulering som fanns i 1920-talets undervisningsplan, en neutral skrivning som gav lärare möjligheter att fritt tolka uttrycket ”elever i behov av stöd”.

Precis som då finns det numera inte uttalat att elever i behov av särskilt stöd enbart är elever med svårigheter utan lärarna ges tolkningsutrymme och möjlighet att bejaka även de elever som är i behov av särskilt stöd för sina särskilda förmågor.

- Undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. (*ibid*. s. 4)
- Alla som arbetar i skolan skall uppmärksamma och hjälpa elever i behov av särskilt stöd. (*ibid*. s. 12)
- Läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga. (*ibid*. s. 12)

Inför hösten 2011 kommer en ny läroplan, Lgr11 med tillhörande kursplaner för varje enskilt ämne, att träda i kraft. I förslaget finner vi ovanstående citat oförändrade (Skolverket, 2011).

En formulering som delvis är ny och som numera innehåller ordet kreativitet är följande:

> Skolan ska stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende samt vilja till att pröva egna idéer och lösa problem. (Skolverket, 2011, s. 6)

Citatet kan jämföras med Sheffields (2009) tankar, vilka presenterats ovan, om matematisk kreativitet som det främsta målet för matematikundervisning. Hon menar vidare att det inte längre är tillräckligt att lära eleverna att memorera kunskap utan att lärare måste locka fram elevernas kreativitet, intresse och nyfikenhet, ett budskap som gäller generellt i citatet ovan.

I gällande kursplan för matematik i grundskolan (Skolverket, 2000), under rubriken *Ämnets karaktär och uppbyggnad*, diskuteras problemlösningens centrala plats i matematikämnet. I följande citat nämns elever som har särskilda behov på grund av sina särskilda förmågor.

> För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Detta gäller alla elever, såväl de som är i behov av särskilt stöd som elever i behov av särskilda utmaningar. (*ibid*, 2000, s. 2)

Ovanstående formulering finns inte kvar i förslaget till kursplan i matematik för grundskolan 2011 (Skolverket, 2011). Varken i läroplanen Lgr11 eller i kursplanen i matematik finns någon formulering som syftar på bemötande av elever med särskild fallenhet, särskild begåvning eller elever i behov av särskilda utmaningar. Det är dock möjligt för skolledning och lärare att tolka formuleringarna ”hjälpa elever i behov av särskilt stöd” och ”utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga” på ett sätt som medger positivt bemötande av dessa elever.

Förmågor kan stimuleras inom klassens ram, i individualiserad form men också i form av differentierade kurs- och utbildningsplaner, något som ännu inte finns i Sverige. I många andra länder som Australien, Korea, Storbritannien, Tyskland, USA m.fl. finns emellertid, som nämnts ovan, särskilda läroplaner, handlingsplaner eller beskrivningar av undervisning för begåvade elever (för en översikt se Heller, Mönks, Sternberg & Subotnik, 2000). I dessa länder anges att en och samma läroplan omöjligen kan tillgodose den variation i anlag, talang, möjligheter och intresse som begåvning utgörs av. I USA har det funnits särskilda utbildningar för begåvade elever sedan början av 1900-talet. Där finns även speciella program för begåvade eller högpresterande förskolebarn i åldrarna 3 - 5 år (McHardy, 2008). Ett annat exempel är skolsystemet i Wales som tagit frågan om elever som är i behov av särskilt stöd för sina särskilda förmågor på största allvar. De bedömer att 20 % av eleverna är i behov av stöd på grund av sina särskilda förmågor och menar att skolsystemet behöver anpassas till deras utbildningsbehov på ett adekvat sätt (se NACE, 2010). Satsningen har statligt stöd. Ytterligare exempel på aktiviteter som görs för att stödja och stimulera elever med fallenhet för matematik är Hamburgmodellen (Engström, 2005a; Nolte, 2004). Det är Hamburgs Universitet i samarbete med William Stern-sällskapet som driver arbetet med att stimulera matematikbegåvade elever mellan 9 och 19 år. Eleverna träffas i universitets lokaler ett par gånger i månaden, oftast lördagar, för att, gemensamt i grupper, arbeta med olika problemställningar som erbjuder intressanta och spännande utmaningar.

Trots att vi i vår nuvarande läroplan Lpo94 och i vår kommande läroplan Lgr11 inte har någon särskild skrivning om hur vi stödjer och stimulerar elever med särskilda förmågor finns det idag olika former av verksamheter och aktiviteter riktade till denna grupp elever. Det tydligaste exemplet är den försöksverksamhet med spetsutbildningar (Skolverket, 2009b) på gymnasienivå som startade 2009 vid tio skolor i landet. I försöksverksamheten finns olika ämnesområden representerade och eleverna har möjlighet att läsa universitetskurser under sin gymnasieutbildning. En utvärdering har gjorts av det första årets verksamhet (Skolverket, 2010). Där framgår att både spetselever och lärare vid de aktuella skolorna är nöjda med utbildningen. Eleverna är ”entusiastiska inför de utmaningar spetsutbildningarna innebär” och lärarna är ”mycket engagerade i såväl utbildningen som eleverna”. Utvärderingen ger också exempel på utvecklingsmål för verksamheten där problem med att få elever från annan ort att flytta för att gå spetsutbildningen nämns tillsammans med att gruppen spetselever till största delen är elever med svensk bakgrund som kommer från socioekonomiskt starka miljöer. En viktig aspekt som kommer fram i utvärderingen och där Skolverket bedömer att ett övervägande bör göras är spetselevernas möjligheter att få meritpoäng för de spetsutbildningskurser de läser.

Behov av varierad undervisning

I läroplanen, Lpo 94 (Skolverket, 2006) och i Lgr11 (Skolverket, 2011) finns följande text angående skolans ansvar för att främja elevernas utveckling:

> Skolan ska främja elevernas harmoniska utveckling. Detta ska åstadkommas genom en varierad och balanserad sammansättning av innehåll och arbetsformer. (Skolverket, 2006, s. 6; Skolverket, 2011, s. 7)

Trots denna beskrivning och de beskrivningar i läroplaner och kursplaner i matematik som togs upp i förra avsnittet är det främst **en** undervisningsmodell som dominerar svensk matematikundervisning. Modellen redovisas bland annat i Skolverkets rapport *Lusten att lära – med fokus på matematik* (Skolverket, 2003a) på följande sätt:

> Modellen utgörs av genomgång ibland, enskilt arbete i boken och diagnos, alternativt prov. Läraren går runt och hjälper eleverna individuellt. Planerat elevsamarbete är relativt ovanligt, gemensamma samtal mellan lärare och elever kring matematiska problem och tänkbara lösningsstrategier eller laborationer i matematik likaså. Det är en undervisningsform som innehåller få inslag av variation vad gäller såväl innehåll som arbetssätt. (*ibid*, s. 20)

Eleverna har i denna undervisningsmodell få möjligheter till gemensamma diskussioner. Lärarnas roll är handledande snarare än undervisande. Elevernas tid för samtal med läraren blir högst ett par minuter per lektion (Sjöberg, 2006). Den största delen av tiden som ägnas åt matematik i skolan består av lösning av rutinuppgifter på egen hand samt repetition av redan genomgångna områden (Boesen, 2006; Brändström, 2003; Lithner, 2003; 2004; Skolverket, 2003a). Denna betoning av rutinmässiga uppgifter sker på bekostnad av processer där eleverna upptäcker eller skapar matematik. Undervisningsmodellen ovan är inte unik för Sverige. Den förekommer även internationellt (Hiebert m. fl., 2003) men enligt TIMSS är den mer dominerande i Sverige än i jämförbara länder (Skolverket, 2004a, s. 88; 2008a, s. 65). I TIMSS video study (TIMSS, 2010) filmades och analyserades ett antal länders lektionsundervisning. En jämförelse mellan USA:s och Japans lektionsundervisning visar att de amerikanska eleverna, precis som de svenska, ägnade merparten av tiden åt arbete med rutinuppgifter medan de japanska eleverna arbetade med utmanande problem, vilka inte hade en på förhand given lösningsmetod, samt åt diskussioner om begrepp och resonemang (Stigler & Hiebert, 1999).

Läromedelsberoende undervisning dominerar också i stor utsträckning matematikundervisningen i Sverige (Bentley, 2003; Bjerneby-Häll, 2006; Johansson, 2006; Skolverket, 2003a). Enligt rapporten *Lusten att lära – med fokus på matematik* stimulerar denna undervisningsform få elever och det är framförallt de elever som har lätt för matematik som i denna form saknar tillräckliga utmaningar och upplever mycket av innehållet som ren repetition (Skolverket, 2003a). Med denna typ av undervisning blir det viktigaste målet för eleverna att hinna långt, inte att förstå och utveckla begrepp och resonemang som vår senaste läroplan, Lpo 94, och kursplan i matematik föreskriver (Skolverket, 2000; 2003a; 2006).

Elever som har särskilda förmågor i matematik får med denna typ av undervisning för lite stimulans och för få utmaningar vilket vi kommer att se prov på i den aktuella studien. Engström (2006) menar, vilket nämnts ovan, att detta senare kan leda till att eleverna misslyckas i skolan då kraven ökar och de aldrig tidigare behövt anstränga sig eller lära sig en fungerande studieteknik. Detta visar, skriver Engström, att det inte bara räcker att upptäcka de särbegåvade eleverna, man måste redan tidigt hitta en undervisningsmodell som utmanar och utvecklar deras förmågor (*ibid*).

Differentiering och individualisering

Trots ovanstående beskrivning av den begränsade variationen i skolans arbetssätt är det just arbetssätt och arbetsform, då främst individualiseringsproblematiken, som har varit föremål för samhällelig debatt och forskning i matematikdidaktik i Sverige under de senaste decennierna. Möjligen har detta skett på bekostnad av diskussioner om undervisningens syfte och innehåll (Löwing, 2004).

Begreppet *individualisering* och det närbesläktade begreppet *differentiering* har inga entydiga definitioner. De beskrivs på olika sätt i olika texter och begreppen blandas ofta samman (Hedlund, 1995; Vinterek, 2006; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a). En definition ges i Kilborn & Löwing (2002) där begreppet *differentiering* beskriver organisatoriska åtgärder som vidtas för att möjliggöra individualisering, medan *individualisering* handlar om anpassning av innehållet till elevens förkunskaper och förmåga att lära (Kilborn & Löwing, 2002).

Differentieringen kan ske inom klassens ram, genom till exempel individuell undervisning eller genom skapande av homogena grupper, så kallad nivågruppering. För en översikt av internationell forskning om differentiering för elever med begåvning i olika domäner, se Brody (2004), Tomlinson, (2004), Van Tassel-Baska (2004). En organisatorisk differentiering i form av nivågruppering, att man delar in eleverna i grupper med utgångspunkt från deras förmåga och erfarenhet, är något som visat sig ha gynnsam effekt för begåvade elever (Brody, 2004; Kulik & Kulik, 1992; Kulik, 2003), under förutsättning att de då får arbeta inom områden som de annars inte skulle kommit i kontakt med. Vid en sådan differentiering är det snarare skillnader i undervisningens syfte, innehåll och vad som händer i gruppen och inte grupperingen i sig som avgör om eleverna når bättre resultat (Brody, 2004; Koshy, 2001). Detta visar även en svensk undersökning av nivågruppering (Skolverket, 2007), där 90 % av eleverna som undervisats i nivågrupper upplevde detta som positivt och menade att de lär sig bäst tillsammans med elever som är på ungefär samma kunskapsnivå. Enligt en attitydundersökning deltar 30 % av eleverna i grundskolans senare år i nivåindelade grupper i matematik (*ibid*, s. 61). Studien visar också att det är främst inom matematik och engelska som nivågruppering förekommer under senare delen av grundskolan. Även lärarna är positiva till nivågruppering och tror att elevers olika behov tillfredsställs bättre med nivåindelning. Men, precis som i de internationella studierna ovan, är det främst lärarnas möjligheter att förändra undervisningen, så att den bättre motsvarar elevernas förkunskaper och behov, som gör att eleverna i dessa grupper har möjlighet att utvecklas och prestera bättre resultat (*ibid*, s. 62).

Den idag dominerande undervisningsformen som vi brukar beteckna som ”individuell”, är om vi ser närmare på klassrumsundervisningen inte individuell i den bemärkelsen att undervisningen anpassas till varje elevs behov vad gäller innehåll, läromedel, uppgifternas art och arbetsform. Det är istället en hastighetsindividualisering som används för att individanpassa en undervisning där alla elever arbetar med samma läromedel var och en i sin takt. Under en period kan eleverna då arbeta med helt olika avsnitt eller områden inom matematiken. Detta gör att möjligheterna till gemensamma diskussioner och genomgångar begränsas (Bentley, 2003; Löwing, 2004; Madsén, 2002; Skolverket, 2003a) .

Begreppet *individualisering* är, som tidigare nämnts, inte entydigt och kan tillämpas och genomföras på olika sätt. Förutom den hastighetsindividualisering som beskrivits ovan kan individualisering också innebära att alla elever arbetar med samma uppgifter men på olika nivåer eller genom att uppgifter behandlas på olika sätt (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005). Undervisningens innehåll kan differentieras så att vissa moment utesluts för vissa elever (Bentley, 2000) medan andra elever arbetar med fördjupningsuppgifter. Sammanfattningsvis kan sägas att det väsentliga med differentiering och individualisering i matematik är att alla elever får möta uppgifter och problem som utmanar och stimulerar dem i förhållande till deras förutsättningar och deras potential. Då finns möjligheter för eleverna att arbeta aktivt med matematiska aktiviteter under lektionerna vilket är en förutsättning för utveckling av matematiska förmågor (Krutetskii, 1976; jfr. Häggblom, 2009, s. 18-19).

Lärarens roll

Hur vårt skolsystem är organiserat och hur stat och kommun väljer att satsa sina resurser har stor betydelse för vilka förutsättningar lärarna har att möta eleverna. Frånsett detta anses lärarens roll och lärarkompetensen vara de viktigaste faktorerna för elevernas utveckling i matematik (Bloom, 1985; Gustafsson & Myrberg, 2002: Löwing, 2004; Skolverket, 2003a; 2007; Wahlström, 1995, Ulin, 2007; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001b). Men vad menar vi egentligen med lärarkompetens och vilka faktorer är det som ligger till grund för bedömningen av vad som utgör sådan kompetens? Det som kännetecknar effektiva lärares undervisning beskrivs av Gustafsson & Myrberg (2002) på följande sätt:

> De anpassar sin undervisning så att den passar olika elevers behov; har tillgång till en bred repertoar av undervisningsmetoder; har ett vitt spektrum av interaktionsstilar och strategier som kan tillämpas för olika elevgrupper; presenterar informationen klart och entusiastiskt; skapar motivation genom att appellera till elevernas nyfikenhet och intresse, och genom att visa på uppgiftens relevans; strukturerar materialet; samt ställer mer komplexa frågor, och fångar upp och vidareutvecklar elevernas idéer. (*ibid*, s. 170)

Detta kan ses som en idealbild av en lärares agerande i klassrummet och ett möjligt svar på frågan om hur lärare skall undervisa. För att lärare ska ha möjlighet att fånga upp och vidareutveckla elevers idéer och frågor krävs det även goda ämneskunskaper hos lärare. Studier visar att matematiklärare med goda ämneskunskaper är speciellt lämpade att undervisa elever med goda studieförutsättningar (Clotfelter, Ladd & Vigdor, 2006; Grönqvist & Vlachos, 2008).

Även i två av de tidigare nämnda ramverken, *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) och *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick m.fl., 2001) diskuteras lärarens roll och vad som kännetecknar en lärare som undervisar på ett effektivt sätt. I dokumenten betonas vikten av djupa och relevanta matematikkunskaper, liksom breda pedagogiska kunskaper men även kunskaper om eleverna samt praktisk förmåga att genomföra undervisningen och hantera olika situationer (jfr. Shulman, 1987). Till den praktiska förmågan att genomföra undervisningen hör kriterier som att uppmuntra samarbete och diskussion, att låta elever förklara sina tankar och uppmuntra dem att experimentera med olika angreppssätt vid problemlösning, alla de delar som finns representerade i ett undersökande arbetssätt (NCTM, 2000; jfr. Kruse, 1910/2010, s. 33). När lärare använder ett sådant undersökande arbetssätt i matematik ställs ännu högre krav på ämneskompetensen hos läraren om detta arbetssätt ska leda till ökad förståelse och förtrogenhet för eleverna (Mouwitz, 2001, s. 45). Enbart ämneskompetens är dock inte tillräckligt, vilket påpekats ovan. Det finns en rad andra faktorer som kan vara avgörande för att en lärare ska upplevas som effektiv och framgångsrik med sina elever. En medvetenhet hos läraren om vilket syfte matematikundervisningen har och vilket innehåll och arbetssätt som lämpar sig för detta syfte är avgörande faktorer. Om syftet är att eleverna ska kunna räkna upp till 10 används ett visst innehåll och arbetssätt men om syftet är att eleverna ska ha antalsuppfattning upp till 10 krävs troligen annat innehåll och arbetssätt (jfr. Kruse, 1910/2010). Ämneskompetens tillsammans med en medvetenhet hos läraren om de matematiska förmågor som ska utvecklas hos eleverna är viktiga utgångspunkter då läraren skall planera och genomföra undervisningen (Hiebert, 2002).

En studie som blivit uppmärksammad och refererad internationellt och även i svenska rapporter och utvärderingar under det senaste året är ”Visible Learning” av Hattie (2009). Undersökningen är en metastudie som omfattar 800 enskilda metastudier utförda av andra forskare där totalt ca 80 miljoner elever deltagit. Metastudiens syfte och Hatties ambition är att presentera en sammanhållen och tydlig förklaring till vad som påverkar elevers studieresultat. Han fokuserar faktorer inom skolan och framförallt i klassrummet, vilka han menar har betydligt större effekt på elevers resultat än yttre faktorer som exempelvis skolans storlek, antal elever i varje klass samt vilka möjligheter som finns att välja skola. Han är tydlig i sitt budskap om att lärarens roll/läraren är avgörande för elevers studieresultat. Det handlar enligt Hattie inte bara om lärarnas ämneskompetens utan också om deras förmåga att använda denna ämneskompetens i undervisningen. Han menar vidare att undervisningen inte bara handlar om att lära ut, utan även om att förstå och skapa kunskap om elevernas förutsättningar och deras lärande (jfr. Emanuelsson, 2001). Enligt Hattie bör vi också tala mer öppet om lärares undervisningsförmåga, något som idag anses tillhöra varje lärares privata sfär (Hattie, 2009, s. 238).

Lärares förväntningar på elever tas upp på olika sätt i flera artiklar och rapporter i Sverige (Grosin, 2004; Hattie, 2009; Jenner, 2004; Robertsson, 2009; Skolverket, 2009a; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001b) och jämförs ibland med pygmalioneffekten som presenterades och diskuterades i Rosenthals & Jacobsons (1968) bok *Pygmalion in the classroom* och som fick inflytande på den pedagogiska debatten. Även höga förväntningar på lärare, vid exempelvis kompetensutveckling, är en viktig faktor som slutligen kommer eleverna till del (NCTM, 2000; Mouwitz, 2001, s. 68).

Sheffield (2009) tar upp ett antal frågor som lärare bör ställa sig själva inför undervisning i matematik, där de två första lyder:

> Do I expect all students to solve problems in unique and creative ways or do I ask them to memorize the methods that I use?
>
> Am I comfortable in encouraging students to ask mathematical questions for which I may not have an immediate answer? (*ibid*, s. 93)

Dessa frågor ska hjälpa lärare att stödja elever i deras utveckling av matematisk kreativitet. Hon menar vidare att frågor som börjar med exempelvis ”who, what or what if, why or why not” är användbara för både lärare och elever då de vill öppna en ny diskussion om ett matematiskt problem eller vill fördjupa en redan påbörjad matematisk diskussion (*ibid*, s. 94).

Särskild utbildning för lärare som ska bemöta begåvade elever och effekterna av sådan utbildning diskuteras bl.a. i Baldwin (1993) och i Hansen & Feldhusen (1994). I Hansen & Feldhusens studie fanns både utbildade och outbildade lärare inom ”gifted education”. Forskarna visade att de utbildade lärarna inte bara bemötte begåvade elever på ett mer professionellt sätt utan även ”placed greater emphasis on creativity and encouragement of creative thinking” och ”asked more open-ended questions and encouraged more risk taking than did untrained teachers in the study” (*ibid*, s. 119). I USA har nyligen the National Council for Accreditation for Teacher Education, (NCATE), godkänt en ny uppsättning kriterier för lärare inom fältet ”gifted education” (VanTassel-Baska, 2007). Särskild utbildning för lärare som undervisar begåvade elever är inget som hittills har diskuterats i Sverige och inom landets lärarutbildningar finns, med undantag av en fristående matematikdidaktisk kurs vid Linnéuniversitetet (2011), i stort sett ingen undervisning eller diskussion om begåvade elever eller elever med särskilda förmågor inom någon domän.

Wistedt & Sundström (2011) menar att utbildning för lärare om och hur de kan bemöta elever med talang för matematik, är ett av de mål som bör finnas som ett svenskt utvecklingsmål för en förbättrad matematikundervisning. Författarna tar i artikeln upp matematikundervisningen ur ett svenskt perspektiv och den spänning som finns mellan ”egalitarianism, which aims at promoting a certain kind of fairness, and excellence, which aims at bringing out the natural talents of all student” (*ibid*, s. 343). Vår svenska demokratiska tradition har gjort att denna spänning, där varje form av uppmärksammande av de begåvade eleverna ses som en form av elitism, fortfarande finns kvar och orsakar problem inom utbildningsväsendet, detta trots att det naturliga vore att låta alla elever få möjlighet att utveckla sitt intresse och sin egen potential. Utöver utvecklingsmålet ovan, gällande lärarnas möjlighet till utbildning i att stödja elever med talang, finns ytterligare mål som gäller undervisningsmaterial, fritidsaktiviteter eller andra möjligheter till stimulans för talangfulla elever, en kultur som stödjer matematik och matematikdiskussioner vilket även inkluderar ekonomiskt stöd. Forskarna ser dessa mål som realistiska att nå och menar att de sträcker sig över alla samhällsklasser och kulturer (*ibid*, s. 345).

Matematiska aktiviteter

Matematiska aktiviteter är omfattande och inkluderar i stort sett allt som kan och bör ske i samband med matematikundervisning i skolan. Matematiska aktiviteter kan ha olika innehåll, form och syfte, vilket vi återkommer till i kapitlet nedan, och väl genomtänkta aktiviteter är förutsättningar för att elever ska ha möjlighet att utveckla matematiska förmågor (Krutetskii, 1976). I detta avsnitt kommer jag att fokusera problemlösning som matematisk aktivitet då flertalet av de matematiska aktiviteter som förekommer i mina empiriska studier är av problemlösande och undersökande karaktär. Krutetskiis struktur av matematiska förmågor, vilket är det ramverk som används vid analyserna av det empiriska materialet i denna studie, utgår från observationer av elever som löser matematiska problem av olika karaktär. Vi har ovan sett att problemlösning är ett område som ofta används för att stimulera elever med särskilda förmågor i matematik. Hur problemen är utformade och hur arbetet med problemlösning genomförs är viktiga aspekter för att eleverna ska få möjlighet att utveckla matematiska förmågor. Problemlösning som forskningsområde är, även detta, omfattande och min ambition är inte att gå djupare in i detta fält. Syftet är istället att ge en kort beskrivning av problemlösning som matematisk aktivitet i skolan samt exempel på hur forskare beskriver problem som är matematiskt rika.

Matematisk problemlösning i undervisningen

Under de senaste decennierna har intresse och forskning ökat när det gäller att sätta problemlösning i fokus inom skolmatematiken (Lester & Lambdin, 2006). Detta ser vi framförallt i de ovan beskrivna ramverken (Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000: Niss & Höjgaard-Jensen, 2002) där exempelvis NCTM:s dokument föreslår att problemlösning ska ”fungera som ett medel för elever att lära sig matematiska idéer och färdigheter” (Lester & Lambdin, 2006, s. 95; jfr. NCTM, 2000, s. 182). Lester & Lambdin (2006) menar att detta är en god utveckling eftersom problemlösning tidigare varit en aktivitet som kommit efter det att eleverna studerat begrepp och övat sina färdigheter. Författarna påpekar också att det är viktigt att ge tydlig vägledning till lärarna om hur denna förändring ska genomföras.

Även i Sverige ser vi förändringar när det gäller problemlösningens utrymme i skolmatematiken. I den nya läroplanen, Lgr11 med tillhörande kursplan i matematik, finns problemlösning med både i syftet med ämnet, beskrivet i termer av förmågor som eleverna ska ha möjlighet att utveckla, samt som ett centralt område i ämnesinnehållet för alla grundskolans nivåer (Skolverket, 2011). Det påpekas även att elever ska utveckla förmåga att både formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat (*ibid*, s. 31).

Kanske går utvecklingen mot ett positivt svar på Björkqvists (2001) fråga ”Är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna?” (*ibid*, s. 116). Liknande resonemang för Bergsten (2006) då han i en didaktisk modell för en matematisk praktik har problemlösning som en central komponent (*ibid*, s. 174). Han menar att ”matematiskt arbete kan modelleras i skolan genom problemlösning” och då skapa förutsättningar för matematiska resonemang, kreativitet, aktivitet, kommunikation och motivation. Men han påpekar vidare att det krävs en systematisk didaktisk hantering av den matematiska praktiken som utvecklas i klassrummet (*ibid*, s. 173). I denna matematiska praktik är det lärarnas uppgift att se till att de normer som gäller för lektioner och övningar verkligen uppmuntrar eleverna att lära genom problemlösning (Lester & Lambdin, 2006, s. 97, jfr. Lampert, 1990; Cobb & Yackel, 1996). Det är, enligt Lester och Lambdin, också viktigt att lärare inte bara använder ”roliga” problem. Det ska på förhand finnas tydliga mål för vilka matematiska förmågor som är möjliga att utveckla och stimulera med ett givet problem. Den matematik som ska behandlas bör vara inbäddad i problemuppgiften. Författarna menar vidare att problemen måste vara tillgängliga och utmanande för eleverna och bygga på deras förutsättningar och potential (*ibid*, s. 97).

Även om intresset för och forskning om problemlösning i undervisningssammanhang har ökat under senare decennier finns en lång tradition där Pólya redan på 1940-talet beskrev fyra olika faser vid problemlösning som fortfarande är aktuella och används flitigt i litteraturen om problemlösning: att förstå problemet, att göra upp en plan, att genomföra planen samt att se tillbaka på lösningen (Pólya, 2005). Pólya vände sig också mot den rutinmässiga undervisningen som var helt dominerande då och som fortfarande är dominerande i våra klassrum. Han klassiska jämförelse mellan matematikundervisning och matlagning gäller i högsta grad fortfarande för svenska klassrum.

> Routine problems, even many routine problems, may be necessary in teaching mathematics but to make the students do no other is inexcusable. Teaching the mechanical performance of routine mathematical operations and nothing else is well under the level of the cookbook because kitchen recipes do leave something to the imagination and judgment of the cook but mathematical recipes do not. (Pólya, 1957, s. 172)

Ett av de viktigaste kriterierna för att ett problem ska ses som värdefullt och användbart i skolmatematiken är att det fungerar som medel för elever att lära sig den matematik som betraktas som väsentlig (Lester & Lambdin, 2006, s.

102). Men det är inte bara problemens karaktär som är av betydelse utan även lärarnas möjligheter att presentera och implementera problemen så att de ger upphov till kreativitet och motivation (Lampert, 1990: Lester & Lambdin, 2006). En avgörande betydelse för om problemen ska stimulera elevers lärande är tidsfaktorn. Det är viktigt att det finns gott om tid vid undervisning genom problemlösning då diskussioner av ett problem och dess olika lösningsalternativ tar längre tid i anspråk än traditionell undervisning (Lester & Lambdin, 2006, s. 102). Som nämnts tidigare är också lärares frågor till eleverna avgörande för deras möjligheter att utveckla matematiska förmågor. Det är dock väsentligt att eleverna inte lotsas genom problemen och får så mycket stöd av läraren att de själva inte behöver tänka och därmed inte ställs inför någon utmaning (Lester & Lambdin, 2006; jfr. Lampert, 1985).

Sheffield är en av de forskare inom fältet ”gifted education” som beskriver problemlösning som en metod att stimulera elever med särskilda förmågor (se även Freiman, 2006; 2009; Leikin, Koichu & Berman, 2009). Hon förespråkar, som nämnts ovan, rika och öppna problem och menar att problemen ska ställa frågor som gör att eleverna får möjlighet att tänka, inte frågor som gör att de behöver gissa vad läraren tänker (Sheffield, 2003, s. 6). Hon beskriver ytterligare faktorer som är viktiga vid utformningen av problem. De ska bygga på elevens tidigare kunskaper och göra det möjligt för eleven att upptäcka nya matematiska begrepp och metoder. Problemen ska vara rika med många möjligheter för eleverna att upptäcka mönster och samband, reflektera över olika lösningsstrategier, utvidga sina kunskaper och komma in på närbelägna områden. Det är också viktigt att eleverna ges möjlighet att uttrycka sina matematiska förmågor genom problemen. Sheffield menar därför att innehåll och utformning av problemen bör variera för att möjliggöra lärande på olika nivåer. Ett problem kan inledas med relativt enkla frågor som alla elever har möjlighet att diskutera och lösa, därefter ökar svårigheterna på deluppgifterna för att bli mer och mer komplexa och utmanande. Även i Sverige har forskare ägnat sig åt att beskriva denna typ av problem som i litteraturen ofta kallas *rika matematiska problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005; Taflin, 2007).

Det finns ingen entydig definition av *rika matematiska problem*. I de definitioner som finns i litteraturen ingår oftast både problemets art och hur problemen ska undervisas för att uppnå önskad effekt för eleverna. Taflin (2007) väljer i sin avhandling att definiera rika matematiska problem med följande sju kriterier:

1. Problemet ska introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.

2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.

3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
5. Problemet ska initiera en matematisk diskussion, utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobryggare.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem. (*ibid*, s. 22)

Detta kan enligt Taflin ses som en samlad definition byggd på den litteratur som finns om problemlösning och framförallt om rika matematiska problem.

Även Björkqvist (1999) ger en definition av matematiskt rika uppgifter som han anser bör vara mångsidigt användbara genom att de kopplar olika tillvägagångssätt till varandra eller utgör utgångspunkter för utvecklandet av två eller flera skilda teman inom matematiken. I ett projekt, EMU (Effektiv Matematik Undervisning) vid Åbo universitet har forskare arbetat med att samla sådana matematiskt rika uppgifter och göra dem tillgängliga för lärare (Björkqvist, 1998). Björkqvist menar vidare att en matematiskt rik uppgift kan fungera som ”ett slags brobyggare inom matematikundervisningen, mellan teman, mellan metoder och över tid” (Björkqvist, 1999, s. 36). Lärare kan komma tillbaka till en rik matematikuppgift vid olika tillfällen och då eleverna har nått olika långt i sin kunskapsutveckling.

Något som beskrivits tidigare är att lärarens frågor till eleverna i deras arbete med matematiska aktiviteter är viktiga. Både hur lärare frågar (form) men också vad lärare frågar om (innehåll) och varför lärare ställer dessa frågor (syfte). Det är också viktigt att lärare fortsätter att ställa följdfrågor, trots att de fått svar. Dessa frågor är en förutsättning, både från lärarens sida men även från elevernas sida, för att problemlösning som undervisningsmetod ska ge upphov till matematiska resonemang (Taflin, 2007, s. 21).

Sammanfattning och slutsatser av diskussionen ovan för min studie

Synen på begåvning och det stöd skolan ska ge begåvade elever har skiftat under 1900-talet. Som nämnts fanns det fram till mitten av århundradet en neutral skrivelse i utbildningsplanerna om stöd till elever med särskilda behov. I samband med de diskussioner som fördes i mitten av 1900-talet om införande av en gemensam bottenskola för alla förekom också argumentet att en sådan reform kunde leda till att de begåvade eleverna blev understimulerade. I läroplanerna Lgr62 och Lgr69 var formuleringen om stöd till elever med särskilda behov riktade enbart till elever med svårigheter och under senare delen av 1900-talet fanns få diskussioner om begåvade elever och om hur dessa elevers förmågor skulle stimuleras. Under denna period fanns viss möjlighet till ämnesfördjupning då elever i de senare åren av grundskolan hade möjlighet att välja alternativkurser i matematik och engelska. 1994 antog Sverige en läroplan, Lpo94, gemensam för alla elever och utan alternativkurser. Formuleringen om stöd till elever med särskilda behov var nu tillbaka i neutral formulering lik den som fanns i början av 1900-talet. I kursplanen för matematik fanns även nämnt elever i behov av särskilda utmaningar. Denna formulering är borta i det förslag till ny läroplan med tillhörande kursplaner, Lgr11, som kommer att gälla från hösten 2011. Avseende stöd till elever med särskilda behov har dock samma neutrala formulering som i Lpo94 använts och därmed finns möjlighet att tolka den till fördel även för elever med särskilda förmågor vilka är i behov av särskild stimulans.

Trots formuleringen i läroplaner och kursplaner om variation i arbetsformer är det framförallt en typ av undervisning som dominerar svensk matematikundervisning. Den består till största delen av enskilt arbete med framförallt rutinuppgifter hämtade från läromedel och lärare fungerar som handledare. Modellen, som utgör en form av hastighetsindividualisering, ger få möjligheter för eleverna att upptäcka och skapa matematik genom diskussioner och laborativa aktiviteter.

I många andra länder finns särskilda läroplaner, handlingsplaner eller beskrivningar av undervisning för begåvade elever vilka fortfarande saknas i Sverige. Internationell forskning visar att nivågruppering har gynnsam effekt för begåvade elever under förutsättning att också undervisningens syfte och innehåll förändras, exempelvis att eleverna får lära känna matematikområden som de annars inte skulle komma i kontakt med. Även en svensk studie visar på samma resultat.

Det som är helt avgörande för elevers positiva utveckling i matematik är lärarens kompetens. I lärarkompetens ingår, som tidigare nämnts, djupa och relevanta matematikkunskaper, breda pedagogiska kunskaper, kunskaper om elevernas ämneskunnande och förmågor samt praktisk förmåga att genomföra undervisningen. Ämneskompetens är nödvändig med inte tillräcklig för en effektiv lärare. Läraren bör, vid genomförandet av undervisningen, ha förmåga att uppmuntra samarbete och diskussion, ge eleverna möjlighet att förklara sina tankar och uppmuntra dem att experimentera med olika angreppssätt vid problemlösning. Nyligen publicerade studier visar även att lärares förväntningar på elevers möjligheter att utvecklas är en viktig faktor för elevernas framgång.

Problemlösning används ofta för att stimulera elever med fallenhet för matematik och både vår gällande och kommande kursplan i matematik pekar ut problemlösning som centralt i undervisningen. I Lgr11 finns problemlösning med både i syftet med ämnet och i ämnesinnehållet. Det är viktigt att problemen eller uppgifterna, utöver att träna lösningstekniker, också ger eleverna möjligheter att utveckla kreativa och välgrundade resonemang. Öppna problem och rika problem är exempel på problem som forskare menar ger elever möjlighet att fördjupa sitt matematiska kunnande och utveckla sina matematiska förmågor.

I mina empiriska studier använder jag mig av problemlösning i olika former vid observationer av enskilda individer och avslutningsvis diskuterar jag problemlösning som metod att identifiera och stimulera matematiska förmågor. Jag kommer även att studera lärares sätt att undervisa främst i avsikt att tydliggöra hur lärare kan förhålla sig till elever med särskilda matematiska förmågor och vilken lärarkompetens som krävs för att ge dem adekvat stöd och stimulans.

Teoretisk bakgrund

Nedan presenteras de teorier som senare kommer att användas vid analyserna av de empiriska studier där fallstudieelever arbetar med olika matematiska aktiviteter. För att kunna besvara forskningsfrågorna ”Vad karaktäriserar elever med särskilda förmågor?”, ”Hur bemöts dessa elever i skolan?” och ”Vad innebär detta bemötande för deras utveckling i matematik?” och för att fördjupa diskussionerna om frågorna behöver jag definiera matematisk förmåga och beskriva hur den uttrycks och kan identifieras i matematiska aktiviteter samt vilken betydelse sådana aktiviteter har för utvecklingen av matematiska förmågor.

Teoribakgrunden består av fyra delar. Närmast behandlas matematiska förmågor och en struktur för dessa förmågor presenteras och diskuteras. Därefter beskrivs hur matematiska aktiviteter kan utformas i termer av *form*, *innehåll* och *syfte*. Avseende form görs en distinktion mellan arbetsform och arbetssätt, där det förra avser den organisatoriska aspekten av en aktivitet och den senare aktivitetens karaktär. Aktivitetens innehåll beskrivs dels i termer av ämnesinnehåll dels kompetensinnehåll. Aktivitetens syfte beskrivs här dels med hänvisning till gällande svenska kursplaner, dels med referenser till en internationell diskussion, främst hämtad från TIMSS studier, specifikt från TIMSS video studie (TIMSS, 2010). Därnäst beskrivs de normer som reglerar matematiska aktiviteter i skilda praktiker. Två normsystem, *sociala normer* och *sociomatematiska normer*, presenteras. Det förra avser normer som reglerar samspelet mellan elever, och elever och lärare, och det senare avser normer som reglerar samspelet mellan elever, lärare och ämnet. Avslutningsvis presenteras hur skolans matematikundervisning organiseras på en mer övergripande nivå, främst med hänsyn till elever med särskilda förmågor i matematik, utifrån svenska läroplaner, rapporter från Skolverket samt internationella studier.

Matematiska förmågor

För att upptäcka och stödja matematisk förmåga krävs en tydlig definition och beskrivning av vad som utmärker en sådan förmåga (Barger, 1998; Krutetskii, 1976; Käpnick, 2004; Sheffield, 2003; Sriraman, 2008b). Då mitt syfte är att studera elever med särskilda förmågor i matematik, vad som karaktäriserar dem samt hur skolan bemöter dem, behövs en definition av vad matematisk förmåga innebär och hur den tar sig uttryck i matematiska aktiviteter.

Den definition som används i analyserna av elevernas arbete i olika matematiska aktiviteter och som presenteras nedan, infördes av V.A. Krutetskii (1976). Krutetskii studerade under en tolvårsperiod (1955-1966) hur matematiska förmågor framträder hos individer genom bl.a. intervjuer med och observationer av ca 200 barn och ungdomar (6-17 år). Dessa valdes ut efter noggrann bedömning där barnens lärare medverkade (*ibid*, s. 82). Eleverna delades in i fyra huvudkategorier: exceptionellt duktiga i matematik, duktiga i matematik, genomsnittliga och de som ansågs svaga i ämnet. Fördelningen mellan pojkar och flickor var lika i alla grupper förutom i gruppen exceptionellt duktiga där pojkarna var överrepresenterade (*ibid*, s. 178). Det bör påpekas att det inte handlade om generellt begåvade individer. Elever med exceptionella förmågor i matematik kunde vara genomsnittliga eller svaga i övriga skolämnen precis som de svaga i matematik kunde ha relativt goda skolresultat i övrigt. Krutetskii menade också att gruppen med svaga elever inte var hopplösa fall. Varje normalt friskt barn har kapacitet att klara av skolmatematiken om de ges rätt stöd (*ibid*, s. 176).

Samtliga elever i de fyra kategorierna fick i olika problemlösningssituationer, vilka vi återkommer till nedan, formulera sina tankar i tal och skrift. Krutetskii kritiserade den tidens generella tester som genomfördes i USA och Storbritannien (Krutetskii, 1976, s. 10). Han menade att man genom att granska testresultat inte kan avgöra en individs potential eller vilken typ av undervisning som skulle passa denna (jfr. Sjöstrand, 1970, s. 253; Ziegler, 2010, s. 69). Det gällde istället att granska själva lösningsprocessen som leder fram till ett givet svar. Olika sätt att komma fram till samma svar kan tyda på olika förmågor i matematik. Krutetskii påpekade därför för barnen att de skulle tänka högt, att det inte var svaret han var intresserad av eller hur lång tid det tog för dem att komma fram till svaret, men att det var själva lösningsprocessen som var intressant (Krutetskii, 1976, s. 93). Han var intresserad av hur individen löste problemet på egen hand men även hur eleven hade möjlighet att lösa problemet med hjälp av en vuxen (jfr. Vygotsky, 1978, s. 84-91). Om så behövdes gavs viss handledning i form av ledtrådar (Krutetskii, 1976, s. 96).

Krutetskii (1976) studerande förmågorna på två sätt, dels genom att jämföra resultat från observationer av individer i de ovan nämnda kategorierna exceptionellt duktiga i matematik, duktiga i matematik, genomsnittliga i matematik samt de som ansågs svaga i matematik, dels genom att jämföra observationer av samma individer vid olika tidpunkter i deras utveckling (*ibid*, s. 81).

Krutetskii (1976) och hans forskarlag följde några av de exceptionellt duktiga eleverna under många år, i intervjuer, observationer och i kontakter med föräldrar. Det visade sig att dessa fallstudieelever var mycket olika både vad gällde de matematiska förmågorna och i sättet att uttrycka dessa, exempelvis genom att de använde olika lösningsstrategier eller lösningsförklaringar, men också i mer allmän bemärkelse. En av Krutetskiis fallstudieelever, Sonja, var liten till växten, långsam i sina rörelser och verkade fysiskt betydligt yngre än hon var (*ibid*, s. 193-200). Volodya, en annan av eleverna Krutetskii följde, var fysiskt genomsnittlig, bråkade ofta, var spontan och ofta påträngande vetgirig (*ibid*, s. 200-205). Han sågs som en besvärlig elev. Volodya var, till skillnad från Sonja, duktig i allt han företog sig och föräldrar och lärare hade svårt att hålla honom sysselsatt. Medan Volodya var räknemästare och ofta arbetade med visuella hjälphandlingar var Sonja logikens mästare. Hon presenterade snabbt strålande lösningar genom ett abstrakt tänkande utan koppling till visuell hjälp i form av bild eller teckning. Hon kunde dock slarva och begå enkla numeriska fel, särskilt om uppgifterna var enkla. Båda eleverna arbetade hårt och hade lätt för att fördjupa sig i problem och kunde då vara svåra att nå.

I denna studie kommer jag, likt Krutetskii, att använda mig av fallstudier för att karaktärisera elever med fallenhet för matematik både avseende elevernas matematiska förmågor, hur de uttrycker dessa muntligt och skriftligt och deras mer allmänna personliga egenskaper samt sociala situation.

Förmåga och färdighet

Krutetskiis studie fokuserar ett spektrum av förmågor i syfte att definiera och identifiera de matematiska förmågornas natur och struktur. Han ser inte förmågor som i sig medfödda. Vad som ärvs är snarare en benägenhet att utveckla förmågor av visst slag (Krutetskii, 1976, s. 65). Dessa utvecklas genom övning och erfarenhet, och det går inte att förutsäga hur långt en enskild förmåga kan utvecklas (*ibid*, s. 17; jfr. Ziegler, 2010, s. 30; Häggblom, 2000). Krutetskii skiljer också mellan *förmåga* och *färdighet* där han definierar *förmåga* som en personlig egenskap eller potential som gör det möjligt för en individ att utföra en given uppgift medan *färdighet* avser hur individen utför uppgiften.

> Here is the difference: In speaking of abilities, one means the psychological characteristics of the person involved in the activity: in speaking of skills (habits) one means the psychological characteristics of the person´s activity. (Krutetskii, 1976 s. 71).

Krutetskii brottas med denna differentiering och menar att en matematisk aktivitet innehåller både förmåga och färdighet i ett komplext samband. Detta samband och dess differentiering är nödvändig att utreda för att förstå förmågornas natur och struktur. En individ kan ha förmåga att generalisera eller förmåga att tänka abstrakt och dessa förmågor kan visa sig som färdigheter i det att karaktären av den utförda uppgiften är elegant eller effektiv (Krutetskii, 1976, s. 71). Förmågor och färdigheter är alltså intimt sammanvävda vilket medför att lärares möjlighet att upptäcka elevernas matematiska förmågor ofta går genom iakttagelser av deras färdigheter, exempelvis hur snabbt de löser en uppgift eller hur elegant lösningen är. Det krävs emellertid kunskap om matematiska förmågor, analyser av aktivitetens förutsättningar samt fördjupande frågor till eleverna om deras lösningar och förklaringar, för att identifiera och stimulera de matematiska förmågorna.

Förmåga är, enligt Krutetskii, alltid en förmåga till en speciell aktivitet och skapas, existerar och utvecklas endast i denna aktivitet. Matematiska förmågor existerar och utvecklas alltså i matematiska aktiviteter (Krutetskii, 1976, s. 66). Vidare beskriver Krutetskii hur det krävs olika förmågor för att nå framgång inom ett område, hur brister i en viss förmåga kan kompenseras av styrka i andra förmågor inom vida gränser. De förmågor som Krutetskii beskriver är:

- Förmåga att formalisera matematiskt material, att skilja form från innehåll, att operera med formella strukturer av relationer och samband.
- Förmåga att generalisera matematiskt material, att upptäcka vad som är viktigt, att välja bort det som är irrelevant och att se vad som är gemensamt i det som ytligt sett är lika.
- Förmåga att operera med siffror och andra symboler.
- Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande.
- Förmåga till flexibilitet och reversibilitet i matematiska resonemang.
- Förmåga att förkorta och förenkla matematiska resonemang och operationer.
- Förmåga att minnas matematisk information, ett så kallat ”matematiskt minne”, som karakteriseras av minne för relationer, typiska drag i uppgifter och lösningar, argumentationsscheman, bevis, principer för problemlösning m.m. (*ibid*, s. 350-351)

Till dessa förmågor lägger Krutetskii en mer generell förmåga, *ett matematiskt sinnelag*, som t.ex. visar sig i ett intresse för de matematiska aspekterna av omvärlden, i en lust att matematisera den (*ibid*, s. 302). Han tar även upp andra förmågor som kan vara fruktbara vid matematiskt arbete men som inte är nödvändiga som t.ex. snabbhet i beräkningar, förmåga att minnas matematiska symboler, tal och formler samt spatial förmåga.

Förmågorna tar sig olika uttryck i olika faser av en problemlösningsprocess; vid *insamling*, *bearbetning* och *bevarande av matematisk information*. Det matematiska minnet kan t.ex. komma till uttryck då eleven samlar information inför lösningen av ett problem, och då drar sig till minnes tidigare lösningar av problem med likartad struktur (Krutetskii, 1976, s. 350-351). Vid insamlingsfasen visar sig även elevens förmåga att se den formella strukturen i ett matematiskt material samt förmåga att göra både analys och syntes samtidigt och på så sätt fånga helheten utan att tappa delarna (*ibid*, s. 227, 229). I bearbetningsfasen framträder framförallt förmåga till logiska resonemang (*ibid*, s. 196), förmåga till systematiskt och sekventiellt tänkande, förmåga att generalisera (*ibid*, s. 237, 240), flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter att förenkla och förkorta resonemanget i en problemlösning (*ibid*, s. 277, 283). I bevarandet av matematisk information synliggörs, som nämndes ovan, främst förmåga att minnas matematiska relationer, problemtyper och huvudsakliga argument i bevis (*ibid*, s. 295). Det handlar då mindre om att individer kommer ihåg formler, exempelvis geometriska formler eller matematiska uträkningar, exempelvis multiplikationstabellen än om att individer minns den formella strukturen i tidigare lösta problem.

Ett utmärkande drag i Krutetskiis studie är den stora mängd uppgifter som används för att identifiera matematiska förmågor. Problemuppgifterna är indelade i 26 serier där varje serie innehåller problem av likartat slag men av varierande svårighetsgrad (Krutetskii, 1976, s. 100-174). Dessa serier är i sin tur indelade i fyra kategorier efter den tankeverksamhet som de ska ge upplysningar om (*ibid*, s. 98). Tre av dessa kategorier motsvarar ovanstående faser i problemlösningsprocessen: insamling, bearbetning och bevarande av matematisk information. En fjärde kategori avser att visa på olika matematiska begåvningstyper: *analytisk*, *geometrisk* eller *harmonisk typ*. Även om gränserna mellan dessa tre typer av matematisk begåvning är flytande har, enligt Krutetskii, en analytisk typ en abstraktionsförmåga som leder till matematiska lösningar utan visuella hjälphandlingar medan en geometrisk typ bygger upp sin lösning med hjälp av geometriska eller bildlika föreställningar. En harmonisk typ utnyttjar abstraktion och bildföreställningar i ett samspel (*ibid*, s. 315-329). Då mitt huvudsyfte inte är att identifiera matematiska förmågor utan att studera hur de utvecklas över tid och vid olika bemötande kommer inte en detaljerad kategorisering enligt Krutetskiis begåvningstyper att göras.

Den matematiska förmågan är alltså dynamisk och mångfacetterad (Krutetskii, 1976, s. 60-78) och senare decenniers forskare har på olika sätt framhållit vikten av att inte se elever med särskilda förmågor i matematik som en homogen grupp (t.ex. Mönks, Heller & Passow, 2000, s. 841). De flesta forskare inom området utgår också på ett eller annat sätt från Krutetskiis studie, ibland med tillägg som fångar affektiva aspekter av personligheten som matematisk nyfikenhet, koncentrationsförmåga och uthållighet (Käpnick, 2004; Sheffield, 2003) eller kreativitet, t.ex. uttryckt i förmågan att skapa egna metoder för att utföra svåra beräkningar kombinerad med en svårighet att förklara lösningen för andra då eleven ofta uppfattar beskrivningen som självklar (Barger, 1998).

Matematiska aktiviteter

För att elever ska ha möjlighet att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor krävs, enligt Krutetskii (1976), matematiska aktiviteter. Vad karaktäriserar en matematisk aktivitet och vilka matematiska aktiviteter har en sådan karaktär att de utvecklar de matematiska förmågorna? Det finns olika sätt att karakterisera sådana aktiviteter. De kan exempelvis ha olika *form*, olika *innehåll* och olika *syfte*. När det gäller form och innehåll för matematiska aktiviteter finns detta omdiskuterat i litteraturen (se t.ex. Emanuelsson, 1996 s. 11; Löwing, 2004 s. 84, 263; NCTM, 2000; Niss & Höjgaard-Jensen, 2002) medan syftet med matematiska aktiviteter inte är lika omtalat men får större utrymme i den nya läroplanen Lgr11 med tillhörande kursplaner (Skolverket, 2011) vilken träder i kraft 1 juli 2011. Vi fördjupar oss nedan i dessa tre aspekter av aktiviteten, dels för att se om det finns något samband mellan dem, dels för att svara på frågorna om aktivitetens karaktär och potential för utveckling av elevers förmågor.

Formen för matematiska aktiviteter

Formen för en matematisk aktivitet, eller *arbetssättet* och *arbetsformen*, som den ofta benämns i litteraturen, beskriver hur aktiviteten utformas eller praktiskt genomförs (Backlund, 1999; Myndigheten för skolutveckling, 2007; NCM, 1996; Rystedt & Trygg, 2010; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001b). Detta kan exempelvis innebära hur lärare organiserar arbetet genom helklassundervisning, grupparbete, projektarbete eller enskilt arbete (arbetsform) men också som det sätt på vilket ämnesinnehållet behandlas genom föreläsning, diskussion, laborativt arbete eller undersökande aktiviteter (arbetssätt) (Backlund, 1999; se även Löwing, 2004).

Studier visar att den pedagogiska diskussionen oftare fokuserar formen, arbetssätt och arbetsform, för undervisningen än innehåll och syfte (Alexandersson, 1994; Madsén, 2002, Skolverket, 2003a, Wyndhamn, Riesbeck & Schultz, 2000). Få lärare tar utgångspunkt i innehållet, elevens förkunskaper och vilka förmågor eleven uttrycker, då de planerar den individuella undervisningen (Alexandersson, 1994).

Till diskussionen om arbetsformens betydelse för utvecklingen av matematiska förmågor hör också frågor om vad olika sammansättningar av elevgrupper betyder för elevers möjligheter att utveckla matematiska förmågor och frågor om i vad mån elever behöver olika stimulans i sin utveckling, d.v.s. hur undervisningen kan differentieras för elever med olika behov, en diskussion som vi återkommer till nedan i avsnittet *Klassrumspraktiken*. Arbetsformen påverkas i sin tur av skolans organisation, miljö samt ekonomiska resurser där tiden som finns till förfogande för matematikundervisning är en viktig faktor (Sjöberg, 2006, Skolverket, 2003).

Innehållet i matematiska aktiviteter

Innehållet i en matematisk aktivitet kan dels beskrivas i termer av *ämnesinnehåll*, dels *kompetensinnehåll* (Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000; Niss & Höjgaard-Jensen, 2002). Ett ämnesinnehåll, eller stoff, kan övergripande vara exempelvis aritmetik, algebra, geometri, kombinatorik, analys, statistik etc. eller mer detaljerat taluppfattning, divisionsalgoritmer, lösning av ekvationer, medelvärde, Pythagoras sats etc. Historiskt sett har ämnesinnehållet stått i fokus då kursplaner konstruerats, matematikundervisning planerats eller då diskussioner förts om en individs kunskaper i matematik (se Helenius, 2006; Myndigheten för skolutveckling, 2003, s. 17). En internationell trend under 2000-talet är emellertid tillkomsten av ramverk som avser att karaktärisera kunskaper i matematik i form av olika matematiska kompetenser (Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000; Niss & Höjgaard-Jensen, 2002). Detta är dock inte helt nytt. Kompetensbeskrivningar har tidigare presenterats, då i mer allmän form, där Blooms taxonomi (Bloom, Englehart, Furst, Hill, & Krathwohl, 1956) är ett exempel på ett sådant ramverk, som även finns i reviderad version (se t.ex. Anderson, 2001).

De tre ramverk som tidigare presenterats i forskningsöversikten: *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), *Kompetencer og Matematiklæring* (Niss & Höjgaard-Jensen, 2002) samt *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick m.fl., 2001) har haft betydelse för utvecklingen av kursmålen i matematik i Sverige. I den nya läroplan Lgr11 med tillhörande kursplaner (Skolverket, 2011), är kompetensperspektivet tydligt. I kursplanen i matematik för grundskolan (*ibid*) har nya mål tillkommit och mål uttrycks nu oftare i termer av kompetenser än, som tidigare, i termer av innehåll. Även målen för ämnesinnehållet är tydligare definierade och beskrivs i sex delområden: ”taluppfattning och tals användning, algebra, geometri, sannolikhet och statistik, samband och förändringar samt problemlösning” (*ibid*, 2011 jfr. NCTM, 2000). Inom varje delområde specificeras målen för olika nivåer inom grundskolan: årskurs 1 – 3, årskurs 4 – 6 samt årskurs 7 – 9. Kompetensmålen ingår numera i syftet för undervisning i matematik, vilket vi återkommer till nedan. I Lgr11 (Skolverket, 2011) finns tydliga likheter med ramverken ovan vad gäller såväl ämnesinnehåll som kompetensmål. Stor tonvikt läggs, i den nya kursplanen (*ibid*) vid problemlösning, som finns med både som en kompetens eller, som det uttrycks i materialet, som en förmåga som ska ges förutsättningar att utvecklas, samt som ett av sex delområdena i ämnesinnehållet.

Syfte med matematiska aktiviteter

Syftet med matematiska aktiviteter är inte lika väldokumenterat och diskuterat som formen för matematiska aktiviteter eller innehållet i dessa. Syftet med ämnet matematik i skolan är enligt gällande kursplan, Lpo94 (Skolverket, 2000) t.ex. att eleven utvecklar sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer samt att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband. I kursplanen i matematik i Lgr11 (Skolverket, 2011) har syftet utökats och innehåller, utöver en revidering av de ovan angivna målen, också kompetensmål (jfr. Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 2000), vilka uttrycks i förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla (Skolverket, 2011).

> Genom undervisning i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att:
>
> - formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
> - använda och analysera matematiska begrepp, och samband mellan begrepp,
> - välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
> - föra och följa logiska matematiska resonemang, och
> - använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (*ibid*, s. 31)

Detta är en tydlig markering mot nuvarande kursplan där delar av dessa kompetensmål endast finns med i mål att sträva mot. Kompetensmålen ovan gäller alla elever i grundskolan och visar tydligt vilket syfte som lärare bör ha med matematiska aktiviteter i skolan. Genom kompetensmålen kommer vi också ett steg närmre ett syfte som bättre harmonierar med behovet av stöd och stimulans hos elever med särskilda förmågor i matematik.

Forskarlag i USA (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999) har gjort intressanta analyser i jämförande studier av matematikundervisningen i olika länder. Nedan tas två sådana studier upp i avsikt att beskriva hur syftet med matematikundervisning varierar länder emellan och hur skillnader därmed uppstår i de matematiska aktiviteter som erbjuds eleverna.

I TIMSS internationella studie från 1995 ingick, som en del, videofilmning av ett stort antal matematiklektioner i årskurs 8 i USA, Japan och Tyskland (TIMSS, 2010). Forskarlaget urskiljer, vid analyser av dokumenterade matematiklektioner, tydliga kulturella mönster (Stigler & Hiebert, 1999). Det finns skillnader i hur matematikundervisningen praktiseras inom varje land men mellan länderna är skillnaderna större och tydligare. Det som tas upp och beskrivs är skillnader i de undervisningsmetoder som används i de tre länderna, främst gällande innehåll och form. Enligt Wallby, Carlsson & Nyström (2001a, s. 71) kan undervisningen i USA förenklat beskrivas som ett samspel mellan *läraren och eleverna*, undervisningen i Tyskland som ett samspel mellan *matematiken och läraren* medan lektionerna i Japan beskrivs som ett samspel mellan *matematiken och eleverna*. Tre länder och tre versioner av samspel i klassrummet, möjligen också tre olika syften med matematikundervisningen. Både i USA och i Tyskland kan undervisningen beskrivas som en förmedling av kunskap, där läraren lär eleverna hur de ska lösa problem steg för steg. I USA är matematiken elementär medan lektionerna i Tyskland innehåller mer avancerade problem. Normen i USA är att "ingen elev bör bli förvirrad eller utsättas för att inte kunna" (*ibid*, s. 71).

Undervisningen i USA och Tyskland skiljer sig markant från undervisningen i Japan. De inspelade japanska lektionerna visar hur eleverna uppmanas att själva eller i samarbete med andra elever lösa problem. Problemen är noga utvalda för att belysa det område eller den kompetens som ska tränas. Därefter har eleverna möjlighet att diskutera sina lösningar och eventuella svårigheter de haft att lära med läraren. Eleverna får därigenom ta ett större ansvar för sin inlärning och lärarna fungerar som handledare. Här bör påpekas att lektionerna i Japan, liksom i andra länder som använder Learning och Lesson study (se Hiebert, 2002; Kullberg, 2010; Stigler & Hiebert, 1999), är noga planerade och styrda från lärarens eller lärarlagets sida. Detta står emellertid inte i motsättning till att eleverna arbetar självständigt eller i grupp med att närma sig kunskap och förståelse.

> Att eleverna inte kan och är förvirrade anses vara ett steg för eleverna på väg mot att verkligen förstå problemet och lösningsprocessen. Det anses som en stor fördel att klasserna är stora, ca 40 elever är inte ovanligt, då gruppens sätt att reagera går att förutsäga eftersom läraren vet att många tänkbara uppfattningar finns representerade. Olikheter hos elever är här till fördel i lärprocessen. (Wallby m.fl., 2001a s. 71-72)

Syftet med matematikundervisningen i de olika länderna, så som den framträder i det dokumenterade TIMSS materialet, skiljer sig därmed åt. I USA och Tyskland är målet att lära eleverna hur de ska utföra matematiska beräkningar inom elementär eller avancerad matematik med fokus på färdigheter och att de ska behärska ett ämnesinnehåll, medan målet i Japan är att stödja eleverna i att förstå matematiska begrepp och procedurer med fokus på de ovan nämnda kompetensmålen (Stigler & Hiebert, 1999, s. 89). Som vi ser ovan kan syftet med matematikundervisning generellt överföras till syftet med olika matematiska aktiviteter i skolan och mer detaljerat till syftet med enskilda matematiska problem. (jfr. Niss, 2001)

Wallby m.fl. (2001a) refererar även till en tidigare studie (Stevenson & Stigler, 1992) där matematikundervisningen i primary school i ett antal länder studerats, däribland USA, Japan och Kina. I denna studie finner författarna en tydlig skillnad mellan länderna i hur lärare förhåller sig till elevers misstag.

> I USA ses det som ett personligt nederlag att misslyckas och lärarna vill hjälpa eleverna så att de slipper utsättas för det. De japanska och kinesiska lärarna ser misstag som indikationer på vad som ytterligare behöver läras. Att lära innebär i deras ögon ett arbete där misstag har sin plats. (Wallby m.fl., 2001a, s. 73)

Syftet med undervisningen i USA är, som det framträder i TIMSS videostudier, att lära eleverna utföra matematiska beräkningar på rätt sätt. Om stor vikt läggs vid förmedling av kunskap ligger det nära till hands att se elevernas misstag som nederlag. Läraren har inte lyckats förmedla budskapet och/eller eleverna har inte lyckats ta det till sig. Japanska och kinesiska lärare tycks snarare se undervisningen som en process där eleverna först själva arbetar med inlärning genom såväl enskilt arbete som exempelvis grupparbete, diskussioner och argumentation och först därefter ges möjlighet till handledning och diskussion med lärarna. I denna process är det naturligt att eleverna inte från början behärskar innehållet och därmed är det fullt tillåtet för dem att göra misstag. Dessa normativa skillnader, mellan olika lärandemiljöer, i synen på vad som är till fördel eller nackdel för elevernas inlärning, skapar olika förutsättningar för eleverna att utveckla matematiska förmågor. Nedan presenteras en teoriram för vad sådana normativa skillnader betyder för elevernas utveckling av matematiska förmågor.

Utveckling av kompetenser i en pedagogisk praktik

I de flesta matematiska aktiviteter, vilka kan ha olika form och innehåll, finns möjlighet att utveckla matematiska förmågor, men en avgörande skillnad tycks vara det syfte som styr undervisningen och de normer som därmed utvecklas i ett klassrum. Jag kommer därför att studera hur skapandet och etablerandet av normer i matematiska aktiviteter påverkar utvecklingen av matematiska förmågor hos elever med fallenhet för matematik, här analyserade med utgångspunkt i Krutetskiis ramverk för matematisk förmåga.

Syftet med Krutetskiis studie var att kartlägga den matematiska förmågans natur och struktur, inte att studera hur matematiska förmågor stimuleras, utvecklas och fördjupas. Krutetskii använde sig, som tidigare nämnts, av problemlösning som matematisk aktivitet. De matematiska problemen hade olika innehåll och var utformade och grupperade på ett sätt som gjorde det möjligt för observatören att identifiera barnens matematiska förmågor. Då mitt syfte är att studera hur elever med särskilda förmågor i matematik bemöts i skolan och vilka möjligheter det finns för dem att utveckla sina matematiska förmågor i den praktik som skolan erbjuder krävs, utöver en teori om hur matematiska förmågor uttrycks hos enskilda individer, också en teori som tar hänsyn till den interaktion som sker vid matematiska aktiviteter.

Sociala och sociomatematiska normer

En aktivitet styrs alltid av normer. Vissa normer är specifika för den speciella aktivitetens karaktär andra är generella och gäller för många olika aktiviteter. I denna studie har jag valt att studera matematiska aktiviteter i form av klassrumsundervisning, gruppövningar, enskilda diskussioner mellan lärare och elever eller mellan mig och elever, vilket ställer krav på en begreppslig ram för hur sådana aktiviteter kan beskrivas och analyseras.

En teoretisk ansats som koordinerar ett individuellt psykologiskt och ett socialt perspektiv har föreslagits av Cobb och Yackel (1996). I två parallella studier (Cobb & Yackel, 1996; Yackel och Cobb, 1996) inför de begreppet sociomatematiska normer, ett begrepp som kompletterar deras tidigare studier av klassrummets sociala normer (se t.ex. (Cobb, Yackel & Wood, 1989; Yackel, Cobb, & Wood, 1991 Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992). Forskarnas syfte var att undersöka elevers matematiska utveckling i klassrummet och hur den påverkas av den sociala kontexten.

För att analysera de matematiska aktiviteter som observeras i denna studie, d.v.s. aktiviteter i klassrum, i gruppundervisning och i samtal mellan mig och enskilda elever, har jag, som ett komplement till Krutetskiis definition och beskrivning av matematisk förmåga, valt att studera de sociala och sociomatematiska normer (Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996) som framträder i kommunikationen i de skilda matematiska aktiviteterna.

Med *klassrummets sociala normer* menas regelbundna mönster som reglerar elevernas interaktion med varandra i klassrummet och som är ämnesoberoende. Sådana normer kan t.ex. avse hur samtal får ske i ett klassrum, som t.ex. att det är viktigt att lyssna när en enskild elev eller läraren talar, att man ska begära ordet genom att räcka upp handen och att det är viktigt att alla förstår och kan följa ett resonemang. Andra sociala normer kan avse elevernas placering i klassrummet och hur läraren är placerad i förhållande till dessa. Om normsystemet, som enligt Cobb och Yackel utvecklas i samspel mellan lärare och elever i en klassrumspraktik, betonar värdet av att eleverna kommer fram till rätt svar på en given uppgift kommer detta att prägla en klassrumspraktik som skiljer sig väsentligt från en praktik där normen är att eleverna bör få diskutera olika lösningar till en uppgift eller ett problem. Skillnader i normsystem kan också komma till uttryck i hur felaktiga svar från elever värderas. Som nämnts tidigare är det i vissa länder legitimt och till och med till fördel för utvecklingen av förmågorna att visa upp sina misstag (Stevenson & Stigler, 1992) eller det motsatta, att ett felaktigt svar ses som ett personligt nederlag och något lärarna vill hjälpa eleverna att undvika (se Yackel, 2000, s. 4).

De *sociomatematiska normerna* syftar på de mönster i klassrumspraktiken som är specifika för matematiska aktiviteter, t.ex. normer för vad som är en godtagbar och acceptabel lösning på ett problem, vad som är en annorlunda eller mer sofistikerad lösning än de som tidigare presenterats eller vad som är en matematiskt effektiv lösning (Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996).

Vad gäller praktiken i klassrummet menar författarna att det är viktigt att diskutera hur en sådan praktik utvecklas och vad den betyder för individuella elevers utveckling. Om eleverna får möta ett undersökande arbetssätt i klassrummet där de uppmanas att inför andra förklara sina lösningar, att sätta sig in i och förstå andras lösningsförslag samt att tolka och jämföra olika lösningar, utvecklas de som individer men det sker även en utveckling i vad Cobb och Yackel kallar *klassrummets matematiska praktik*, en praktik vars normer är förankrade och etablerade och inte längre kräver någon redovisning (Cobb & Yackel, 1996, s. 179; Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; jfr. Wistedt m.fl., 1992, s. 107).

Både klassrummets sociala normer och sociomatematiska normer styr den matematiska argumentationen i undervisningssituationen och påverkar inlärningsmöjligheterna för både lärare och elever (Yackel & Cobb, 1996). Den modell som forskarna presenterar bygger på en kombination av att observera och analysera utvecklingen av de sociala och sociomatematiska normerna som etableras i ett klassrum samt att ur ett psykologiskt konstruktivistiskt perspektiv observera den enskilde elevens aktivitet då denne deltar i en klassrumsaktivitet. Ett sådant perspektiv, som kombinerar sociala och psykologiska aspekter av lärande, sammanfattas i följande modell (Cobb & Yackel, 1996, s. 177):

Social perspective	**Psychological perspective**
Classroom social norms	Beliefs about own role, others` roles, and the general nature of mathematical activity in school
Sociomathematical norms	Mathematical beliefs and values
Classroom mathematical practices	Mathematical conceptions and activity

Tabell 1. Ramverk för tolkning av klassrummets sociala och sociomatematiska normer

Författarna menar att dessa två perspektiv, det sociala och det psykologiska, är ömsesidigt beroende av varandra då vi ska tolka och analysera individers aktiviteter i klassrummet. Varje social nivå har en motsvarande psykologisk nivå och dessa konstrueras och revideras parallellt. Som framgår av figuren ovan beskriver det psykologiska perspektivet generella matematiska trosföreställningar och värden liksom utvecklingen av matematiska begrepp och aktiviteter. Då mitt syfte är att mer specifikt studera hur matematiska förmågor utvecklas i en pedagogisk praktik kommer det psykologiska perspektivet här att avse den individuella utvecklingen av matematiska förmågor, med stöd i Krutetskiis beskrivning av de matematiska förmågornas struktur och karaktär, och det utrymme som skapas för deras utveckling i en pedagogisk praktik.

Klassrumspraktiken

Vilka normer förväntas gälla i svenska klassrum? Vilka är skolans skyldigheter och möjligheter att stimulera elevers förmågor i matematik? I vår nuvarande läroplan, Lpo94, sägs att: ”Läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga” (Skolverket, 2006, s. 12). Målformuleringen ställer stora krav på undervisningens utformning med avseende på att innehåll och arbetsmetoder måste anpassas till varje elevs förutsättningar, vilket kräver tid, kunskap och engagemang från läraren samt stöd från arbetslag och skolledning, förutsättningar som inte alltid uppfylls. (Bjerneby- Häll, 2006; Emanuelsson, 2001, s. 83; Skolverket, 2005, s. 60; Wallby m.fl., 2001a, s. 104)

Differentiering i skolans praktik

Då mitt syfte är att studera hur elever med fallenhet för matematik bemöts i skolan och vilken betydelse detta bemötande har för deras utveckling av matematiska förmågor är skolans skyldigheter och möjligheter att stödja och stimulera dessa elever viktiga aspekter, men också vilket stöd och vilken stimulans och form som gynnar dessa elevers utveckling av matematisk förmåga.

1994 fick vi i Sverige, som ovan nämnts, genom en ny läroplan Lpo 94 (Skolverket, 2006), för första gången en sammanhållen grundskola. All *yttre differentiering* (Wallby m.fl., 2001a s. 36) i matematik, d.v.s. differentiering som regleras av nationella styrdokument, försvann därmed för elever upp t.o.m. årskurs 9. Viss form av *inre differentiering*, d.v.s. differentiering som beslutas lokalt, främst i form av nivågrupperingar av olika slag, har därefter förekommit och förekommer fortfarande. Forskning har inte kunnat visa på några generella prestationsvinster eller förluster med nivågruppering (*ibid*, s. 13). För elever med intresse och fallenhet för matematik kan emellertid nivågruppering ge ökade möjligheter att utveckla matematiska förmågor om de exempelvis erbjuds en utökad kurs eller alternativ undervisning. Det är alltså inte, som tidigare nämnts, själva sammansättningen av elever i olika grupper, den organisatoriska formen, som är av störst betydelse utan vilken möjlighet till stöd och stimulans som ges för utveckling av matematiska förmågor (Brody, 2004; Koshy, 2001, Kulik & Kulik, 1992; Kulik, 2003; Skolverket, 2007). Möjligen krävs det en homogen grupp av elever för att genomföra en undervisning som stimulerar elever med specifika utbildningsbehov.

Pedagogisk differentiering och *organisatorisk differentiering* (Wallby m.fl., 2001a) kan ses som två olika aspekter av undervisningens utformning till stöd för elever med fallenhet för matematik. Båda har som mål ”att undervisningen ska passa olika elever och eftersom elever är olika kan inte undervisningen vara likadan för alla” (*ibid*, s. 36). Då differentiering sker inom klassens ram, genom exempelvis individualisering eller tillfälliga smågrupper kallas den *pedagogisk differentiering*. *Organisatorisk differentiering* avser en nivågruppering av eleverna med mer permanenta gruppindelningar.

I litteraturen om elever med fallenhet för matematik (se t.ex. Assouline & Lupkowski-Shoplik, 2005; Barger, 1998; Koshy, 2001, Winner, 1999) beskrivs två former av differentiering, *acceleration* och *berikning*. *Acceleration* innebär att eleverna tillåts fortsätta framåt i egen takt, t.ex. genom hastighetsindividualisering, nivågruppering, tidig skolstart eller flyttning till högre årskurs (Assouline & Lupkowski-Shoplik, 2005, s. 181; Barger, 1998, s. 15; Mönks, 2009, s. 73; Wallby m.fl., 2001b, Winner, 1999, s. 222-223). De senare formerna, vilka är exempel på organisatorisk differentiering, förekommer numera sparsamt i vårt land (Skolverket, 2004b; 2008; Wallby m.fl., 2001b) medan hastighetsindividualisering, en form av pedagogisk differentiering, ofta förekommer i undervisningen i Sverige.

Berikning, kan innebära att eleverna får fördjupande uppgifter inom det område som klassen studerar eller får arbeta med uppgifter eller områden som inte tillhör skolans ordinarie utbud medan de inväntar sina klasskamrater (Assouline & Lupkowski-Shoplik, 2005, s. 228; Barger, 1998, s. 22; Mönks & Ypenburg, 2009, s. 75; Sheffield, 1994, s. 42). Helt felaktigt betraktas ibland aktiviteter som att lösa fler liknande uppgifter, att repetera tidigare avsnitt, att ge stödundervisning till klasskamrater eller rätta och bedöma klasskamraters prov och hemuppgifter som berikning (Mönks & Ypenburg, 2009, s. 76; Persson, 2010, s. 550).

I en tidigare genomförd enkätstudie (Pettersson, 2008, s. 111-113), där 149 lärare (årskurs F-9) fick besvara frågan om vad de gör för att stimulera elever med fallenhet för matematik förekom acceleration (i form av hastighetsdifferentiering) och berikning (vanligen i form av extrauppgifter) i lika stor utsträckning.

För att åtgärder som acceleration och berikning ska kunna förverkligas krävs att det finns ett brett utbud av läromedel och framförallt att ett lärarkollegium som ska genomföra undervisningen är motiverat och har stöd och resurser av skolledning. Det är alltså inte enbart en fråga om skolorganisatoriska åtgärder, utan i synnerhet också om skolledning och lärares vilja till engagemang och förståelse för individuella olikheter i behovet av undervisning (NACE, 2010; Wistedt & Sundström, 2011).

I min studie genomförs förutom klassrumsobservationer och intervjuer med lärare och skolledning även två enkätundersökningar i syfte att skapa en bredare bild av de åtgärder i form av inre differentiering, såväl organisatorisk som pedagogisk differentiering, som skolan erbjuder för att stödja och stimulera elever med fallenhet för matematik.

Metod och studiens genomförande

I kapitlet nedan beskrivs de metoder som använts i studien, hur de är relaterade till den tidigare presenterade teoretiska bakgrunden samt hur studiens olika delar är genomförda. Studien handlar om frågor om människors individuella olikheter och i den teoretiska bakgrunden och i forskningsöversikten har jag beskrivit hur dessa olikheter kan ta sig uttryck generellt och specifikt inom matematik. Av genomgången framgår även att förmågor inte är en gång för alla givna hos en människa utan skapas, utvecklas och upptäcks i en aktivitet (Krutetskii, 1976) vilket har haft stor betydelse för studiens upplägg och genomförande. Likaså har forskning inom området ”gifted education”, som är den engelskspråkliga benämningen av forskningsområdet, visat att elever med generell begåvning eller specifika förmågor inom något område inte är att betrakta som en homogen grupp (Mönks, Heller & Passow, 2000). På samma sätt som normalbegåvade individer är de olika sinsemellan och även detta har varit viktigt i planeringen av forskningsprocessen.

I avsnittet nedan, *Metodologiska överväganden*, beskrivs de metoder som används i studien och hur valet av metodisk uppläggning följer av den teoretiska ansatsen som presenterats ovan. De teorier som legat till grund för studiens analyser är främst Krutetskiis struktur för matematiska förmågor samt Cobbs och Yackels teorier om normbildningens roll och betydelse för elevers kunskapsbildning i matematik, hur sociala normer såväl som normer specifika för undervisning i ämnet matematik, så kallade sociomatematiska normer, kan stödja respektive hämma elevers matematiska utveckling. I avsnittet *Metod* beskrivs mer detaljerat hur datainsamling, urval, analys och presentationen av materialet har genomförts. *Studiens genomförande* presenteras dels i en tabell över de olika aktiviteternas omfattning och utsträckning i tid dels i utförliga beskrivningar av de olika aktiviteternas genomförande samt i presentationer av fallstudieelevernas bakgrund och skolsituation.

Metodologiska överväganden

Studiens huvudsakliga syften, vilka presenterats ovan, är att karaktärisera elever med särskilda förmågor i matematik samt att studera hur dessa elever bemöts i skolan och vad detta bemötande innebär för deras utveckling i matematik. I karaktäristiken av eleverna ingår dels en beskrivning av deras personliga egenskaper, bakgrund och nuvarande sociala situation dels deras matematiska förmågor så som de kommer till uttryck i skola, hem och övriga vardag. Mina teoretiska utgångspunkter säger att det krävs matematisk aktivitet för att upptäcka och beskriva matematiska förmågor (Krutetskii, 1976). För att identifiera elevers förmågor då de samlar matematiskt material samt tolkar och resonerar om detta krävs aktiviteter som innehåller övningar som tar dessa förmågor i anspråk (Krutetskii, 1976, s. 98). Det betyder att jag behövt få möjlighet att delta i eller själv anordna matematiska aktiviteter i en eller flera skolor under en längre period. Min förhoppning var att i dessa aktiviteter finna en eller flera elever som i dessa aktiviteter visade prov på matematiska förmågor, elever som jag sedan kunde gå vidare med i fördjupade studier. Matematisk förmåga är, som den beskrivs av bland annat Krutetskii, ett komplext fenomen – en kombination av olika förmågor som kan kompensera varandra inom vida gränser. Fallstudien blev mitt val av metodisk ansats, en undersökningsmetod som lämpar sig då det som skall studeras är just ett sådant komplext fenomen (Cohen, Manion, Morrison, 2000; Merriam, 1994).

I det teoretiska avsnittet har jag tagit upp Krutetskiis longitudinella studie (1955-1966) vars syfte var att undersöka de matematiska förmågornas natur och struktur. Krutetskii utgick i sin studie bland annat från en svensk psykolog, Ingvar Werdelin, som i The mathematical ability (Werdelin, 1958) publicerade sina studier av matematisk förmåga och definierade den på följande sätt:

> The mathematical ability is the ability to understand the nature of mathematical (and similar) problems, symbols, methods and proofs: to learn them, to retain them in the memory and to reproduce them; to combine them with other problems, symbols, methods and proofs; and to use them when solving mathematical (and similar) tasks. (*ibid*, s. 13).

Werdelins definition av matematisk förmåga inspirerade Krutetskii i valet av problem att använda i studien av de utvalda eleverna. Krutetskii var emellertid ytterst kritisk mot Werdelins analysmetod – den då vanligen använda faktoranalysen. Krutetskii utvecklade istället en analysmetod där han följde över 200 elever i deras arbete med att lösa utvalda matematiska problem. Variationen i problemens karaktär är utmärkande för Krutetskiis studie samt att han koncentrerar sin analys till elevernas lösningsprocess och inte enbart till resultatet av den, vilket var det vanliga i den tidens matematiska testförfarande.

Jag har, likt Krutetskii, valt att variera de problem som använts i studien, detta för att i första hand locka fram elevers intresse och lust för matematik men senare också för att urskilja elevernas olika matematiska förmågor. På samma sätt som Krutetskii observerar jag eleverna då de löser problem och jag ber dem tänka högt då jag är intresserad av hela lösningsprocessen och inte bara svaret. I studiens enskilda samtal mellan mig och eleverna används problem hämtade från bland annat Krutetskiis studie (1976), Kängurutävlingen (NCM, 2010) samt från litteratur om rika matematiska problem (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005).

Krutetskii ser inte förmågor som i sig medfödda utan menar att det som ärvs snarare är en benägenhet att utveckla förmågor av visst slag. Matematiska förmågor är alltså utvecklingsbara och utvecklas genom övning och erfarenhet. Jag behövde därför få möjlighet att följa elever under en längre period och i olika former av aktiviteter.

Fallstudierna inkluderar också beskrivningar av elevernas sociala miljö i och utanför skolan. Den teoretiska genomgången ger vid handen att förmåga inte bara handlar om individens egen optimala kompetens utan i hög grad också om omgivningens stöd för utveckling av specifika förmågor (t.ex. Bloom, 1985; Csikszentmihalyi m.fl., 1997; Winner, 1999). Jag har därför genomfört intervjuer med eleverna själva, med deras föräldrar och med lärare och rektorer för att skapa en bild av hur den matematiska förmågan tagits om hand och stimulerats från tidig ålder, i familjen och genom skolåren.

Mitt syfte, förutom karaktäriseringen av eleverna, är även att undersöka vilket bemötande dessa elever får i skolan och vad detta bemötande innebär för deras utveckling i matematik. Bemötandet i skolan avser både de möjligheter eleverna har att uttrycka sina särskilda förmågor i matematik i klassrumssituationer eller i enskilda samtal med lärare eller speciallärare men också vilket extra stöd som erbjuds dessa elever för att de ska få möjlighet att utveckla sin potential. För att beskriva elevernas möjligheter att uttrycka sina förmågor i skolan behövde jag få möjlighet att observera elevers och lärares aktiviteter i klassrumssituationer samt i olika former av gruppövningar och enskilda samtal mellan elever och lärare. Observationerna fokuserar framförallt de sociala och sociomatematiska normer (Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996), som utvecklas i interaktionen mellan lärare och elever och som påverkar elevernas intresse för matematik och deras möjligheter att utveckla sina förmågor. Dessutom ingår intervjuer med lärare och rektorer som avser att ge svar på frågor om extra stöd till eleverna och hur detta i så fall är utformat.

Mer generella studier av matematikundervisningen, så som den bedrivs i svenska klassrum samt av hur lärares och elevers situation vanligen ter sig, har presenterats tidigare i forskningsöversikten (Skolverket, 2003a; 2004a; 2004b; 2004c; 2007; SOU, 2004). Det finns däremot få studier av hur elever med särskilda förmågor inom olika domäner tas om hand i svenska klassrum. Förutom de ovan beskrivna fallstudierna som ingår i den här aktuella studien, där skolans bemötande av eleverna studerats, har även två större enkätstudier genomförts. Detta har gjorts för att få en överblick över vad som görs för elever med fallenhet för matematik i Sverige samt information om vilka handlingsplaner som Sveriges kommuner har för att bemöta dessa elever. Den första enkätstudien är ställd till 180 lärare som undervisar i grundskolan. Studien tar upp frågor om undervisningsmodeller som lärare använder och förväntningar de har på elevers arbete i skolan och hemma. Om de har eller har haft elever med särskilda förmågor i matematik i sina klasser har jag ställt frågor om hur de i så fall upptäckt dessa. Sist men inte minst har jag ställt frågan om hur de bemöter och stimulerar dessa elever. I den andra enkätstudien som riktar sig till matematikutvecklare i Sveriges kommuner ställs frågor om det i kommunen finns handlingsplaner för att ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik.

Metod

Nedan följer en sammanställning av de metoder som använts vid de empiriska studierna samt vid analys och presentation av materialet. Här redovisas det empiriska materialets omfattning och fördelning över olika aktiviteter såsom klassrumsobservationer, enskilda samtal och matematiska diskussioner med eleverna, intervjuer med föräldrar, lärare och rektorer. Vidare beskrivs de urval som gjorts och på vilka grunder urvalet vilar. Inledningsvis förs en diskussion om studiens tillförlitlighet, trovärdighet samt av de etiska övervägande som studien föranlett.

Studiens tillförlitlighet, trovärdighet samt etiska övervägande

Studien omfattar tio fallstudier samt två större enkätundersökningar. Fallstudierna innehåller observationer av och intervjuer med elever, föräldrar, lärare och rektorer. Sex av de tio fallstudierna är longitudinella där eleverna följts från drygt två år till drygt fem år. Utgående från tio fallstudier är det inte möjligt att dra generella slutsatser om mina forskningsfrågor: karaktäristik av elever med särskilda förmågor i matematik, skolans bemötande av eleverna och vad detta bemötande betyder för deras fortsatta utveckling i matematik, och det har inte heller varit ambitionen med studien. Fallstudierna tillsammans med enkätundersökningarna visar dock på mönster dels avseende olikheter i elevernas matematiska förmågor, dels lärarnas agerande och bemötande av eleverna. Flertalet av dessa resultat sammanfaller med resultat från tidigare forskning, främst internationell, som presenterats i forskningsöversikten, vilket stärker resultatens tillförlitlighet. Vid longitudinella studier finns en risk att undersökningens uppläggning, genomförande och resultat påverkas av förändringar dels i form av forskarens förändrade kunskaper dels av förändringar som sker i samhället under tiden som datainsamlig sker (Bryman, 2004; Cohen, Manion & Morrison, 2000, s. 176). Aktuella för studien är de förändringar som skett avseende värderingar och attityder till begåvningsbegreppet, främst bland skolans personal men även övrigt i samhället.

Etiska övervägande som gjorts gäller främst de deltagande individernas anonymitet. Samtliga elever, föräldrar, lärare och rektorer som deltagit i studien har muntligen tillfrågats om att delta i fallstudien och har ställt sig positiva till att medverka. Vid pilotstudien gav alla föräldrar till elever som medverkade ett skriftligt medgivande då videofilmning genomfördes.

Fallstudieeleverna har själva fått välja vad de vill heta i studien och presenteras genomgående med detta namn. Lärare, speciallärare, mentorer och föräldrar presenteras med sin titel eller roll. Då ett avsnitt eller stycke innehåller flera lärare presenteras dessa som Lärare 1 respektive Lärare 2 med tydlig beskrivning av deras roll i förhållande till fallstudieeleven. Ytterligare ett etiskt övervägande gäller transkriptionen. I stort sett all ljudupptagning har transkriberats ordagrant i sin helhet. Transkriptionen har genomförts direkt efter observation eller intervju och innehåller data om vad varje deltagare uttrycker verbalt. Pauser samt deltagarnas kroppsliga utryck har noterats i fältanteckningar. Transkriptionen har utgjort underlag för analyserna. Utsagorna som presenteras är i stort sett ordagrant återgivna. Viss redigering har dock gjorts vid översättning från tal till skrift. Exempelvis har extralingvistiska uttryck (t.ex. suckar) tagit bort och förtydligande av ord (t.ex. e de = är det) gjorts. Muntliga utsagor som innehåller tal är i vissa fall utskrivna med siffror. När elevers, föräldrars och lärares skriftliga information till mig återges, har smärre justering gjorts av eventuella stavfel och grammatiska fel.

Nedan redovisas metoder som använts vid studiens genomförande och de val som gjorts och beslut som tagits för att säkerställa studiens tillförlitlighet och trovärdighet.

Datainsamling och generering av data

Fallstudierna avser att med stöd av observationer, intervjuer och matematiska diskussioner studera studiesituationen för de deltagande eleverna. Observationer har genomförts av klassrumsaktiviteter, gruppaktiviteter, aktiviteter i par samt enskilt arbete. Observationerna är till största delen genomförda av mig som enbart observatör men i vissa fall har elever eller lärare ställt frågor till mig under observationerna och i sådana fall har jag besvarat frågorna (jfr. Aspers, 2007, s. 114; Cohen m.fl., 2000, s. 310). Intervjuerna har varit halvstrukturerade vilket innebär att frågornas form och ordningsföljd ibland har förändras under intervjun samt att berättelser från de intervjuade har följts upp och vidareutvecklats (Kvale 1997, s. 117).

Nedan följer en redovisning av antalet intervjuer och observationer som genomförts med respektive grupp av deltagare: elever, föräldrar, lärare och rektorer. Av tabell 2 nedan framgår även antal intervjuer och observationer för respektive elev (för en total bild av studiens genomförande och tidsperioder för aktiviteterna se tabell 3).

Elevens namn	Intervjuer och matem. diskussioner med elever	Klassrums-observationer	Intervjuer föräldrar fysiska	Intervjuer föräldrar via e-post	Intervjuer lärare fysiska	Intervjuer lärare via e-post	Intervjuer rektorer fysiska
Johan	8	7	5	3	6	2	1
Sara	7	10	5	5	7	5	1
Axel	8	5	3	3	5	5	1
Hampus	5	5	4	4	2	-	1
David	3	4	1	2	2	4	1
Ellen	3	4	-	-	1	-	-
Erica	4	4	1	7	4	5	-
Sixten	1	-	1	8	1	1	-
Erik och Gustav	1	-	1	3	-	-	-
Tor	2	-	1	2	2	2	-
Totalt	42	39	22	37	30	24	5

Tabell 2. *Antal träffar för respektive elev och individkategori*

I samtliga fallstudier, totalt tio, har enskilda intervjuer och matematiska diskussioner med eleverna genomförts vid minst ett tillfälle. Totalt har 42 enskilda intervjuer och matematiska diskussioner förts med fallstudieeleverna. Intervjuerna har genomförts på skiftande sätt beroende på elevens ålder, vilken gång i ordningen som intervjun sker samt vilket tidsutrymme som finns (Cohen, Manion & Morrison, 2000, s. 267; Krutetskii, 1976; Kvale, 1997; Merriam, 1994, s. 86). Avsikten med intervjuerna har varit att skapa en bild av elevernas aktuella studiesituation samt genom de matematiska diskussionerna upptäcka elevernas matematiska förmågor och studera hur eleverna uttrycker förmågorna samt studera möjligheterna att utmana och stimulera dessa. Dokumentation av dessa tillfällen har skett dels med stöd av diktafon för den muntliga kommunikationen dels genom anteckningar av elevens kroppsliga uttryck och rörelser. Elevens anteckningar och skriftliga beräkningar under arbetet med de matematiska problemen har samlats in. Allt material har transkriberats och renskrivits som förberedelse för analys.

I fallstudier med sju av eleverna: Johan, Sara, Axel, Hampus, David, Erica och Ellen har det i varje studie ingått minst tre klassrumsobservationer. Totalt har 39 observationer genomförts i dessa elevers klasser. I samtliga fall har matematiklektioner studerats men i vissa fall har även observationer av andra lektioner samt av kortare raster och lunchraster genomförts i syfte att studera elevernas agerande i övriga ämnen samt sociala relationer. Ambitionen vid observationerna har varit att min närvaro inte skulle påverka vare sig planeringen av undervisningen eller genomförandet. Detta informerade jag lärarna om i god tid före mitt besök. Det är också en anledning till att videodokumentation inte använts vid fallstudierna utan endast i det inledande pilotprojektet, som beskrivs närmare nedan (Merriam, 1994, s. 110). Vid övrig klassrumsobservation, förutom vid pilotprojektet, har ljudupptagningar via diktafon samt fältanteckningar utgjort underlag för analysen. Vid klassrumsobservationer har fokus varit den gemensamma kommunikation som förekommit i klassrummet och kommunikation som förekommit mellan lärare och fallstudieelev. Diktafonen har då varit centralt placerad mellan lärare och fallstudieelev. Fältanteckningar har kompletterat ljudupptagningen där denna i vissa fall varit otydlig (Merriam, 1994, s. 110). Genom fältanteckningar har jag även haft möjlighet att dokumentera kroppsliga uttryck och rörelser samt klassrummets utformning och utrustning. Vid de tillfällen läraren delat in eleverna i grupper i klassrummet har jag följt kommunikationen och arbetet i fallstudieelevens grupp. Likaså har jag fokuserat fallstudieelevens arbete och eventuella kommunikation med lärare eller elever då undervisningen bestått av arbete i läromedel eller annat enskilt arbete.

I samtliga fallstudier, förutom avseende Ellen, har träffar och intervjuer gjorts med elevernas föräldrar. Fallstudien med Ellen, som var initierad av Ellens lärare, omfattar klassrumsobservationer samt enskilda samtal och matematiska diskussioner mellan mig och Ellen och mellan mig och hennes lärare. I övriga fallstudier har, som nämnts, minst en fysisk träff och intervju med föräldrarna gjorts och dessa har oftast kompletterats med intervjuer och redogörelser via e-post och telefonsamtal med föräldrarna. Föräldrarna har i intervjuer haft möjlighet att beskriva sina barn från tidig ålder, genom skoltiden samt i deras aktuella situation. Intervjuer via e-post har gjort det möjligt att följa eleverna kontinuerligt under hela tidsperioden. Totalt har 22 fysiska träffar och intervjuer med föräldrar genomförts och därutöver totalt 37 intervjuer, uppföljande samtal och beskrivningar av barnets utveckling och studiesituation via e-post från föräldrar (eller eleven själv). Därutöver har annan brevväxling genomförts. Den totala brevväxlingen för respektive elev redovisas i tabell 3.

I samtliga fallstudier, förutom studien där tvillingparet Gustav och Erik ingår, har fysiska träffar och intervjuer hållits med elevernas lärare vid minst ett tillfälle. I studien med Gustav och Erik, som initierades av föräldrarna, har enbart intervjuer och matematiska diskussioner med eleverna och deras föräldrar genomförts. Tillfälle har inte givits till observationer och/eller till intervjuer med elevernas lärare, främst orsakat av tidbegränsning då eleverna kom in sent i studien och det geografiska avståndet inte medgav fler resor. Kontinuerlig uppdatering från föräldrarna har dock möjliggjort att deras situation i skolan och deras matematiska utveckling översiktligt har kunnat följas. Totalt har 30 fysiska träffar och intervjuer genomförts med lärare och speciallärare till de övriga nio fallstudieeleverna. Dessutom har 24 intervjuer eller skriftliga kontakter skett då lärarna beskrivit eleverna eller uppdaterat information om deras studiesituation via e-post.

I hälften av fallstudierna har fysiska träffar och intervjuer genomförts med rektorer eller skolledare vid den aktuella skolan.

För att dokumentera de fysiska intervjuerna med föräldrar, lärare och rektorer har ljudupptagning via diktafon använts i de flesta fall. Vid några tillfällen har istället anteckningar förts under intervjun. Detta har i förekommande fall orsakats av tekniska missöden med diktafonen eller då situationen inte lämpat sig för ljudupptagning (Kvale, 1997, s. 147; Merriam, 1994, s. 96).

För att få en inblick i hur matematikundervisningen genomförs i svenska klassrum och hur lärare upplever att de bemöter och stimulerar elever med intresse och fallenhet för matematik har en enkätstudie bland grundskolelärare genomförts. Studien genomfördes i tre kommuner med totalt 180 lärare under hösten 2005 och våren 2006. Genomförandet beskrivs mer detaljerat nedan. Därefter har ytterligare en enkätstudie genomförts. Syftet med denna studie, där totalt 284 matematikutvecklare från 229 av Sveriges kommuner deltog, var att få information om huruvida det i vårt land finns handlingsplaner för att bemöta elever med intresse och fallenhet för matematik. Även denna studies genomförande beskrivs nedan.

Totalt har studien genererat 1800 sidor utskriven text, varav fallstudierna och pilotprojektet står för ca 700 sidor och enkätstudierna för ca 1100 sidor

Urval

I stort sett all empiri har transkriberats och renskrivits direkt efter genomförd observation eller intervju. Vissa episoder från klassrumsobservationer, där eleverna arbetat enskilt i läromedel och kommunikationen varit knapp, har enbart lyssnats av. Fältanteckningar som kompletterat ljudupptagningarna har jämförts med det transkriberade materialet som i vissa fall kompletterats där ljudupptagningarna varit otydliga. Övriga anteckningar om t.ex. elevers och lärares ansiktsuttryck och kroppsrörelser samt beskrivningar av miljön i klassrum, grupprum eller övrig miljö ingår också i den slutliga dokumentationen. Genomgång och viss analys av materialet har genomförts efterhand i syfte att ge stöd för ställningstaganden till fortsatta empiriska studier eller ytterligare intervjuer med de medverkande individerna (Merriam, 1994, s. 136). Materialet har slutligen sorterats utifrån relevans för studiens syfte och forskningsfrågor och en begränsad del av materialet har analyserats med hjälp av de ovan angivna teoretiska verktygen. Urval har även gjorts av data från fallstudieeleverna som valts ut för närmare analys. För de elever som jag valt att presentera närmare: Johan, Sara, Axel och Erica, har i stort sett all dokumentation med relevans för forskningsfrågorna analyserats. För övriga elever har endast delar av det transkriberade materialet närmare analyserats, där klassrumsobservationer prioriterats framför enskilda intervjuer. Enkäterna har renskrivits, sammanställts och viss komplettering har skett genom ytterligare kontakt med ett urval av deltagarna (se bilaga 5). Därefter har svaren grupperats dels utifrån de svarandes kategoritillhörighet: lärarkategori, yrkeserfarenhet, region i Sverige, och kommun dels med hänsyn till svarens innehåll. Resultatet har därefter analyserats och jämförts med tidigare gjorda studier, nationella och internationella.

I pilotprojektet, som beskrivs i detalj nedan, var syftet att erbjuda en matematisk aktivitet som skulle ge eleverna möjlighet att uttrycka matematiska förmågor. Här fanns även en förhoppning om att finna elever med intresse och fallenhet för matematik som jag kunde gå vidare med i fortsatta studier. Pilotprojektet resulterade i ett val av två elever som jag sedan följt i en longitudinell studie. I drygt fem år har jag följt eleverna genom deras senare år i grundskolan och genom gymnasiestudierna. Utöver dessa två fallstudier har ytterligare åtta fallstudier genomförts med yngre elever, studier som beskrivs mer detaljerat nedan.

Efterhand som projektet ”Pedagogik för elever med förmåga och fallenhet för matematik” (se www.giftedmath.se) vid Linnéuniversitetet etablerats och information om projektet spridits har förfrågningar och ”rop på hjälp” från föräldrar och lärare kontinuerligt kommit oss till del. Vi har alltså inte behövt leta efter fler elever med intresse och fallenhet för matematik eller elever i behov av stöd och stimulans för sina förmågor. Däremot har det varit nödvändigt att göra ett urval av empiri då betydligt fler brev och förfrågningar från lärare och föräldrar kommit än vad vi kunnat behandla på ett etiskt försvarbart sätt. Beslut om att inte inkludera vissa data och framförallt beslut om att inte ta med vissa elever har varit svåra att fatta men nödvändiga med tanke på omfattningen av datamaterialet. Därtill har även individer i vuxen ålder, som själva känt igen sig i beskrivningar av fallstudieeleverna som presenterades i den licentiatavhandling (Pettersson, 2008) som föregick avhandlingen, hört av sig och känt behov av att diskutera och lämna information om sin situation. I början gjordes intervjuer och besök hos alla de elever där föräldrar eller lärare hört av sig och som också var villiga att träffa mig. Ganska snart ersattes dessa omedelbara träffar av en längre periods kontakter via e-post eller telefon innan eventuellt besök gjordes. Det viktigaste urvalskriteriet har varit elevernas fallenhet för och förmågor i matematik, där både föräldrars och lärares beskrivningar av barnen samt mina egna intervjuer och diskussioner vid ett eventuellt möte legat till grund för beslut om fortsättning. Hänsyn har även tagits till barnens kön och ålder för att få en viss spridning i materialet samt till barnens geografiska placering då en viss begränsning i restid varit önskvärd.

Analys

Studien som presenteras här är en kvalitativ studie med fokus på elevers matematiska förmågor och de möjligheter eleverna har att utveckla dessa förmågor i en social praktik. Den är upplagd som en fallstudie där data samlats i observationer av och intervjuer med elever i deras hemmiljö, skolmiljö eller i problemlösningsaktiviteter där jag själv interagerar med en eller flera elever. Materialet som samlats i dessa aktiviteter analyseras, som framgår av teoribakgrunden, ur två perspektiv: ett psykologiskt perspektiv med fokus på elevens förmågor (Krutetskii, 1976) och ett socialt perspektiv med fokus på de normer som bestämmer aktivitetens karaktär och hur dessa normer stöttar respektive hämmar elevens möjligheter att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor (Cobb & Yackel, 1996). Analysen inkluderar också mer övergripande aspekter av aktiviteterna som erbjuds eleven: hur de kan utformas och hur matematikundervisningen kan organiseras främst med hänsyn till elever med särskilda förmågor i ämnet. Den senare analysen är främst avsedd att ge en övergripande bild av elevernas skolsituation över tid, där varje fallstudie betraktas i sin helhet.

Tre typer av data har analyserats. Dels har *enskilda utsagor* analyserats givna i en begränsad situation t.ex. under en klassrumsaktivitet, i en gruppdiskussion, i ett samtal mellan lärare och elever, eller vid diskussioner mellan mig och en elev samt i intervjuer med föräldrar, lärare och elever. Varje enskild utsaga analyseras och en första tolkning görs av hur en eller flera matematiska förmågor uttrycks hos en elev. Dessa tentativa analyser behöver emellertid placeras i ett sammanhang, i en *sekvens av utsagor*, för att bestämmas till sin karaktär. Sekvenser av utsagor förekommer då eleven för en dialog med sig själv, med andra elever eller med en lärare eller observatör. I sådana längre utsnitt ur data finns även möjlighet att analysera hur sociala och/eller sociomatematiska normer hämmar alternativt stöttar utveckling av elevens förmågor. Längre tidsutsnitt studeras i *fallstudier* som avser att ge en helhetsbild av elevens skolsituation, där analysen bygger på flera separata sekvenser av utsagor enligt ovan.

Analys av matematiska förmågor

Nedan visas i exempel hur matematiska förmågor tentativt kan analyseras då en *enskild utsaga* står i fokus. Uppgiften, som löses av Axel (A) 8 år med mig (O) som observatör, är hämtad från Krutetskiis studie (1976, s. 196) men det konkreta innehållet (fåraherdar och får) har ändrats (till du/jag och enkronor) för att bättre passa dagens svenska elever. Det matematiska innehållet är emellertid detsamma.

Du och jag har ett antal enkronor var och du ska ta reda på hur många vi har genom de påstående som jag säger. ”Om du ger mig 8 enkronor så har vi lika många.” ”Men om jag ger dig 8 enkronor så har du dubbelt så många som mig.”

A1 *Om jag ger dig åtta så har vi lika många. Mm*

Axel tänker tyst några sekunder.

A2 *Nej, det funkar inte. Nu förstår jag inte. Ska det vara samma tal som förut eller ska totalen hålla ihop till nästa gång?*

O *Det är två påståenden som båda gäller från ursprungsvärdena. Du och jag ett antal enkronor var. Om du ger mig 8 så har vi lika många. Om jag ger dig 8 från det vi hade från början så har du dubbelt så många som mig.*

A3 *OK, då tror jag att det är 24 och 8.*

O *Mm, du vet att det ska skilja 16. Men stämmer detta?*

A4 *Nej,* [skrattar] *det går ju inte. Det blir ju noll.*

O *Och dubbelt av noll är?*

A5 *Noll*

O *Men det var bra försök, du tänkte rätt för det första påståendet och du är på god väg.*

A6 *Mm*

Axel skriver sedan de två talen 48 och 32, studerar dessa och lägger sedan huvudet på bordet.

A7 *Nej, det blir inte rätt.*

Jag märker att Axel börjar bli trött. Det är sent på eftermiddagen och vi har arbetat drygt en timme. Jag erbjuder därför Axel att jag kan ge honom uppgiften skriftligt så att han får den med sig hem. Det blir protester.

A8 *Vänta nu, det behövs inte. Nej, det behövs inte!*

O *Du vill lösa den nu?*

A9 *Ja, jag vill!*

Nu följer ett intensivt arbete under ca 5 minuter (med avbrott för toalettbesök). Axel pratar högt för sig själv vilket han oftast gör när han löser problem. Jag väljer att inte avbryta honom i arbetet. Axels anteckningar under pågående arbete redovisas sist nedan.

A10 *Om det är 46 så blir det, nej det funkar inte, vi får ta ett ännu högre tal istället. Kanske det är det här då,* [skriver 66 och 50] *om du har 50 och jag har 66 enkronor. Då har vi 58, men ger du mig 8 så har du 42 och då får jag 74 men det blir för mycket. Men då har jag i alla fall ett system, att det är mellan… Det är mer än 48 och mindre än 66 och du har mer än 32 och mindre än 50. Aha, nu vet jag 50 plus 50 är hundra, om vi säger såhär då, om jag har 54 kanske och då ska du ha 16 mindre än mig, då har du 48 eller hur, nej, nej 38 menar jag, då har du 46 och det stämmer. Men det andra stämmer inte. Kanske 52 och 36…. Nej. Kanske 50 och 34, ger jag dig så har vi lika många men sen får jag ju 58, det är nära nu men jag har snart testat alla. Kanske 51 och då ska du ha 35. Då ger jag dig 8 och då har vi lika och sedan får jag 59 och då har du 27…*

O *Går det bra med udda tal?*

A11 *Nej, det gör det inte. Då är vi tillbaka på 54 men det gick ju inte. Jag måste bara på toa!*

Någon minuts uppehåll innan Axel kommer tillbaka.

A12 *54 och 38, det är faktiskt kul att räkna sådana här. Då är det lika och så ger du mig men då blir det inte, nej, det går ju inte. 55 då, och då blir det 39 och då får vi lika många men om du ger mig, då har du 31, nej, det funkade ju inte det heller, oh, ska det vara 56 då. 56 och då ska det vara 40.* [ca 8 sekunders tystnad]. *OK 56 och 40.*

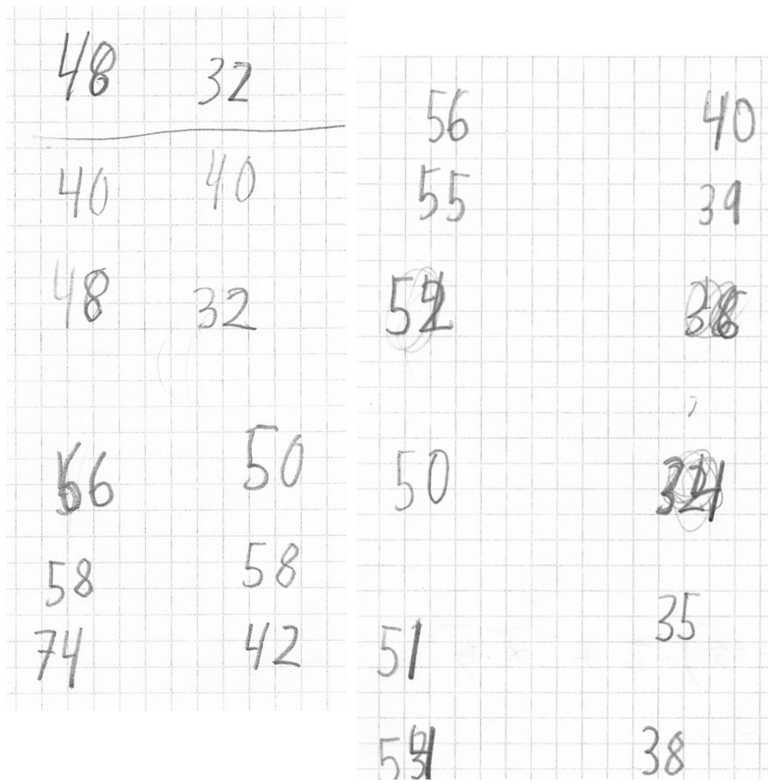
O *Varför det?*

A13 *Jo, för om det är 56 och då får ju jag 64 och du har 32. Jaaaaaaaa!*

O *Bra Axel. Du jobbade dig fram till det och du var envis och det bästa med det hela…*

A14 *Det bästa är att försöka och, så fick jag för högt och så tar man lågt och så förstår man att det är mittemellan.*

O *Perfekt.*



Alternativa lösningsförslag till stöd åt läsaren:

Uppgiften kan lösas på olika sätt. Nedan visas ett algebraiskt lösningsförfarande med två obekanta och ett ekvationssystem utgående från uppgiftens två påståenden och ett matematiskt resonemang som bygger på de båda påståendena.

Algebraisk lösning

Eva x kronor från början

Axel y kronor från början

Ekvation utgående från första påståendet $x+8=y-8 \leftrightarrow y-x=16$

Ekvation utgående från andra påståendet $2(x-8)=y+8 \leftrightarrow 2x-y=24$

Detta ekvationssystem kan lösas genom substitution av $y=x+16$ i $2x-y=24$ vilket ger ekvationen $2x-(x+16)=24 \leftrightarrow x=40$.

Insättning i $y - x = 16$ ger $y = 56$

Matematiskt resonemang

”Om du ger mig 8 enkronor så har vi lika många” innebär att skillnaden, från början, mellan dem är 16 kronor. ”Men om jag ger dig 8 enkronor så har du dubbelt så många som mig” innebär tillsammans med det första påståendet att den som från början hade 16 enkronor mer nu har 32 enkronor mer. Den som nu har 32 enkronor mer har, enligt andra påståendet, dubbelt så många enkronor som den andre. Slutsatsen är då att de efter andra påståendet har 64 och 32 enkronor och före bytet 56 och 40 enkronor (jfr. Krutetskii, 1976, s. 196).

Matematiska förmågor som framträder i Axels lösningsprocess

Axels andra utsaga (A2): ”*Nej, det funkar inte. Nu förstår jag inte, ska det vara samma tal som förut eller ska totalen hålla ihop till nästa gång.*” tolkar jag som ett uttryck för att han försöker hitta den formella strukturen i problemet innan han inleder själva lösningsförfarandet. Han är inte helt övertygad om relationen mellan kraven i mina påståenden, vilket visar att Axel arbetar med att se problemet som helhet samtidigt som han bearbetar delarna (analys och syntes). När han får klart för sig att påståendena kan tolkas oberoende av varandra, båda från ursprungsvärdena, kommer han omedelbart med ett förslag ”*OK, då tror jag att det är 24 och 8.*” (A3). Här är min analys att han ser sitt yttrande som ett förslag då han säger ”*tror jag*”. Han har nu insett att skillnaden mellan talen måste vara 16, men det är enligt honom ändå en snabb gissning. Han visar att han formaliserat uppgiften, att han har förmåga att se relationer och samband, vilket ingår i fasen, *insamling*, i Krutetskiis struktur av matematiska förmågor. Han inser dock direkt att detta inte kan vara det rätta svaret och blir lite generad när det blir uppenbart (A4, A5). Nu tar han fram papper och penna som jag lagt framför honom på bordet. Han sitter tyst och skriver och lägger sedan ner huvudet på bordet vilket jag tolkar som trötthet och erbjuder honom att vi ska avsluta och att han kan ta med sig uppgiften hem. Då vaknar Axel till liv och vill absolut slutföra uppgiften (A8, A9). Här visar han motivation, uthållighet (A10, A11), iver att behärska stoffet (A12) och en viss form av tävlingsinstinkt (A13, A14), egenskaper som ofta lyfts fram i litteratur om elever med fallenhet för matematik (Barger, 1998, s. 1-3 ; Krutetskii, 1976, s. 302; Käpnick & Fuchs, 2004, s. 334-335; Sheffield, 2003, s. 3-4). Nu följer en prövning av olika relationer: Axel konstruerar lösningar som uppfyller det första kravet och sedan prövar han dessa lösningar mot det andra kravet. Han begränsar dock prövandet då han relativt snart konstaterar att lösningen ska finnas i ett intervall ”*men då har jag i alla fall ett system, att det är mellan… Det är mer än 48 och mindre än 66 och du har mer än 32 och mindre än 50.*” (A10), vilket visar att han har förståelse för sitt eget resonemang. Axel visar i denna uppgift också förmåga till sekventiellt logiskt resonerande samt förmåga att operera med siffror då han i snabb takt adderar och subtraherar talen i de olika försöken.

Analys av sociala och sociomatematiska normer

I flertalet av de utsagor eller sekvenser av utsagor som förekommer i mitt material sker analyser av utsagan ur både ett individuellt och ett socialt perspektiv. Här har jag dock valt att visa analyser av individuella förmågor, som ovan, och sociala och sociomatematiska normer, som nedan, var för sig i utvalda exempel i syfte att tydligt visa analysförfarandet.

Exemplen nedan är hämtade från klassrumsobservationer. I det första exemplet avslutas lektionen med en aktivitet där läraren (L) uppmanar eleverna (E) att arbeta hemma med det som inte hinns med under lektionen.

L1 *Om vi skulle ta och skriva upp alla talen från 1 till 1000 och vi hjälps åt. Hur skulle vi kunna göra då?*

Det är tyst i klassen.

L2 *Om Nora får börja skriva från 1 till 100 vad ska du fortsätta med då Svante?*

E1 *200*

L3 *Nej, vad kommer efter 100?*

E2 *101*

Läraren delar ut papper med rutor där eleverna ska fylla i tal. Alla ska fylla i 100 tal.

L4 *Ni får börja nu och sedan tar ni med hem och fortsätter med det där. Glöm inte att skriva med fina siffror.*

Utsaga L4, som jag koncentrerar mig på här, kan tolkas som ett uttryck för en social norm i det att läraren anser att det är viktigt att eleverna lär sig vara noggranna och skriva tydligt. En social norm är generell för alla ämnen och områden och reglerar klassrumsinteraktionen mellan individer oberoende av vilket ämne som studeras (Cobb & Yackel, 1996, s. 177; Yackel & Cobb, 1996, s. 460). Utsagan kan även tolkas som en sociomatematisk norm i det att läraren är medveten om att det i ämnet matematik är viktigt att eleverna tidigt lär sig att vara noggranna och skriva tydligt för att i framtiden kunna genomföra svårare och mer komplexa uträkningar där prydlighet är väsentlig för att förstå sina egna och andras lösningar. Med stöd av flera utsagor, längre sekvenser av utsagor vid olika observationstillfällen kompletterat med intervjuer kan det vara möjligt att avgöra normernas art, sociala eller sociomatematiska, och vilken påverkan dessa har på elevernas utveckling av matematiska förmågor. I fallet ovan, som vi återkommer till i fallstudien med

Axel och Erica, tolkas utsagan från läraren främst som ett uttryck för en social norm då läraren i olika situationer visar att prydlighet snarare är generellt viktig för henne än viktig just i matematikundervisningen.

I nästa exempel citeras lärarens (L) avslutande utsaga efter en sekvens där eleverna och läraren redovisat och diskuterat olika förslag till lösningar av ett problem.

L *Det är detta jag tycker är lite roligt, att man kan lösa en uppgift på olika sätt och ändå komma fram till samma svar.*

Utsagan ovan, vilken även ingår i en längre sekvens av utsagor i fallstudien med Axel och Erica, kan i likhet med utsagan ”*Glöm inte att skriva med fina siffror*” tolkas både som ett uttryck för en generell social norm och en sociomatematisk norm. Läraren kan generellt tycka att det är intressant att elever tänker olika och framför olika åsikter om och lösningar av problem. Men att visa elever att en mångfald lösningsförslag och annorlunda lösningar till ett matematiskt problem är något positivt är en uttalad sociomatematisk norm som främjar elevers utveckling av matematisk förmåga (Cobb & Yackel, 1996, s. 178-179; Yackel & Cobb, s. 461).

Presentation

Även bland de fallstudier som ingått i studien har ett urval varit nödvändigt vid presentationen av studiens genomförande och resultat. Fyra av de totalt tio fallstudierna presenteras mer detaljerat i kapitlen *Fallstudie med Johan och Sara* samt *Fallstudie med Axel och Erica*. Detta urval har varit nödvändigt för att kunna ge en djupare bild och karaktäristik av eleverna och deras sociala situation, deras matematiska utveckling och det bemötande de fått och får i skolan. Valet av Johan och Sara var naturligt då eleverna följts under lång tid; de ingick båda i licentiatavhandlingen och en uppföljning av deras olika val av gymnasieutbildningar kunde potentiellt leda till olika utveckling av deras matematiska förmågor. Dessutom är Johan och Sara de enda eleverna i studien som inte kommit till min kännedom via föräldrar och lärare. Bland de överväganden jag gjort vid valet av Axel och Erica finns genusaspekten och den geografiska placeringen. Axel är den av mina yngre fallstudieelever som jag följt under längst tid och han kommer från en mindre stad i södra Sverige. Erica är tillsammans med Ellen de enda flickorna i denna åldersgrupp och Erica kommer till skillnad från Ellen från en storstad. I redovisningen ges först en bakgrund och beskrivning av elevernas uppväxt och tidigare skolgång. Därefter följer utdrag ur empiriska studier med eleverna i olika pedagogiska miljöer. För övriga fallstudier ges en kortare presentation av fallstudieeleverna och deras situation i *Studiens genomförande* nedan. Återkopplingar till valda situationer i de empiriska observationerna med dessa elever kompletterar analyserna av Axels och Ericas resultat och diskuteras i slutdiskussionen där jag även återvänder till elevernas karaktär och skolsituation.

Enkätstudierna presenteras och analyseras i kapitlet *Resultat av enkätstudier*. Här presenteras valda delar av den första enkätens resultat med vidare hänvisning till min licentiatavhandling (Pettersson, 2008) medan den andra enkätstudien presenteras och analyseras i sin helhet.

Dialoger dokumenterade vid klassrumsobservationer, gruppövningar eller matematiska diskussioner är alla presenterade med kursiv stil. Citat av elevers, lärares och föräldrars utsagor i texten eller som blockcitat är kursiverade och markerade med citationstecken. Övriga citat, hämtade från exempelvis forskningsartiklar och rapporter är i texten markerade med citationstecken och vid blockcitat med indragen text. Begreppsförklaringar eller definitioner är i löpande text markerade med kursiv stil. Fallstudieeleverna har själva fått välja vad de vill heta i studien och presenteras genomgående med detta namn. Lärare, speciallärare, mentorer och föräldrar presenteras med sin titel eller roll. Då ett avsnitt eller stycke innehåller flera lärare presenteras de som Lärare 1 och Lärare 2 med tydlig beskrivning av deras roll i förhållande till fallstudieeleven. Vissa dialoger presenteras inte i sin helhet utan en begränsad episod har valts ut för analys och presentation. För att visa att dialogen pågått före eller fortsätter efter den presenterade episoden används markeringen […].

Studiens genomförande

Studien som presenteras här är longitudinell med fokus på elever med särskilda förmågor i matematik. I studien ingår ett pilotprojekt, tio fallstudier samt två enkätstudier, en riktad till lärare i grundskolan och en riktad till matematikutvecklare i Sveriges kommuner. De första empiriska studierna genomfördes våren 2005 och har därefter pågått kontinuerligt fram till hösten 2010. En bakgrund och överblick över de empiriska studiernas omfattning och tidsperiod beskrivs i nedanstående tabell. Observationsperioden anges på en tidsaxel med pilar för varje enskild fallstudie. För varje individ anges namn och åldersintervall under vilket studien pågått. Här anges vidare omfattningen dels i antal fysiska träffar, i vilka ingår både observationer och intervjuer med eleven, lärare, föräldrar och rektorer dels i brevväxling i form av e-post med berörda individer. Här anges dels total brevväxling dels, inom parentes, de intervjuer och beskrivningar som tidigare nämnts i metodavsnittet. Slutligen presenteras de olika empiriska delarna: pilotstudien, fallstudierna och enkätstudierna.

Empiri	Tidsaxel 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011	Antal fysiska träffar	Antal brev-växling
Pilotprojekt		17	5
Fallstudier		138	129 (61)
Johan (15-19 år)		27	8 (5)
Sara (15-19 år)		30	36 (10)
Axel (6-10 år)		22	43 (8)
Hampus (8-10 år)		17	23 (4)
David (9-11 år)		11	32 (6)
Ellen (8-9 år)		8	5 (0)
Erica (9-11 år)		13	45 (12)
Sixten (8-9 år)		3	23 (9)
Erik och Gustav (6-7 år)		2	6 (3)
Tor (15-16 år)		5	8 (4)
Enkätstudie 1		3	-
Enkätstudie 2		5	23

Tabell 3. Studiens empiri.

Pilotprojekt

Våren 2005 deltog jag i en forskarutbildningskurs i matematik inom området abstrakt algebra i vilken ingick en didaktisk specialisering. I den didaktiska delen genomfördes ett projekt vilket även utgjorde pilotprojekt för den licentiatstudie som jag lade fram 2008 (Pettersson, 2008). Projektet genomfördes i form av en interventionsstudie där jag fick möjlighet att besöka en skola i södra Sverige under tre veckor (se bilaga 1). Skolan, en friskola med förskoleklass samt en klass i varje årskurs till årskurs åtta, lät mig överta två längre och ett kortare lektionspass i varje klass från årskurs fyra till årskurs åtta. I dessa lektionspass presenterade jag ett innehåll från abstrakt algebra, kryptering, där eleverna också ombads ta aktiv del i form av en laborativ övning. Syftet med pilotprojektet var att undersöka om det med detta erbjudande av ett matematiskt område, som normalt inte finns inom ramen för skolmatematik, fanns möjlighet att upptäcka och stimulera elever med fallenhet för matematik.

Valet av just denna skola var ett bekvämlighetsurval då skolan geografiskt låg väl till, ett urval som kunde motiveras av att syftet var begränsat till ett studium av möjligheterna att upptäcka och beskriva matematiska förmågor. Syftet var alltså att specificera snarare än generalisera de villkor som gäller för att upptäcka och beskriva matematiska förmågor hos elever.

Innan projektet inleddes fick jag möjlighet att träffa samtliga inblandade lärare, presentera uppläggningen för dem och även be dem svara på en enkät (se bilaga 2). Enkäten innehöll frågor om lärarnas upplevelser av matematik, hur deras undervisning såg ut samt hur de stimulerade elever med särskilda förmågor och fallenhet för matematik. Denna enkätundersökning blev en förstudie till den enkätstudie (se bilaga 3), som jag senare genomförde med 180 lärare i södra Sverige.

Första tillfället

Pilotstudiens matematiska innehåll var, som nämnts ovan, kryptering och första tillfället med eleverna inleddes med en historisk beskrivning av området, dess praktiska användning och historiska utveckling. Denna presentation varierades något beroende på i vilken årskurs jag befann mig. Beskrivningen innehöll även benämningen ”hemligt språk” för att med vardagsnära ord beskriva innebörden i mitt budskap.

Efter denna korta inledning, om ca 10-15 minuter, startade själva övningen, en laborativ övning i matematik. Klasserna delades in i grupper om fyra elever som fick i uppgift att skapa ett hemligt språk, ett krypterat språk, som de själva inom gruppen skulle kunna kommunicera med men som skulle vara svårt för utomstående att tyda, det vill säga dekryptera. Grupperna fick 45 minuter på sig att arbeta med uppgiften medan jag var där som stöd för att svara på frågor. Jag valde att videofilma grupper i år 4 och 7. Videodokumentationen föregicks av en förfrågan till lärare, föräldrar och elever i de aktuella klasserna om deras villighet att delta i studien (se bilaga 1). Samtliga lärare, föräldrar och elever lämnade sitt medgivande till videofilmningen. I övrigt fanns ingen förhandsinformation om eleverna på skolan.

Uppgiften att skapa ett hemligt språk mottogs på ett mycket positivt sätt och det var hög aktivitet, mycket diskussioner och en del frågor till mig under elevernas första arbetstillfälle. Eleverna fick efter denna första introduktion ytterligare två dagar på sig att fundera över och diskutera sitt hemliga språk till dess att jag kom tillbaka för ett nytt besök.

Andra tillfället

Vid ett andra tillfälle skulle möjlighet ges för grupperna att testa de hemliga språken. Grupperna fick, av mig, varsin mening, olika meningar för olika grupper, som de skulle kryptera med sitt eget hemliga språk. Därefter skulle de även skriva sina namn, på baksidan av pappret, krypterade med samma språk. Detta skulle fungera som en ledtråd för den mottagande gruppen vid dekryptering av meningen. Gruppernas krypterade meningar samlades in, blandades väl och delades återigen ut till grupperna. Eleverna visste då inte från vilken grupp meddelandet kom men de visste vilka elever som varit aktiva i de olika grupperna. Nu gällde det först och främst att klura ut vad som stod i meddelandet och till sin hjälp hade de gruppmedlemmarnas namn på baksidan. Som en extra övning skulle de avslöja den andra gruppens krypteringsmetod.

Mellan första och andra tillfället hade jag möjlighet att studera de inspelade videofilmerna och bestämde mig för att vid detta andra tillfälle följa de grupper vars arbete jag tidigare dokumenterat på video, detta för att jag redan i de första filmerna hittat intressanta elever som jag ville se mer av. Jag fick också information, både från lärare och från elever, att det varit hög aktivitet mellan de båda tillfällena. Lärarna uttryckte att andra ämnen och aktiviteter fått stå tillbaka för elevernas engagemang i krypteringsövningen. Detta var dock inget som jag upplevde att de uppfattat som något negativt.

Tredje tillfället

Vid det tredje tillfället summerade vi vad vi tidigare gjort, eleverna fick ställa frågor och vi tog upp och diskuterade de olika varianter av kryptering som grupperna skapat och arbetat med under veckorna. Jag avslutade med att ta upp ytterligare krypteringsmetoder och även här varierade innehållet mellan de olika årskurserna. I årskurserna med äldre elever kom vi bland annat in på primtalsräkning.

När krypteringsprojektet avslutats studerade jag filminspelningarna av de grupper som jag valt ut. Jag fann här en av mina fallstudieelever, Johan, som jag redan efter första inspelningen blivit intresserad av.

Fallstudierna

Johan är en av de elever jag följt i intervjuer och observationer. Totalt har tio fallstudier genomförts, med totalt elva fallstudieelever, däribland ett tvillingpar. Fallstudierna skiftar i omfattning, tidsperiod och kontakt med lärare och föräldrar, vilket framgår av tabellen ovan. Två av fallstudieeleverna träffade jag i samband med ovan beskrivna pilotprojekt inom kryptering. Dessa två elever, *Johan* och *Sara* har jag sedan följt under deras senare del av grundskolan samt gymnasiet. Av de åtta fallstudierna med yngre elever har kontakt med mig tagit av föräldrar i fyra av fallen och av lärare i fyra av fallen. Lärare till *Axel*, *David*, *Ellen* och *Tor* hade alla via tidningar, webben eller i fortbildningsaktiviteter fått information om den forskning som bedrivs inom området. Även föräldrarna till *Hampus*, *Erica*, *Sixten* samt *Gustav* och *Erik* hade på olika sätt kommit i kontakt med information om forskningen via tidningar eller webb. Fyra av de totalt tio fallstudierna har här valts ut för en detaljerad presentation där analyser av elevernas arbete med matematiska aktiviteter i klassrummet, i olika gruppövningar samt i enskilda samtal med mig analyseras och diskuteras. Beskrivningarna omfattar även elevernas personliga egenskaper och sociala situation där intervjuer med elever, föräldrar och lärare ligger till grund för analyser och diskussioner. Slutligen beskrivs och analyseras elevernas skolsituation där lärares och skolledningars bemötande fokuseras. Dessa analyser bygger på klassrumsobservationer samt intervjuer med lärare och rektorer. De fyra utvalda fallstudierna presenteras i två kapitel nedan, *Fallstudier av Johan och Sara* samt *Fallstudier av Axel och Erica*. Övriga sex fallstudier presenteras kortfattat och främst med fokus på elevernas karaktäristik och skolsituation från tidig ålder och genom fallstudien då ett större underlag och en bredare bild var nödvändig för den avslutande diskussionen.

Johan, Sara, Axel och Erica

Fyra elever har, som nämnts ovan, valts ut för en detaljerad presentation. Presentationen beskrivs i två kapitel nedan, *Fallstudier med Johan och Sara* samt *Fallstudier med Axel och Erica*.

Hampus

Hampus var 8 år när jag träffade honom första gången. Det var Hampus pappa som skickade ett brev till mig där han berättade om sin son som han upplevde hade fallenhet för matematik. I pappans brev fanns också en oro ”*problemet vi upplever är det bristande stödet i skolan från lärare som inte vet hur de ska tackla detta*”. Hampus är äldsta barnet och har en lillebror som är tre år yngre. Både föräldrar och morföräldrar är välutbildade, pappa är ingenjör, mamma är utbildad inom kemi och båda morföräldrarna är lärare. Föräldrarna berättar att Hampus alltid uppmuntrats i sitt lärande av sin närmaste omgivning och stimulerats att ta för sig av nya saker. Redan som treåring lärde sig Hampus alfabetet utantill och pappa påpekar att de som föräldrar aldrig tryckt på utan att det är Hampus som hela tiden själv varit drivande och som tyckt om att lära. Även om bokstäver och läsning intresserade Hampus visade det sig ganska snart att han hade en fallenhet för siffror och att operera med dessa. I femårsåldern behärskade han addition, subtraktion och multiplikation.

Pappa berättar om ett tillfälle vid middagsbordet hemma hos familjen då samtalet förde dem in på multiplikation och Hampus undrade ”*Vad är det?*”. Pappa tog ett exempel, två gånger två, och förklarade ”*Tänk dig att du har två äpplen och har det två gånger, hur mycket är det?*”. ”*4*” svarade Hampus och pappa fortsatte med ”*Men vad är då 3 gånger 3*” och lika snabbt kom svaret ”*9*” från Hampus. Föräldrarna fortsatte med högre tal och det visade sig att Hampus efter denna korta förklaring från pappa klarade även dessa högre tal och han hade, enligt pappa, en förståelse för vad multiplikation innebar. Pappa berättar vidare att de allt eftersom Hampus blev äldre förstod att han hade sitt eget angreppssätt och sina egna metoder att utföra räkneoperationer och lösa problem. Detta har även visat sig i de observationer och matematiska intervjuer som genomförts i denna studie. Hampus är lugn och metodisk och bryter gärna ner problemet i mindre delar men har samtidigt förmågan att se helheten.

När jag träffade Hampus och hans pappa första gången gick Hampus i årskurs ett och pappa berättade om en pojke som tröttnat på skolan. Hans tid i förskolan och i skolan har, enligt pappa, präglats av för få utmaningar för att Hampus ska ”*få ro att göra något*”. Enligt pappa blir Hampus lätt uttråkad när han redan behärskar sådant som presenteras i skolan och ”*detta har ofta tagit sig uttryck i att han upplevs som störig i skolmiljön*”. Föräldrarna menar vidare att skolan inte tagit föräldrarna på allvar när de berättat om Hampus och försökt påpeka att han behöver mer stimulans. ”*Våra tankar om att Hampus måste få svårare saker att göra tas inte emot med öppna armar vilket får till följd att den enda kommentaren vi fått från Hampus om hur det är i skolan är – ”Tråkigt*”.

Hampus har några kamrater som han leker med i skolan medan det hemma framförallt är en kamrat som han umgås med. Pappa berättar att Hampus ”*kan vara mycket pådrivande och har bestämda åsikter om hur saker ska genomföras och att det funnits tillfällen då andra barn har tröttnat för att de inte förstått vad han tänkt eller velat göra*”. På rasterna är Hampus gärna i skogen och bygger kojor men är, enligt pappa, inte den som springer till fotbollsplanen först. Han har provat på en del idrotter men har inte riktigt fastnat för någon, framförallt inte för någon lagsport. Föräldrarna berättar att Hampus har ett stort sömnbehov och att hans humör hänger ihop med hur mycket han sover. Föräldrarna försöker därför minska ner lite på fritidsaktiviteterna och de har märkt att Hampus mår bättre om han får mer tid för lugn och ro hemma efter skolan. Hampus har inte utmärkt sig som ett frågvist barn, inte överaktiv eller särskilt initiativtagande utan mer en pojke som trivs med stillhet och möjlighet att pyssla med saker på egen hand. När något kommer upp till diskussion är han dock alltid intresserad och föräldrarna menar att han har en otrolig förmåga att suga upp saker och behålla dem i minnet.

I studien har jag följt Hampus både i klassrumsobservationer och enskilda intervjuer med fokus på matematik. Han har under studiens gång inte fått något extra stöd från skolan mer än extra böcker att arbeta i. I årskurs två fick han en ny lärare som han trivdes mycket bra med, som såg Hampus styrkor och utmanade honom på ett sätt som inte gjorts tidigare. Hampus svar på frågan vad han tyckte om skolan var nu annorlunda om än fortfarande mycket kort: ”*Bra*”.

David

David är 9 år första gången vi träffas. Han är äldsta barnet och har en lillebror som är tre år yngre. David växte upp på landet och familjen var, enligt mamma, ganska isolerad då mamma saknade körkort. David umgicks därför mest med sina föräldrar och mormor. Båda föräldrarna är pedagoger och pappa arbetar som matematiklärare på högstadiet. David är en försiktig pojke som, enligt föräldrarna, alltid tyckt bäst om stillsamma aktiviteter som exempelvis att lägga pärlplattor, pussla och andra finmotoriska övningar. Han har alltid haft lätt för att lära sig saker och hade ett välutvecklat tal redan i 1 ½ årsåldern. I denna ålder kunde han namnen på alla färger och räknade ut summan av olika tal. Det sistnämnda var inget utmärkande intresse i denna ålder, fascinationen över bokstäver var betydligt större. I tvåårsåldern kunde han alla bokstäver och läste gärna upp dem när han såg dem. Mamma berättar att han i treårsåldern visade intresse för att läsa och med visst stöd från föräldrarna läste han flytande när han fyllde fyra. Ett annat tidigt och starkt intresse för David är musik. Han lyssnar mycket på skivor och detta gjorde han även som mycket ung och han spelar själv blockflöjt och trombon. Han tycker däremot inte om när det blir för mycket liv och för hög volym omkring honom, då drar han sig undan. David är, enligt föräldrar och lärare, en förståndig pojke som ofta får utstå mobbing från klasskamrater då han förklarar för dem hur saker ska gå till, hur man inte får göra och att det finns regler man måste följa.

Davids lärare i årskurs två var den som tog kontakt med mig. Hon berättar om en pojke som under åren i förskoleklass ”*ofta blev kallad professorn och liknande vilket gjorde honom ledsen och fick honom att vantrivas*”. David valde tillsammans med sina föräldrar att börja förskoleklass ett år tidigare än vanligt. Detta fungerade inte, vilket inte, enligt föräldrarna, berodde på att hans kunskaper var otillräckliga. Han var så långt före sina kamrater att det var svårt att få hans övriga sociala situation att fungera. Han var, som föräldrarna uttrycker det, ”*förståndig och lillgammal och passade inte ihop med några av de andra barnen*”. Under raster och fritid satt han mest och läste och, enligt föräldrarna, påstod lärarna att David själv valde detta. Men mamma tror inte att han fick vara med och hon menar vidare att lärarna inte gjorde något för att underlätta situationen då de från början var emot Davids tidiga skolstart. De menade att han inte var socialt mogen att börja skolan. David gick om förskoleklass vilket, enligt föräldrarna, gick bättre mest beroende på att han då mötte andra lärare som hade en helt annan förståelse för Davids personlighet och kunskaper.

Davids lärare i årskurs två, som tog kontakt med mig, håller med om att Davids kunskaper säkert räckt till för att börja i årskurs ett men menar samtidigt att det var ett bra beslut att låta honom gå om förskoleklassen då han ”*hade andra bitar han behövde arbeta med*”. Läraren menar vidare att Davids sociala situation nu är bättre även om problem fortfarande kan uppstå då David, som nu har ett bra självförtroende, ibland märks och hörs lite för mycket. Samtidigt får han, enligt läraren, ofta dåligt samvete för att han är ”*för duktig*” som han själv uttrycker det.

Av lärarens första brev till mig och i den brevväxling som därefter följde framgick att hon försökt utmana David genom exempelvis extra kluringar på lektionerna då övriga elever arbetade med läromedlet. David fick också en extra lärobok som var avsedd för årskurs tre i vilken han arbetade både i skolan och hemma. Hon berättade vidare att hon försökt stryka sidor med innehåll som hon visste att David behärskade. Av de intervjuer och diskussioner mellan mig och läraren som ingår i fallstudien framgår att hon har stora ambitioner för sin egen utveckling som lärare i matematik och även en vilja att ge David mer stöd och stimulans. I årskurs tre får hon också resurser av rektor att arbeta enskilt under en lektionstimme i veckan med David och Lucas, en annan pojke i klassen som också visat intresse för matematik och som dessutom blivit Davids närmsta vän. Läraren fortsätter att arbeta med David och Lucas under årskurs tre och alla är mycket nöjda. I årskurs fyra byter klassen traditionsenligt lärare men tanken är att stödet till David och Lucas, i form av en timme i veckan med extra utmaningar, ska fortsätta. Det är pojkarnas tidigare lärare som, på egen begäran, håller i dessa extra timmar. Hon får möjlighet att träffa David och Lucas tre gånger under höstterminen i årskurs fyra innan denna resurs, till lärarens besvikelse, omdisponeras till barn som inte nått målen för årskurs tre.

I en intervju med Davids föräldrar under våren i årskurs fyra får jag ändå beskedet att David trivs i skolan och är glad och tillfredsställd. Han får inga extra utmaningar eller resurser men arbetar parallellt med två böcker, dels klassens gemensamma bok dels en bok för årskurs fem. Dessutom berättar pappa att han, på Davids begäran låter honom arbeta i sjuans bok hemma. David får även göra olika diagnoser och prov hemma, allt på David initiativ, och pappa menar att David är väldigt ivrig men att de försöker begränsa tiden han sitter med böckerna hemma till 15 minuter om dagen. Sedan roar de sig med tävlingar i huvudräkning och att vara snabbast med att lösa Rubiks kub. Pappa avslutar med att säga att ”*Matten kanske inte ger honom så mycket i skolan, men han verkar tycka mycket annat är roligt som t.ex. att söka info på Google, att göra egna arbeten i geografi och så är han väldigt förtjust i engelska, ja han gillar allt där han får lära sig något nytt*”.

Ellen

Ellen är 8 år första gången vi träffas. Hon är yngsta barnet i en syskonskara på tre. Ellen är en sprallig och nyfiken flicka som har svårt att sitta still på lektionerna. Det var Ellens lärare i årskurs två som tog kontakt med mig då hon själv gick en fortbildningskurs i matematikdidaktik och där fick information om den forskning om elever med särskilda förmågor som bedrivs vid Växjö Universitet, numera Linnéuniversitetet. Hon berättade om en flicka som älskar matte när hon får lösa uppgifterna som hon själv vill och när uppgifterna är, som hon själv uttrycker det, ”*andra än de vanliga*”. De andra eleverna i klassen har myntat ett begrepp, *Ellen-matte*, vilket innebär att klassen löser uppgifter som inte finns i läromedlet. Det kan vara uppgifter som Ellen hittar på eller som läraren presenterar och där Ellen alltid är snabb med lösningar, oftast annorlunda lösningar än lärarens.

Matematikundervisningen i klassen är till största delen styrd av läromedlet och undersökande aktiviteter förekommer sparsamt. Under mina första observationstillfällen i klassen utmärker sig inte Ellen mer än att hon suckar då och då. Lektionerna består av enskilt arbete i läromedlet och eleverna i klassen har kommit olika långt och arbetar därmed med olika områden. Läraren presenterar mig som hennes lärare i fortbildningskursen i matematik och att jag är hos dem för att studera hur klassen arbetar. Eleverna känner till kursen som läraren går och berättar för mig att de på sista tiden fått göra andra saker än att räkna i boken, s.k. *Ellen-matte*. Det är många händer i luften och jag blir ganska snart en extra resurs i klassen och får hjälpa till på olika sätt. Ellen, som inte vet att hon är speciellt observerad, sitter ganska lugn men verkar ha tråkigt. Jag frågar Ellen och hennes bordskamrat vad de tycker om matematik. Ellen svarar ”*Det är både roligt och jobbigt, sånt här är roligt* [pekar på lästal och mönster i boken] *men annars är det lite jobbigt*”. Ellen får inga extra utmaningar vid sidan om de enskilda träffar som jag har med henne inom ramen för fallstudien, där hon har möjlighet att uttrycka sina förmågor i matematik. Hon trivs bra i skolan och har själv inte efterfrågat fler utmaningar. Hon tycker att det är roligare nu när läraren ”*har gått kurs*” så de får göra ”*andra saker än de jobbiga i boken*”.

Sixten

Sixten är 8 år när vi träffas. Det är Sixtens mamma som tar kontakt med mig och berättar om en pojke som redan i förskolan fick det jobbigt på grund av sina förmågor och udda intressen. Han blev utsatt för en hel del mobbning då ingen riktigt förstod honom. Mobbningen kom inte enbart från jämnåriga utan även från vuxna, främst i form av ignorering. Hans mamma uttrycker det på följande sätt ”*Under en period på ca 2-3 månader var han hund. Hela tiden. I efterhand kan jag tänka mig att det var ett sätt att slippa prata eftersom ingen ändå förstod vad han sa*”. Sixten hade för kort tungband vilket bidrog till ett sämre uttal. Detta korrigerades i 3-årsåldern, men det fanns även andra orsaker till att det var svårt att förstå honom. Mamman förklarar: ”*Det är svårt att vara kompis med någon som pratar i procent utan att ha riktigt grepp om det och som för det mesta kräver en millimeterrättvisa*”.

I årskurs 2, vid mitt första möte med Sixten, hade han full kontroll på procentbegreppet och hans sociala situation hade blivit något bättre. Men skolsituationen var desto jobbigare för honom. Undervisningen erbjöd få, om ens några, utmaningar för en elev som likt Sixten räknat sig igenom läroböckerna för årskursen. Matematikundervisningen i Sixtens klass bestod av arbete i olika böcker där alla elever måste göra ett avsnitt i varje bok innan de fick gå vidare. För att bli klar med alla moment måste eleverna även spela spel och delta i andra gemensamma aktiviteter där det gällde att hitta en kamrat som var på samma ställe i boken och som var redo och villig att spela spel tillsammans. Detta upplevde Sixten och hans föräldrar som ett problem. Likaså att det inte var tillåtet att hoppa över avsnitt även om eleven behärskade innehållet. Läraren säger i en intervju att hon ”*gärna vill ha kontroll på alla elever så att de verkligen har förstått alla moment*” men fortsätter med att säga att hon ”*naturligtvis ska beakta att Sixten kanske redan har förståelse för vissa områden*”. I samma andetag säger hon ”*att det finns saker som Sixten inte har full koll på, kanske inte just inom matematik, men inom andra områden*”.

Föräldrarna berättar att de blivit remitterade till olika psykologer och neurologer för att utreda eventuell autism eller Aspergers syndrom hos Sixten. Det var stödfröken i förskolan som tyckte ”*… att vi i alla fall skulle överväga ett dagis för utvecklingsstörda eller autistiska barn*”. Slutligen kom de till en psykolog som menade att ”*Här gör man ett problem av något som inte finns. Pojken är bara ovanligt begåvad!*”.

Sixten fick under slutet av årskurs två stöd av en äldre matematiklärare som under vårterminen fungerade som extra resurs, främst för elever med svårigheter, men han tog sig också an Sixten vid vissa tillfällen. Detta upplevde både Sixten och föräldrarna som ett stort stöd och en möjlighet för Sixten att få berikning i form av andra matematikaktiviteter. Tyvärr gick mentorn i pension då Sixten slutade årskurs två och därefter har skolan inte anställt någon ersättare och menar att det inte är prioriterat. Sixten och föräldrarna anser därför att de nu, i årskurs tre, är tillbaka igen vid utgångspunkten. De har själva fått ta itu med problemen och försöker nu hitta en privat mentor åt Sixten.

Gustav och Erik

Gustav och Erik är 6 år när vi träffas. Deras mamma tog kontakt med mig i ett brev där hon ropade på hjälp, ”*desperat förtvivlad mamma*” stod det i rubriken. Hon berättar om sina tvillingpojkar som är drygt sex år och som tidigt visade intresse för siffror, böcker o.s.v. Föräldrarna insåg, då pojkarna var i fyraårsåldern, att de inte kunde lämna dem på en vanlig svensk förskola.

De behövde helt annan stimulans. Då de hittills alltid haft varandra hade detta inte varit något problem men föräldrarna märkte att de hela tiden sökte nya utmaningar och att de hade ett enormt sug efter kunskap. Pojkarna läste i denna ålder flytande och behärskade addition och subtraktion. Både föräldrar, far- och morföräldrar är lärare men föräldrarna påpekar att de "*inte leker skola hemma utan saker faller sig naturligt när frågorna kommer och de kommer OAVBRUTET*".

I fyraårsåldern började Gustav och Erik i en brittisk skola där de efter sex veckor pratade engelska fullt förståeligt. Lärare på skolan uppmärksammade även pojkarna i matematik och menade att de var två till tre år före sin åldergrupp. Efter knappt ett läsår, i april, ansågs pojkarna tvåspråkiga och vid samma tidpunkt vände den lycka som pojkarna uttryckt om skolan under hösten "*Det är bättre än både Gröna Lund och Disneyland*" till en klagan att det var "*tråkigt och för enkelt*". Efter detta första introduktionsår började de i Year 1, vilket motsvarar svenska skolans årskurs ett till två. De var då fem år gamla och hela året var, enligt föräldrarna, en enda lång klagan på att de inte gjorde något nytt eller spännande. De fick under våren hämta ut sina läseböcker för Year 2 men lyckan var bara kortvarig då de snabbt hade läst ut dessa.

Föräldrarna anser inte att de fått något stöd från skolan utan mer tillrättavisning om att pojkarna måste kunna arbeta i grupp och ha förståelse för att alla barn inte kan lika mycket. Detta är, enligt föräldrarna, en svår situation då innehållet i grupparbeten och övrigt arbete oftast är av sådant slag att pojkarna behärskat det en längre tid. Deras frågor kretsar istället om hur den mekaniska klockan känner av när den ska byta datum och hur den vet om det är en månad med 30 eller 31 dagar. Rektor berättade vidare att de försökt ge pojkarna svårare uppgifter i matematik men att de inte ville arbeta med dessa. På mammans fråga om de får något stöd eller handledning i arbetet med dessa uppgifter blev svaret nej.

Tor

Tor är 15 år när vi träffas första gången. Det är Tors lärare i årskurs nio som tar kontakt med mig och berättar om en pojke som ligger långt före sina jämnåriga kamrater och har gjort så under hela sin skolgång. Lärarna på skolan vet inte riktigt hur de ska stötta Tor och vill gärna ha råd. I en första träff med Tor och hans föräldrar förklarar de direkt att deras mål är att "*Tor ska tycka att det är roligt, att han gör något nyttigt och någorlunda utmanande*", därefter berättar de om Tors skolgång.

Tor visade redan under förskolan intresse för att räkna och klura på problem. När det var dags för Tor att börja förskoleklass diskuterade föräldrarna med skolan om det var bättre för Tor att börja i årskurs ett direkt. Skolan testade honom och resultaten visade att han hade mycket bra kunskaper i matematik och även i övrigt främst i läsning. Trots detta rekommenderade de föräldrarna att låta Tor börja i förskoleklass med löfte om att han skulle få extra utmaningar. Detta fungerade bra under lågstadiet då Tor fick möjlighet att läsa tillsammans med äldre elever och vara med i en grupp som arbetade med problemlösning. Han tilläts även arbeta framåt i böckerna och låg här cirka två år före sina klasskamrater.

I mellanstadiet blev det problem som, enligt föräldrarna, främst orsakades av läraren som inte ville att Tor räknade i förväg. I diskussioner med läraren försökte föräldrarna beskriva var Tor befann sig kunskapsmässigt och de möjligheter Tor haft, med extra utmaningar, under lågstadiet. De föreslog även att Tor kunde få göra ett diagnostiskt prov för att på så sätt visa sina kunskaper i matematik. Detta var läraren helt emot då hon ansåg att ”*Tor kunde ta skada av det*”. Till slut fick Tor möjlighet att delta i provräkningar för årskurs sex och resultaten av dessa gjorde att läraren ändrade sig och Tor fick möjlighet att arbeta vidare. Läraren föreslog i slutet av årskurs fem att Tor skulle hoppa över en årskurs och börja direkt i årskurs sju. Detta ville inte Tor av sociala skäl då han hade sina kamrater i klassen och trivdes med dem.

Tor gick sitt sjunde år i den svenska skolan i London då hela familjen var där under ett år. Hans lärare under detta år var uppmuntrande och tillät Tor att läsa matematik med de högre årskurserna och innan hemfärd gjorde han det nationella provet för årskurs nio med betyget MVG. Innan Tor skulle börja årskurs åtta, nu tillbaka i Sverige, beslöt föräldrarna att boka ett möte med skolans biträdande rektor för att diskutera Tors möjligheter till extra stimulans. De fick inte mycket respons. Skolledningen menade att de inte hade några extra resurser förutom de läraren kunde erbjuda under lektionstid. Föräldrarna gick därför vidare och diskuterade med kommunens gymnasieskola om Tor kunde följa naturvetenskapliga programmets matematiklektioner. Detta gick bra och schemamässigt blev det en timme i veckan som Tor hade möjlighet att delta i undervisningen och resten klarade han själv. Under årskurs åtta skrev han nationella prov med gymnasieklassen för kurserna Matematik A och B och fick betyget MVG i båda kurserna.

Inför skolstart i årskurs nio bytte Tor skola till en friskola i kommunen där han trivdes mycket bra. Studierna vid gymnasieskolan, nu Matematik C, var han däremot inte nöjd med. Det var inte längre några genomgångar utan enbart enskilt arbete i läromedel. Tor tyckte nu att matematik var ganska tråkigt och det var denna information jag fick av hans lärare vid friskolan när läraren ringde och bad om råd.

Jag träffade i olika grupperingar och enskilt Tor, hans föräldrar och lärare i mitten av höstterminen, då Tor gick i årskurs nio, i syfte att diskutera möjligheter att åter väcka Tors matematikintresse. Skolan var positiv till att stödja Tor på ett sätt som passade honom. Spetsutbildningarna hade startat i Sverige och Tor var mycket intresserad av att nästa år få läsa den spetsutbildning i matematik som finns i en grannkommun. Tor fick under hösten specialisera sig på tävlingsuppgifter i matematik och läraren fungerade som handledare. Skolan ordnade så han fick möjlighet att delta i de matematiktävlingar som fanns i Sverige. Han fick även möjlighet att delta i en kvällsaktivitet riktad till spetsutbildningseleverna i grannkommunen. Under våren anslöt han sig till spetsutbildningen i kursen Matematik C och hösten efter började han spetsutbildningen fullt ut med en specialutformad studieplan.

Sammanfattning av fallstudierna

Ovanstående berättelser visar hur enskilda individer, som av föräldrar, lärare och av mig bedömts ha fallenhet för matematik, bemötts i olika situationer och hur detta bemötande präglat deras uppväxt, skoltid och matematiska utveckling. För varje fallstudie finns, förutom intervjumaterial, föräldrarnas beskrivningar av sina barn, lärares beskrivningar av sina elever även en omfattande empiri av elevernas arbete med matematiska aktiviteter. Jag kommer att återvända till dessa berättelser samt till vissa delar av empirin i slutdiskussionen.

Enkätstudier

I studien ingår, som nämnts, också två större enkätstudier, en riktad till lärare i grundskolan och en till matematikutvecklare i Sveriges kommuner. I det tidigare presenterade pilotprojektet ingick även en mindre enkätstudie vars syfte var att fungera som förstudie till den av de två större enkätstudierna som var riktad till lärare i grundskolan. Nedan beskrivs de två större enkätstudierna, syftet med dem och hur de genomfördes.

Enkätstudie riktad till lärare i grundskolan F-9

Den första större enkätstudien föregicks, som nämnts ovan, av en förstudie genomförd i samband med pilotprojektet på en friskola i södra Sverige. Denna förstudie innehöll frågor om lärarnas egen upplevelse av matematik, hur deras undervisning såg ut samt hur de stimulerar elever med särskilda förmågor i matematik (se bilaga 2). Efter denna förstudie reviderades frågeunderlaget något för att sedan riktas till lärare vid grundskolan i tre kommuner i södra Sverige (se bilaga 3). Totalt har 180 lärare (år F-3 (80), år 4-6 (79) och år 7-9 (21)) svarat på frågor om undervisningsmodeller som de använder och förväntningar som de har på elevers arbete i skola och hem, om de har eller har haft elever med fallenhet för matematik i sina klasser och hur de i så fall upptäcker dessa. Sist men inte minst ställdes frågan hur de bemöter elever med fallenhet för matematik. Enkätstudien genomfördes i Sölvesborg kommun i november 2005, i Karlskrona kommun i januari 2006 samt i Växjö kommun i mars 2006. Samtliga enkätstudier genomfördes i samband med föreläsningar om elever med särskilda förmågor i matematik. Lärarna uppmanades att delta i studien men deltagandet var naturligtvis frivilligt. Svarsfrekvensen var i genomsnitt ca 80 % vid de tre föreläsningarna.

Lärarnas svar på frågorna har sammanställts, först för år F-3, år 4-6 och år 7-9 var för sig, senare i en gemensam dokumentation av år F-9 för varje kommun. Till sist har alla svar från samtliga tre kommuner år F-9 sammanställts. Resultatet från denna sammanställning redovisas, analyseras och diskuteras nedan i kapitlet *Resultat från enkätstudier*.

Enkätstudie riktad till matematikutvecklare

Matematikutvecklare är lokala stödpersoner som numera finns i de flesta av Sveriges kommuner. Regeringen gav i början av 2006 kommunerna i uppdrag att utse sådana. Samtidigt fick Myndigheten för skolutveckling (från 1 okt. 2008 i Skolverkets regi) i uppdrag att genomföra utvecklingsinsatser för att höja kvaliteten i matematikundervisningen i syfte att nå en ökad måluppfyllelse (Myndigheten för skolutveckling, 2008; Tengstrand, 2010). Myndigheten skulle i detta arbete samverka med Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, och ett av uppdragen var att stödja matematikutvecklarna i deras arbete. NCM har inom ramen för detta uppdrag bl.a. anordnat regionala och nationella konferenser för matematikutvecklarna samt gett litteraturstöd och utvecklat en webbplats, www.matematikutvecklare.se. De flesta matematikutvecklare är aktiva lärare och den övervägande delen, ca 80 %, undervisar på grundskolan (årskurs 1-9). Förskola och förskoleklass respektive gymnasium har ca 5 % representanter vardera och de återstående 10 % av matematikutvecklarna har mer övergripande uppgifter som skolledare, specialpedagoger, utvecklingsledare m.m. (Tengstrand, 2010). En del kommuner har två matematikutvecklare och har då valt en med inriktning förskola eller grundskolans tidigare år och en mot grundskolans senare år eller gymnasium.

I samband med matematikutvecklarnas årliga föreläsningsserie 2008, genomfördes en enkätstudie med fokus på handlingsplaner för bemötande av elever med särskilda förmågor i matematik. Totalt svarade 284 matematikutvecklare från 229 kommuner på frågorna nedan:

1. Finns det, som du känner till, någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

2. Finns det, som du känner till, någon speciell person, speciella resurser för att ta hand om elever som visar särskilda förmågor i matematik på den skola/kommun där du själv arbetar?

Resultaten från denna studie har sammanställts och analyserats och presenteras nedan i kapitlet *Resultat från enkätstudier*.

Fallstudier av Johan och Sara

Kapitlet nedan beskriver två elever, Johan och Sara, vilka båda deltog i det pilotprojekt som genomfördes då denna studie inleddes våren 2005. I Krypteringsövningen, som tidigare beskrivits, upptäcktes Johan som var med i en av de grupper som videofilmades under övningarna. Sara upptäcktes senare, då fallstudien med Johan redan inletts, i samband med en matematiktävling som klassen deltog i. Båda dessa aktiviteter, krypteringsövningen och matematiktävlingen, var icke-typiska för klassens matematikundervisning och skulle visa sig mycket viktiga för eleverna.

Kapitlet inleds med en presentation av Johan och Sara, deras uppväxt och skolsituation fram till vårt första möte. Därefter ges en bild av hur dessa elevers matematiska förmågor uttrycks, identifieras och ges stöd i olika pedagogiska praktiker; i den ordinarie klassrumspraktiken, inom ramen för den interventionsstudie som genomfördes i pilotprojektet, i elevernas deltagande i matematiktävling samt i individuella fallstudier med de två eleverna. Kapitlet avslutas med en beskrivning av Johans och Saras vidare studier på gymnasiet, där de två eleverna valt olika studievägar.

Bakgrund

Johan

Johan är äldsta barnet och har en lillebror som är två år yngre. Även lillebror har, enligt hans lärare, fallenhet för matematik och har i sin klass en framträdande position. Johan var tidigt intresserad av att räkna, lösa problem, lägga mönster m.m. Han kunde sitta i timmar med legobitar eller andra klossar och det var inga vanliga byggen han skapade, allt skulle vara enligt vissa mönster och ibland växte hela städer fram. Detta fotograferades av en imponerad mamma som också gav honom mycket beröm. Pojkarna, Johan och hans lillebror, fick ofta syssla med färg och form som var mammas intresse. Det var fri lek med fingerfärg, figurer och papper. Leken kombinerades med samtal och diskussioner mellan barn och vuxna vilket kan ha inspirerat till matematisk reflektion. Däremot uppmanade föräldrarna aldrig Johan att arbeta med böcker i matematik utan allt fick komma på ett naturligt sätt. När de åkte bil hade de multiplikationstävlingar och andra knep och knåp lekar, vilket Johan såg fram emot och som gjorde att han mycket tidigt behärskade alla räknesätten. Föräldrarna menar att de aldrig varit speciellt pådrivande men att de alltid uppmuntrat kreativitet och diskussion. Johan var frågvis och nyfiken och diskussionerna vid matbordet pågick långt efter det att maten tagit slut. Föräldrarna menar att de gav honom en hel del beröm men också eget ansvar. Skulle saker bli gjorda var det upp till Johans ansvar och det var han som fick ta konsekvenserna av sina beslut. Detta blev ibland tydligt när Johan glömde att förbereda sig inför skoldagen.

Johan har varit intresserad av matematik så länge han kan minnas. Det är pappa som är den stora inspirationskällan, men även farfar som var civilingenjör var speciellt intresserad av matematik och matematikdiskussionerna fanns naturligt i Johans miljö. Pappa, som numera arbetar inom IT-sektorn, stimulerade även Johans datorintresse. Johan använde datorn på egen hand redan i treårsåldern och datorintresset har sedan utvecklats och handlade under högstadiet om programmering och design av hemsidor.

Johan ser upp till sin pappa och säger själv att han är lik honom. Tilläggas bör att även mamma hade högsta betyg i matematik i skolan. Intresset för musik tog dock över i hennes fortsatta karriär. Enligt pappa är Johan allmänbildad och allmänt intresserad av naturorienterande ämnen, främst fysik.

Sara

Sara är äldsta barnet och har två yngre syskon. Lillasyster är två år yngre men går i klassen närmast under Sara då hon tidigt fick hoppa över en årskurs. Lillasyster har, enligt lärarna, även hon fallenhet för matematik och är i sin klass lika framstående som Sara är i sin. Lillebror går på särskola men utmärker sig, enligt föräldrarna, även han inom det matematiska området. Den matematiska ådran i familjen är påtaglig. Mamma är utbildad sjuksköterska och har aldrig haft några tankar på att läsa vidare inom matematik även om hon alltid haft lätt för ämnet. För pappa betyder matematik *"stor ambition, mycket tid och att man får kämpa"*. Han är annars neutral i sin upplevelse av matematik under skoltiden. Idag arbetar han som egen företagare inom tekniksektorn.

Saras uppväxt har, enligt henne själv och föräldrarna, varit trygg och harmonisk. Föräldrarna har aldrig försökt drilla sina barn vare sig inom matematik eller inom något annat område. De har ett naturligt och vardagligt förhållningssätt till ämnet och menar att det aldrig har pratats speciellt mycket matematik eller pågått matematiska aktiviteter under Saras uppväxt. Det är dock inte alltid lätt att se vilka aktiviteter som kan leda till intresse och framgång inom matematik. Familjen har alltid spelat mycket spel som ett naturligt sätt att umgås, både hemma men framförallt hos mormor där barnen tillbringat mycket tid. Det visar sig också att många av de spel som spelats är logiskt eller matematiskt inriktade som Monopol, Rummikub, Yatzy m.fl. I samband med spelen, berättar föräldrarna, har det naturligtvis diskuterats strategier och lösningar med matematisk anknytning.

Saras familj är barncentrerad, det mesta handlar om barnens skola och aktiviteter. Föräldrarna ser som sin stora uppgift att stödja och uppmuntra sina barn. De har själva akademisk utbildning och förmedlar gärna värdet av utbildning till sina barn. De är noga med att följa upp barnens skolgång och i övrigt ta del av barnens vardag. Men de påpekar också att Sara alltid klarat sina läxor själv och i övrigt varit ett lätt barn att ta hand om. Hon har alltid vetat vad hon vill och hon har alltid varit självständig. Systrarna står varandra nära och Sara hjälper gärna lillasyster med läxorna om så behövs. Ibland kan det bli en viss tävling mellan systrarna men detta upplever både flickorna och deras föräldrar som en positiv konkurrens.

Sara var tidigt mycket motorisk, hon gick tidigt och rörde sig smidigt. Hon började också tidigt med idrott och är idag en lovande friidrottare. Hon är en tävlingsmänniska vilket även visat sig i skolarbetet.

Sara berättar att hon har några vänner i skolan och några inom idrotten men hon umgås inte särskilt mycket med sina kamrater. Hon har själv valt att begränsa sitt sociala umgänge, dels för att hon inte skulle hinna med fler vänner, dels för att hon trivs med familjen och behöver vara för sig själv.

Skolstart och åren fram till vår första träff

Johan

När Johan började skolan behärskade han de fyra räknesätten och kom snabbt igång med att räkna i böckerna. Det som däremot var totalt ointressant för Johan vid denna tid var bokstäver och därmed läsning.

I Johans fall avvaktade föräldrar och lärare hans ointresse för läsning och lät honom syssla med det han tyckte bäst om nämligen matematik. Han räknade snabbt framåt i böckerna som inte erbjöd honom några större utmaningar och han var snart långt före sina klasskamrater. Läsningen blev inte intressant förrän Johan märkte att de roliga matematikuppgifterna krävde att han kunde läsa. Detta skedde i slutet av årskurs två och då tog det, enligt Johans dåvarande lärare och hans föräldrar, enbart några veckor för honom att knäcka koden. Det dröjde inte heller länge innan han läste Harry Potter böcker på löpande band.

Under årskurs fem och sex hände det saker i skolan och i Johans liv för övrigt. Under denna period skilde sig föräldrarna vilket var mycket påfrestande för Johan. Han kom också in i puberteten, utvecklades och ville ofta bara gömma sig. Detta tillsammans med hans nyvunna stora intresse för läsning gjorde att han än mer än tidigare satt för sig själv. Matematiken var nu ganska tråkig; Johan hade redan under årskurs tre och fyra arbetat med de områden som togs upp och han blev nu lämnad åt sig själv och kände sig uttråkad och understimulerad. Han räknade i böckerna men utan någon större motivation. Han själv var ganska säker på att han kunde det han behövde i matematik så han frågande inte heller efter svårare utmaningar eller alternativa uppgifter. Han läste hellre och tilläts också läsa under en stor del av årskurs sju.

Johans lärare under årskurs sex och sju berättade att Johan alltid varit duktig i matematik och säkert fortfarande skulle kunna vara det, men han hade tappat sugen lite på senare år och så var han ganska lat. Läraren gav en beskrivning av Johan som jag senare också fick höra från Johans pappa. *"Johan är smart men lat."* Lättjan fick gott om utrymme i den undervisning som bedrevs där tonvikten lades på eget arbete. Johan har inga speciella fritidsintressen. Hade det funnits något utmanande inom matematik eller naturvetenskap hade han gärna deltagit. När jag frågade Johan varför matematik är roligt blev svaret: *"Jag gillar att lösa problem och så gillar jag utmaningar"*.

Sara

Sara utmärkte sig inte speciellt tidigt när det gällde de teoretiska ämnena utan sågs som ett normalbegåvat barn då hon började skolan. Hon hade inget speciellt intresse av att räkna eller läsa. Det skulle dröja innan Sara själv och omgivningen insåg hur lätt hon hade för matematik. Saras mamma säger att hon någonstans i årskurs sex förstod att Sara arbetade snabbt och att det gick bra på proven.

Sara beskrevs av sin lärare som en mycket ambitiös elev som till skillnad från Johan var *"en produkt av hårt arbete"*. Läraren beskrev hur Sara lade ner mycket tid och kraft på skolarbetet, hon gjorde det hon blev tillsagd och slarvade aldrig. Hon var blyg och hade ibland svårt att prata inför publik. Till skillnad från Johan arbetade Sara under årskurs sex och sju snabbt framåt i de läromedel som erbjöds. Hon arbetade ofta tillsammans med klasskamraten Jennifer, även hon med intresse och potential för matematik.

Olika praktiker

Skolans ordinarie praktik

För de två elever som jag valt att presentera här, Johan och Sara, bestod matematikundervisningen under hela grundskolan av eget arbete i läromedel. Det var hastighetsindividualiserad undervisning och alla räknade på i sin egen takt i boken, vilket gjorde att eleverna var på helt olika ställen och områden. Gemensamma genomgångar, laborativt arbete och diskussioner var sällsynta. Läraren försökte istället att besvara elevernas frågor individuellt.

De lärare som undervisat Johan berättar i intervjuer att Johan endast ville syssla med de svåraste problemen, gärna hämtade från andra källor än läroboken, och han hade alltid *"sina egna speciella lösningar"* på dessa. Han frågade sällan efter hjälp utan satt mest själv och funderade. Det sista stämmer väl överens med de observationer jag gjort i Johans klassrum då han i stort sett aldrig räckt upp handen eller på annat sätt frågat läraren eller kamrater efter något.

Undervisning i Johans och Saras klass förändrades en del då de i årskurs åtta fick en ny matematiklärare. Till skillnad från tidigare innehöll matematiklektionerna nu mer genomgångar, diskussioner och gruppövningar.

För Johans del erbjöd denna undervisning, parallellt med fallstudiens övningar, mer stimulans och fler utmaningar.

Sara är precis som Johan tystlåten i klassrummet och hon ber sällan om hjälp av läraren. Under årskurs sex och sju arbetade Sara, som nämnts ovan, snabbt framåt i läromedlet. Detta medförde att hon under våren i årskurs åtta var klar med alla läromedel för grundskolans kurs. En diskussion mellan elever, lärare, föräldrar och skolledning inleddes om hur Saras fortsatta matematikstudier skulle tillgodoses och vilka möjligheter till stöd skolan kunde ge. Ett förslag från läraren var att Sara kunde få en timme extra i veckan där läraren hjälpte henne med gymnasiekursen. Emellertid menade skolledningen att resurserna inte fanns för sådant stöd. Istället beskrev de två möjligheter som de ansåg vara de traditionella. Antingen kunde Sara skriva de nationella proven för årskurs nio under våren i årskurs åtta, eftersom hon ansågs färdig med kursen, med då hade skolan inget ansvar för hennes fortsatta gymnasiestudier i matematik, eller så kunde hon få extrauppgifter av läraren under de ordinarie lektionerna i årskurs åtta och nio. Läraren skulle då kunna hjälpa Sara med dessa uppgifter inom ramen för den vanliga verksamheten. Det slutade med att Sara skrev de nationella proven i matematik under våren i årskurs åtta, vilka hon klarade på bästa möjliga sätt. Sara började sedan på gymnasiekursen. Hon var med på de ordinarie matematiklektionerna i årskurs nio men arbetade självständigt. Hon fick dessutom stöd av sin lärare en timme per vecka på dennes fritid. De arbetade då bland annat med tävlingsuppgifter och förberedde sig för högstadiets matematiktävling. Saras lärare ordnade även så att kontakt togs med gymnasiet och en gymnasielärare träffade Sara vid några tillfällen. Under vårterminen i årskurs nio slutade läraren och klassen fick tillbaka samma lärare som de haft i årskurs sex och sju. Därmed återgick även undervisningen till hastighetsindividualisering och enskilt arbete med läromedel. Det stöd i form av en extra timme per vecka som Sara tidigare haft försvann därmed.

Lärarens beskrivning av Johan och Sara visar att han identifierat generella förmågor hos dem båda. Beskrivningen av Johan som ”*smart men lat*”, ger ett intryck av att läraren har viss insikt i och respekt för Johans kompetens, men beskrivningen är generell och inte specifik för matematik. Vidare visar lärarens beskrivning av Johan att han är medveten om att Johan är duktig i matematik och alltid har varit det men att lättjan ställer till problem. När det gäller Sara anger läraren en rad generella förmågor. Sara beskrivs som ambitiös, arbetsvillig, pliktskyldig, snabb och noggrann. Alla dessa förmågor har säkert bidragit till att hon gått snabbt framåt i läromedlet under de senaste åren men de beskriver, precis som i fallet Johan, inte specifikt matematiska förmågor hos eleven. I en undervisning där alla elever arbetar individuellt med läromedlet och läraren handleder vid förfrågan från eleverna är det svårt för en lärare och för en observatör att urskilja de specifika matematiska förmågorna, i synnerhet som Johan och Sara mycket sällan söker stöd i arbetet.

En intervention

Som nämnts är studiens syfte att beskriva hur elevers matematiska förmågor uttrycks och identifieras i olika pedagogiska praktiker. I forskning om elever med fallenhet för matematik framhålls ofta betydelsen av att ge dessa elever uppgifter som utmanar dem och som stimulerar till matematisk reflektion (se t.ex. Barger, 1998; Kennard, 2001; Koshy, 2001; Krutetskii, 1976; Price, 2006; Sheffield, 2003; 2009). En av mina egna forskarutbildningskurser var, som nämnts ovan, inom området abstrakt algebra. Skulle det vara möjligt att introducera ett sådant område på ett laborativt och inspirerande sätt för elever i grundskolan och skulle de anta utmaningen? Jag sökte kontakt med en friskola i södra Sverige där skolledning, lärare och elever var villiga att ta emot mig för en serie lektioner som behandlade området kryptering. Det var då jag först mötte de elever, i årskurs 7, som här har presenterats under namnen Johan och Sara.

Interventionen inleddes med att läraren presenterade mig för klassen och jag skulle just börja min introduktion när en lång och kraftig pojke med hörlurar i öronen kom insmygande. Han slog sig ner och såg tämligen ointresserad ut. Efter det att jag berättat lite om mig själv och vad jag höll på med ställde jag frågan om det var någon av eleverna som hade hört ordet kryptering tidigare och visste något om det. Då lyfte den sent anlände pojken på hörlurarna och handen gick sakta upp i luften: ”*Det är något man använder i datorn, någon kod*”, sa han. Jag frågade var han hade hört talas om detta och han svarade mycket tyst: ”*Jag har läst om det*”.

Dagen fortsatte med gruppindelning och arbete med att hitta ett eget hemligt språk inom gruppen. Johan, pojken med hörlurarna, ingick i en av de grupper som jag videofilmade. Han föreslog, i jämförelse med andra grupper och sina egna gruppmedlemmar, ett ganska komplicerat hemligt språk. Detta innehöll ett ekvationssystem där han inte bara visade prov på kreativitet, förmåga att operera med siffror och symboler, utan också förmåga till reversibelt tänkande då han även försökte förklara hur meddelandet kunde dekrypteras. Han fick dock inte med sig sina gruppmedlemmar som beslöt sig för att pröva ett enklare hemligt språk: att flytta bokstäverna ett steg så att a blev b, b blev c, o.s.v. Johan hade dock gjort ett första intryck på mig. Under den slöa och ointresserade ytan fanns tecken på förmåga och intresse. Där fanns en glimt i ögonen när jag började prata om kryptering. Även om han inte fick möjlighet, eller tog sig möjligheten, att förklara sina tankar om den algoritm som han ville använda vid konstruktionen av det hemliga språket fanns en lust inför uppgiften och ett engagemang.

När krypteringsprojektet avslutats gick jag igenom filminspelningarna av de grupper och elever som jag valt ut. Mest märkbart var den kreativitet som fanns bland eleverna. Inga elever satt tysta och inaktiva. Förutom Johan, fanns ytterligare elever som visade matematiska förmågor men även då det var dags att lösa övriga gruppers hemliga språk utmärkte sig Johan. Han visade stor säkerhet då han snabbt beskrev för gruppen hur han tänkt.

I interventionen kunde jag observera specifika matematiska förmågor som kompletterade de generella förmågor läraren beskrivit för mig och som jag själv hade kunnat observera i den ordinarie skolpraktiken där samtal och diskussioner sällan förekom.

Klassen deltar i Kängurutävlingen

Sara som också fanns med vid krypteringsprojektet ingick inte i någon av de grupper som videofilmades. Det var istället i klassrumsobservationer och intervjuer med lärare på skolan som jag fick upplysningar om Sara. Hon ansågs, som nämnts tidigare, vara duktig i matematik och hade under det senaste året arbetat snabbt framåt i böckerna. Med en ny lärare i årskurs åtta fick klassen möjlighet att för första gången delta i matematiktävlingen Kängurutävlingen (NCM, 2010) och det var i samband med denna som Saras specifika matematiska förmågor uppdagades. Hon hade ett så bra resultat att det senare visade sig att hon belade en femteplats i den nationella konkurrensen. Tävlingsunderlaget i Kängurutävlingarna (NCM, 2010) innehåller stor variation i form av olika matematiska områden, både inom och utanför kursplanerna i matematik. Problemen är också utformade på ett sätt som medger val av olika lösningsmetoder. Om vi gör en distinktion mellan *uppgifter* och *problem*, där *uppgifter* är sådana som kan lösas med hjälp av imitativa resonemang vilka kan memoreras och genomföras till stora delar utan djupare matematisk förståelse medan *problem* kräver kreativa och välgrundade resonemang (se vidare Boesen, 2006) kan Känguruproblemen karakteriseras som just problem i det att de skiljer sig från läromedlens rutinuppgifter (Brändström, 2005).

I denna aktivitet visar Sara, både för sig själv och för lärare och föräldrar, att hon inte bara är högpresterande och en ”*produkt av hårt arbete*” i bemärkelsen ambitiös, arbetsvillig, snabb och noggrann, utan hon behärskar även områden och situationer som hon tidigare inte övat in. I tävlingen visar hon en bredd i sitt matematiska kunnande då problemen delvis ligger utanför den ordinarie kursplanen i matematik och oftast kräver förmåga till sekventiellt och logiskt tänkande (se vidare nedan).

Fallstudie med fokus på individuell problemlösning med pedagogiskt stöd

Matematisk förmåga är, som nämnts, ett komplext fenomen och för att studera detta närmare blev mitt val av metodisk ansats just fallstudien. Jag valde också att fortsätta med en av mig introducerad praktik där jag fick möjlighet att studera eleverna i andra aktiviteter och andra matematiska situationer än de som skolan erbjöd. De problemen som användes i denna individuella praktik hämtades bland annat från Kängurutävlingar (NCM, 2010) och arbetet med dessa problem låg till grund för samtal mellan mig och eleven. Syftet med att välja problem från Kängurutävlingar var att de skulle väcka nyfikenhet och lust att lära matematik (NCM, 2010) samt, som ovan beskrivits, att problemen väljs från olika matematiska områden och medger val av lösningsmetod.

Matematiska förmågor – styrkor och svagheter

Både Johan och Sara, liksom deras föräldrar och lärare visade sig vara villiga att låta eleverna delta i en fallstudie. Den första intensiva delen av denna fallstudie pågick under tre månader med totalt nio sessioner som varade cirka två timmar varje gång vi träffades. Nedan har jag valt ut några problem som visar elevernas matematiska förmågor och som på ett representativt sätt visar hur de löser och förklarar sina matematiska resonemang. Både Johan och Sara visade prov på logisk förmåga. Många av övningarna var för Johan helt självklara. Han hade dock svårt att förklara varför han kommit fram till ett visst resultat, men han var helt säker på att lösningen var korrekt, och i de flesta fall stämde det också. Johans förklaringar var ibland korta och osammanhängande där det krävdes ansträngning och matematisk kompetens hos lyssnaren för att tolka hans tankar. Sara gav inte heller hon några långa förklaringar men visade, på ett lugnt och strukturerat sätt, hur hon angripit problemet och hon kunde också formulera sina tankegångar på ett tydligt sätt.

Johan, till skillnad från Sara, hade också bristande i förmåga inom vissa områden, brister som han inte försökte dölja. I de fall han inte förstått problemet eller var osäker tog han upp detta direkt. De mest utmärkande bristerna kommer till synes i hans förmåga att läsa matematisk text. Han läste texterna på det sätt som används vid läsning av skönlitteratur och han missade därför viktig information. När jag bad honom läsa problemformuleringen en gång till eller när jag själv läste den sakta för honom löste han även dessa problem.

Nedan följer utdrag av de svar och lösningar Johan och Sara gav på Känguruproblemen i 2006 års tävling

Johan

Exempel 1: (Problem 10)

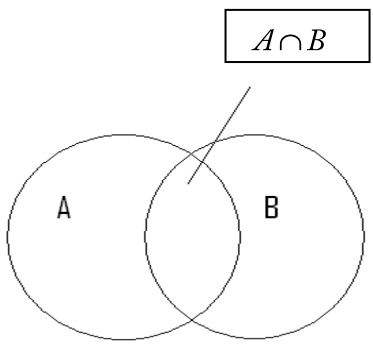
Av 2006 skolbarn i Malmö hade 1500 varit med i Kängurutävlingen och 1200 i Vargungetävlingen. Hur många av barnen hade deltagit i båda tävlingarna om det var 6 barn som inte varit med i någon av tävlingarna?

Johan: *Det ser man ju direkt.*

Eva: *Försök ändå förklara för mig.*

Johan: *Det var 2006 barn men sex hade inte varit med alltså 2000. Det hade gjorts 2700 prov, då måste 700 ha gjort båda proven.*

Johan varken skriver eller ritar något när han löser denna uppgift utan säger bara att han ser svaret framför sig. Detta är typiskt för Johan. Han har en otydlig handstil och har, enligt föräldrarna, alltid varit ointresserad av att skriva för hand. Han funderar en stund eller kommer med svaret direkt men antecknar aldrig något om han inte blir uppmuntrad till det. När han ombeds förklara hur han har tänkt gör han det, som i detta fall, muntligt på ett mycket klart och konkret sätt som för tankarna till ett resonemang om mängder. Ett sätt att formalisera Johans resonemang är att införa de olika mängderna A: barn som deltagit i Kängurutävlingen och B: barn som deltagit i Vargungetävlingen. Det som efterfrågas är antalet barn i snittmängden $A \cap B$, vilket betecknas $|A \cap B|$.



$|A| = 1500$

$|B| = 1200$

$|A \cup B| = 2000$

Detta ger följande beräkning av antalet element i snittmängden

$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$ = 1500 + 1200 – 2000 = 700

Exempel 2: (Problem 12)

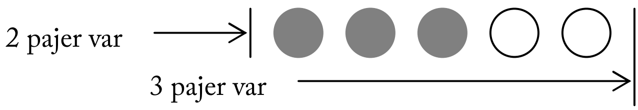
Mormor sa till barnbarnen: ”om jag bakar 2 pajer till er var, så får jag deg över som räcker till ytterligare 3 pajer. Men jag kan inte baka 3 pajer till er var, för då räcker inte degen till de 2 sista pajerna.” Hur många barnbarn hade mormor?

Johan: *Ja, det blir ju fem.*

Eva: *Kan du förklara.*

Johan: *Nej, det vet jag inte. Man ser ju att skillnaden är en paj och så är den andra skillnaden fem pajer. Då måste det ju vara fem barn.*

Det Johan försöker förklara i denna uppgift kan liknas vid någon form av balansräkning. Han har aldrig sysslat med ekvationer även om han i intervjuer har berättat att han är intresserad av att få lära sig att räkna med obekanta. En möjlig tolkning av Johans resonemang är att han utgår ifrån en degklump, där det i ena fallet (2 pajer) blir deg över till 3 pajer och i det andra fallet (3 pajer) saknas deg till 2 pajer.



Hans uttryck ”*Man ser ju att skillnaden är en paj*” gestaltas då av de två möjliga fallen, 2 respektive 3 pajer var, och uttrycket ”*så är den andra skillnaden fem pajer*” blir summan av den deg som är över respektive saknas.

Om vi istället väljer att lösa detta problem med hjälp av en obekant, *x*, som står för antalet barnbarn och som efterfrågas i problemet, så har vi en möjlighet att följa Johans tankesätt eller tolka hans resonemang på följande sätt: Hans uttryck ”*Man ser ju att skillnaden är en paj*” motsvarar då högersidan i led (2), se nedan, och hans uttryck ”*så är den andra skillnaden fem pajer*” motsvarar vänstersidan i samma ekvationsled.

Ekvationslösning av problemet kan se ut på följande sätt:

(1) $2x + 3 = 3x - 2$

(2) $3 + 2 = 3x - 2x$

(3) $5 = x$

Exempel 3: (Problem 8)

Två sidor i en triangel är 7 cm vardera. Den tredje sidans längd är ett helt antal centimeter. Vilken är den största möjliga omkrets en sådan triangel kan ha?

Johan:	*Ja, den måste ju bli 28 eftersom om man viker ut de två sju centimetrarna så långt man kan så blir det ju 14. Då kan den inte vara riktigt 14 utan kanske 13,9999 och då måste ju hela omkretsen vara nästan 28.*
Eva:	*Läs uppgiften långsamt en gång till.*

När han kommer till helt antal cm så säger han.

Johan:	*Jaha, ja då blir det ju bara 13 cm eller alltså 27 på omkretsen.*

Här är ett problem där Johan missat en del av förutsättningarna vilket troligtvis beror på att han inte läst texten tillräckligt noggrant. När han uppmanas att läsa igenom texten långsamt läser han den högt för mig och när han kom till uttrycket ”helt antal centimeter” reagerar han direkt.

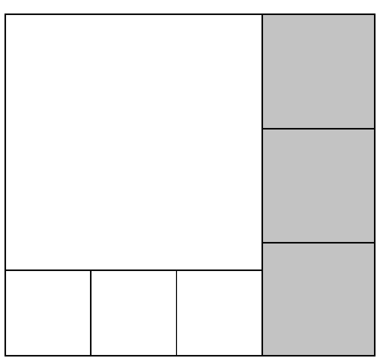
Analys av Johans matematiska förmågor

Johan visar i de båda första uppgifterna prov på några av Krutetskiis förmågor. Han ser lösningen framför sig direkt, vilket är typiskt för Johan, och visar därmed en snabbhet i tanken. När Johan uppmanas att förklara hur han tänker visar han förmåga att formalisera matematiskt material, att se helheten i problemet samtidigt som han arbetar med delarna på ett strukturerat sätt. Han anser dock att förklaringar är onödiga eftersom han förefaller anse att svaret är självklart och borde vara så för alla. I exempel ett visar han också förmåga att operera med siffror. I exempel två visar Johan prov på sekventiellt logiskt resonerande vilket är en av hans absolut starkaste förmågor. Han löser problemet genom att se den generella strukturen i problemet och vidare genom att se relationer mellan talen och på detta sätt få fram en form av balansräkning. De flesta av Johans lösningar av matematiska problem är informella och bygger på sekventiellt logiskt resonemang vilket han oftast utför tyst i huvudet, utan anteckningar eller illustrationer. På uppmaning av mig gör han dock försök att förklara sina tankegångar. I exempel tre missar han en del av förutsättningarna då han själv läser texten men visar i diskussionen med mig en förmåga till flexibilitet: så snart han får klart för sig vilka förutsättningar som gäller tänker han om och har en färdig lösning. I de flesta fall visar han ett engagemang och en lust att lösa de givna problemen.

Sara

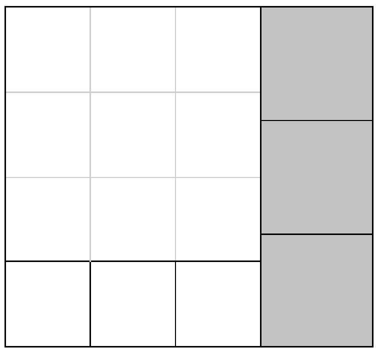
Exempel 1: (Problem 16)

Rektangeln på bilden är indelad i 7 kvadrater. De tre grå kvadraterna till höger har sidlängden 8 cm. Vilken sidlängd har den stora vita kvadraten?



Sara: *Tre stora kvadrater är lika med fyra små kvadrater. Då är fyra små kvadrater lika med 24 cm. Tre små kvadrater eller den stora kvadraten är då lika med 18 cm.*

En möjlig tolkning av Saras resonemang är att hon tänker sig nio små kvadrater i den stora kvadraten och att hon då ser att summan av sidorna hos fyra vita kvadrater är lika med summan av sidorna hos tre grå kvadrater.



Det är denna jämförelse Sara gör i sin första mening, de grå kvadraterna (som hon kallar stora) jämförs med de små vita kvadraterna. Eftersom var och en av de grå kvadraterna har sidlängden 8 cm vet vi att tre sådana har en längd av 24 cm. Då vet vi att fyra små vita kvadrater motsvarar längden 24 cm och en vit kvadrat har då sidlängden 6 cm. Därmed motsvaras tre små vita kvadrater av längden 18 cm och detta är då sidan i den stora vita kvadraten.

Exempel 2: (Problem 19)

Den sista siffran i ett tresiffrigt tal är 2. Om denna siffra flyttas från sista till första plats så minskar talet med 36. Vilket är talets siffersumma?

Sara: *Om första talet heter xy2 så heter det andra 2xy efter man har flyttat tvåan. Då är xy2 minus 2xy lika med 36. Två minus y ska vara sex, men det går inte så då måste man låna så det blir 12 minus y och då är y lika med sex. Då måste x vara två eftersom fem minus x ska vara tre. Sex plus två plus två är tio.*

Detta problem löser Sara på ett mycket konkret och tydligt sätt och jag ger därför ingen vidare förklaring.

Analys av Saras matematiska förmågor

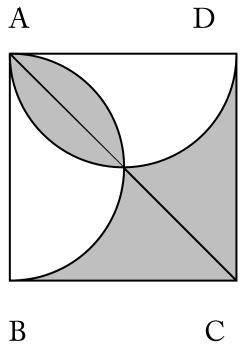
Sara visar, precis som Johan, förmåga till sekventiellt logiskt resonemang men också en förmåga att i en figur tolka geometriska relationer (se exempel 1). Hon strävar efter korta och effektiva lösningar men har ändå en förmåga att på ett konkret sätt förklara hur hon tänker. Det ser vi tydligt i exempel 2 där Sara direkt benämner talets siffror med obekanta x och y, och därmed visar förmåga att operera med symboler, och utifrån dessa utför subtraktionen. I exemplet visar Sara förmåga att formalisera ett matematiskt material, att strukturera problemet; hon väljer ut relevant information och arbetar med delarna utan att tappa helheten i problemet. Hon visar även att hon är förtrogen med positionssystemet. Sara visar i alla exempel lust för det hon gör, aldrig en uppgivenhet. Sara har även det Sheffield (2003) beskriver som uthållighet, förmågan att under lång tid fördjupa sig i ett matematiskt problem, något hon visar i en rad andra matematiska problem som inte redovisas här (se vidare Pettersson, 2008).

Matematiska förmågor – likheter och olikheter

Vid ett tillfälle, drygt ett år efter starten av fallstudien med Johan och Sara, fick vi en inbjudan att medverka i ett nyhetsprogram på TV4 Sydost. Johan och Sara tillfrågades och båda var intresserade, vilket var mycket positivt. Eleverna skulle, i direktsändning, visa prov på sina matematiska förmågor och båda var ganska nervösa. De fick fem utvalda problem med varierande svårighet och innehåll och ombads lösa så många som möjligt för att sedan visa upp och förklara en eller två lösningar i sändning. Både Johan och Sara löste samtliga problem på ett övertygande sätt. Här fanns problem som krävde logiska resonemang och geometriska kunskaper samt ett problem där man skulle använda sig av bevisföring. Johan som tidigare i olika sammanhang visat stor matematisk förmåga men ganska liten vilja till att förklara sina tankar och lösningar på problem tog nu i direktsändning i TV initiativet. Detta var förvånande och intressant. Det fanns mer som förvånade när det gällde Johan. Tidigare hade han till stora delar gömt sig bakom en image av att inte vilja framstå som centralfigur eller framhäva sig själv. Nu visade han upp en annan sida av sig själv, en sida som möjligen mognat fram under året som fallstudien pågått. Problemet som han valde att förklara var följande:

Utmaning 1

I figuren har en kvadrat ABCD och två halvcirklar med diametern AB och AD ritats upp. Om längden av AB är 2 cm, hur stor är den skuggade arean?



Han förklarade problemet på ett mycket konkret sätt och berättade sedan att man kunde lösa problemet på två olika sätt.

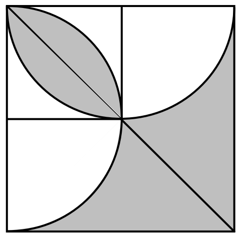
Alternativ 1:

Johan: *Man tar de två små skuggade områdena längst upp till vänster i figuren och fäller ner och fyller ut tomrummen i halvcirklarna vilket gör att de skuggade områdena tillsammans bildar halva kvadraten vilken därmed är två kvadratcentimeter.*

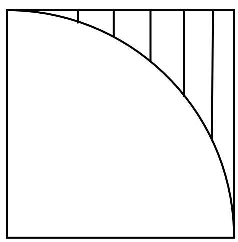
Han berättade att det var så han själv hade löst uppgiften först, genom att helt enkelt se detta i figuren. Men han nöjde sig inte med en lösning utan förklarade även att man med hjälp av att räkna ut de olika områdenas areor kunde lösa problemet.

Alternativ 2:

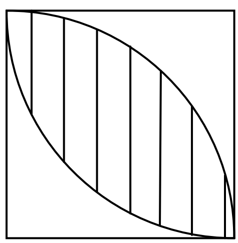
Johan: *Först räknar man hela kvadratens area som är fyra kvadratcentimeter samt cirkelhalvornas areor som är π/2 var. Sedan delar man in kvadraten i fyra små kvadrater som vardera har arean en kvadratcentimeter och inuti den övre vänstra kvadraten* [se figuren nedan] *finns en cirkelsektor som har arean π/4. Om vi drar bort cirkelsektorn från kvadraten får vi detta område* [pekar i figuren]. *Då kan man räkna ut arean av det skuggade området* [pekar i figuren] *överst i vänstra kvadraten.*



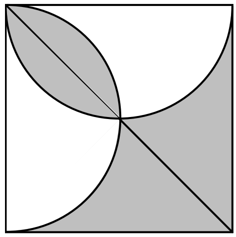
Vi ger här nedan lite hjälp att tolka Johans resonemang. Om vi plockar ut den övre vänstra kvadraten i figuren ovan och förstorar den enligt figuren nedan ser vi Johans cirkelsektor vitmarkerad med arean $\pi/4$. När Johan säger ”*Om vi drar bort cirkelsektorn från kvadraten får vi detta område*” så pekar han på det område som är streckat i figuren nedan. Detta område har arean $1 - \pi/4$ cm^2.



När Johan sedan säger ”*Då kan man räkna ut arean av det skuggade området överst i vänstra kvadraten*” så avser han det område som är streckat i figuren nedan.



Det går nu att räkna ut denna area enligt $1 - 2(1 - \pi/4)$ cm^2 = $\pi/2 - 1$ cm^2 men detta gör inte Johan.



Det framgår inte om Johan räknar ut den totala arean av alla de skuggade områdena Möjligen är han mer intresserad av strategin och det logiska resonemanget, då han redan angett ett svar i det första lösningsalternativet. Då han känner areorna av de skuggade områdena i varje delkvadrat, skulle det vara tänkbart att utnyttja detta och få den totala arean genom beräkningen $(\pi/2 - 1) + 2(1 - \pi/4) + 1 = 2\ \text{cm}^2$

Det visade sig, när vi gick igenom Johans och Saras lösningar på problemen, att Sara hade löst detta problem på samma sätt som Johan men hon hade först löst det enligt alternativ 2 för att senare upptäcka att man kunde se det geometriskt så som i alternativ 1.

I problemet visar Johan förmåga att se strukturen i ett matematiskt material, i detta fall en geometrisk figur. Han visar även förmåga till flexibilitet då han kan förklara två olika lösningsstrategier för att komma fram till svaret. Han använder i det första lösningsalternativet förmåga att plocka ut relevant information ur ett matematiskt material, i detta fall i figuren, och snabbt bearbeta denna för att finna det, som han säger, klart enklaste lösningsförfarandet. Tidigare har Johan visat sekventiellt logiskt resonerande men här visar han även förmåga att använda sig av symboler och formler. Han gör det genom att använda metoden att genom areaberäkningar av cirklar och cirkelsektorer få fram ytterligare en lösningsstrategi. Just att minnas formler och arbeta med dessa i problemlösningssituationer var något som Johan hade svårt för när jag först träffade honom, men som han senare utvecklat och visar tydligt vid lösningen av den givna uppgiften.

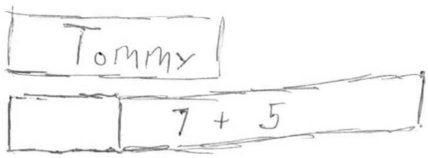
Ett annat problem som Johan och Sara fick i direktsändning och där jag efteråt samlade in deras lösningar var följande:

Utmaning 2

Jonny och Tommy spelar pingis. Om Jonny hade haft 5 poäng mer än han har skulle han ha dubbelt så många poäng som Tommy. Om Jonny hade haft 7 poäng mindre än han har skulle han ha hälften så många poäng som Tommy. Hur många poäng har Jonny?

Både Johan och Sara löser detta problem korrekt men med lite olika lösningsförslag.

Johans lösning:



$7 + 5 = 12$

$12 = 1\frac{1}{2} \cdot \text{Tommy}$

$\frac{12}{3} = 4$

$4 \cdot 2 = 8$

$\text{Tommy} = 8$

Johan löser problemet genom att observera att skillnaden i antal poäng i de två fallen är 7 + 5 = 12 och att skillnaden motsvarar en och en halv del av Tommys poäng. Detta sätt att resonera har stora likheter med det resonemang Johan använde i Exempel 2 (mormors pajer), där han också syntetiserar den givna informationen. Han integrerar i Exempel 2 den givna informationen i en, för honom, inre bild medan han i ovanstående uppgift integrerar informationen dels i en bild dels i en form av ekvation. Han behöver inte, i något av fallen, ekvationslösning för att komma fram till ett svar. Strategierna Johan använder i dessa två uppgifter kan tolkas som ett uttryck för det som i Krutetskiis struktur kallas matematiskt minne.

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:

En annan möjlig lösningsväg är att teckna två ekvationer som motsvarar händelserna i problemet. Vi betecknar Tommys poäng med T och Jonnys poäng med J och får då följande ekvationer:

(1) $2 \cdot T = J + 5$

(2) $0{,}5 \cdot T = J - 7$

Om vi löser detta system genom att subtrahera ekvation (2) från ekvation (1) får vi att: $1{,}5 \cdot T = 12$

Denna ekvation kan jämföras med Johans uttryck ”$12 = 1\frac{1}{2} \cdot$ Tommy”.

Saras lösning bygger på ekvationer, likt det alternativa lösningsförslaget ovan, men hon löser ekvationssystemet på ett annat sätt.

Saras lösning:

$$x + 5 = 2y$$
$$x - 7 = 0{,}5y$$

$$7x + 35 = 14y$$
$$5x - 35 = 2{,}5y$$
$$12x = 16{,}5y$$

$$\overset{8}{y} \quad \overset{11}{x}$$

Sara väljer att lösa ekvationssystemet genom att multiplicera båda leden i den första ekvationen med sju och i den andra med fem. Hon ser genom dessa operationer en möjlighet att eliminera konstanttermerna på ett smidigt sätt. Resultatet blir en ekvation där Sara, troligtvis genom prövning, finner ett par av positiva heltalslösningar.

Elevernas olika lösningar belyser skillnader i begåvningsprofil hos Johan och Sara. I de flesta problem som Johan ställs inför inom ramen för fallstudien använder han ett logiskt angreppssätt, han förkortar lösningsprocessen, han skriver ogärna utan genomför till stora delar resonemangen i huvudet. Hans argumentation är tydligt analytisk. Sara har också utpräglad logisk förmåga men hon använder sig också av bilder och geometriska figurer i sina lösningsförslag.

Vilka möjligheter ger de olika aktiviteterna till identifiering samt stöd och utveckling av elevernas matematiska förmågor?

Som nämnts hade Johan och Sara utmärkt sig på olika sätt i skolans pedagogiska praktik. Johan, som tidigt visade intresse och fallenhet för matematik vilket också uppmärksammades av lärare, tröttnade under mellanstadiet. Då han kom till årskurs sex betraktades han som en lat elev och detta intryck fick även jag av Johan i inledningen till vårt första möte. En elev som anländer sent och ser ointresserad ut uppfattas inte självklart som en elev med särskilda förmågor i det ämne som undervisas. Men efterhand som aktiviteten fortsked visade han intresse, ett intresse som han, enligt läraren, sällan eller aldrig visat i den ordinarie undervisningen under årskurserna sex och sju. Sara hade uppmärksammats som en ordentlig och flitig elev som alltid var duktig. Enligt Sara själv var hon nöjd med den undervisning som erbjöds, vilket, som nämnts tidigare, var hastighetsindividualisering. Hon efterfrågade inte mer utan såg accelerationen i läromedlen som en tillräcklig utmaning. För Johan fanns inte samma motivation att forcera framåt i boken. Han såg inte detta som något nödvändigt och såg inte, som Sara, en tillfredsställelse i att lägga boksidor bakom sig. Han letade istället efter utmaningar och sökte svårare problem. Om dessa inte erbjöds honom frågade han inte heller efter dem utan ägnade tiden åt andra ämnen eller intressen. Även om Sara varit nöjd med den undervisning som förekommit såg hon tävlingen som en inspirerande aktivitet och en positiv utmaning. Hon har sedan denna första tävling efterfrågat och deltagit i flertalet av de matematiktävlingar som erbjuds i Sverige. Johan såg inte tävlingen i sig som något viktigt eller intressant och har inte efterfrågat fler möjligheter att tävla. Däremot utmanade denna typ av problem honom och han har fortsatt att arbeta med liknande problem för att utveckla sina matematiska förmågor.

I min studie utmärkte sig och upptäcktes Johan och Sara på olika sätt, Johan genom en övning som normalt inte ingår i den ordinarie undervisningen i grundskolan, Sara genom en matematiktävling med fokus på problemlösning. Inte någon av dessa aktiviteter hade tidigare förekommit i den undervisning som Johan och Sara fått ta del av, en undervisning som innehållit små möjligheter att visa och ge uttryck för matematiska förmågor och som inte heller erbjudit den extra stimulans som i första hand Johan hade behövt för att utvecklas vidare. Detta visar i ett exempel hur elever med intresse och fallenhet för matematik behöver stimuleras på olika sätt, med en varierad undervisning för att utveckla sina förmågor. Detta framgår också, som nämnts, i läroplanen, Lpo94, där formuleringen ”Läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga.” (Skolverket, 2006, s. 12) för tankarna till en individanpassad och därmed varierad undervisning. För Sara fungerade acceleration, men vi vet inte om hon kunde ha utvecklats mer genom berikning eller en kombination av acceleration och berikning (Assouline &

Lupkowski-Shoplik, 2005; Barger, 1998; Winner, 1999). För Johan fungerade inte acceleration som stimulans och genom Johans uttalande kan vi möjligen tro att någon form av berikning varit att föredra.

I fallstudien valde jag att observera Johan och Sara i en annan typ av matematiska aktiviteter än de som matematiklektionerna erbjudit. Till skillnad från lärobokens i många fall rutinmässiga uppgifter (Brändström, 2005), som oftast kunde lösas med imitativa resonemang, valde jag problem som krävde kreativa resonemang och som tog en variation av matematiska förmågor i anspråk (se även Boesen, 2006). I Johans och Saras lösningsförfarande kunde jag hos båda observera en förmåga att formalisera matematiskt material, förstå och välja ut relevant matematisk information i en textuppgift samt att både se helheten och samtidigt arbeta med delarna i ett problem. Observationerna synliggjorde också deras förmåga till sekventiellt logiskt resonemang, förmåga att se mönster och genomföra generaliseringar, förmåga att förenkla och förkorta lösningsvägen samt i alla uppgifter en lust och ett intresse för problemet som kan sammanfattas i det tidigare nämnda matematiska sinnelaget (Krutetskii, 1976). Men här fanns även skillnader mellan Johans och Saras uttryck för matematisk förmåga. Detta märktes inte minst i de utmaningar de fick i samband med TV-intervjun. Båda hade kommit fram till samma svar men de hade angripit problemen på helt olika sätt och producerat två helt olika lösningsmetoder. I de allra flesta problem som Johan ställdes inför i fallstudien använde han sig av sekventiellt logiskt resonemang samt förmåga att formalisera ett matematiskt material, d.v.s. att skilja form från innehåll och arbeta med relationer och samband. Han visade även förmåga att förkorta och förenkla matematiska resonemang och han utförde arbetet till stora delar i huvudet. Sara var mycket strukturerad i sitt lösningsförfarande, på samma sätt som Johan visade hon förmåga att formalisera ett matematiskt material, och det var relativt lätt att följa hennes tankegångar och hon använde sig av både bilder och symboler i sina lösningsmodeller. Hon hade också en uthållighet i problemlösningsförfarandet (jfr. Sheffield, 2003) något som Johan saknade. Även om Sara inte lyckades förstå eller lösa problemet direkt gav hon inte upp utan arbetade tålmodigt vidare. Johan löste oftast problemen direkt eller efter en kort tids tyst betänketid men om han inte lyckades gav han oftast upp. Han hade ofta svårt att förklara hur han hade kommit fram till lösningen och såg förklaringen som självklar, ett beteende som förekommer bland elever med särskilda förmågor i matematik (se Barger, 1998).

Analysen av Johans och Saras lösningar av Känguruproblemen visar att det krävs goda matematiska kunskaper för att identifiera, tolka och förstå elevers olika sätt att arbeta med och lösa matematiska problem. Det visar sig särskilt tydligt i Johans exempel två med mormors pajer. Lärare måste ha en rik repertoar av olika tolkningsalternativ för att kunna lyfta fram elevens ibland kortfattade och ofullständiga formuleringar och ge dem en matematiskt rimlig tolkning. Tidigare forskning visar dessutom att ämneskunskaper påverkar lärarens pedagogiska ämneskunnande, d.v.s. lärarens förmåga att anpassa undervisningen till eleven och särskilt då i en undervisning som rör uppgifter som kräver avancerat tänkande (higher-order tasks) som t.ex. då uppgiften ställer krav på elevens förmåga att tolka och tillämpa matematiska begrepp (för en översikt av forskning inom området, se Bentley 2003, s. 32-34). Lärare som saknar sådan kompetens kan få svårt att stödja och stimulera elever med särskilda förmågor i matematik.

Sara, som under våren i årskurs åtta ansågs vara klar med grundskolans kurs, skrev det nationella provet med toppresultat. Hon arbetade sedan vidare med gymnasiekursen under årskurs nio. Skolan hade inga extra resurser att bidra med utan det var upp till läraren att under ordinarie tjänst stödja och stimulera Sara. Hon var med på lektionerna och arbetade självständigt men hon fick även extra hjälp en timme per vecka av sin lärare på dennes fritid. Johan som vid tidpunkten för första mötet, enligt honom själv, föräldrar och lärare, inte hade något intresse för den skolmatematik som erbjöds hittade under fallstudiens gång tillbaka till den motivation och glädje som han känt inför matematiken under de tidiga skolåren. Detta gjorde han med hjälp av de aktiviteter som fallstudien erbjöd tillsammans med en stor insats från Johans lärare under årskurs åtta och nio (Pettersson, 2008).

Johans och Saras gymnasieval och gymnasiestudier

När det var dags för gymnasiestudier valde Johan och Sara samma programinriktning, naturvetenskapligt program, vilket kändes självklart och naturligt för dem båda. De gjorde däremot olika val när det gällde den fortsatta matematiska inriktningen. Johan blev kvar i den lokala miljö där han bodde och valde en traditionell naturvetenskaplig inriktning. Sara flyttade med sin familj till en större stad och antogs till en matematikintensiv utbildning, en utbildning som med dagens terminologi kan kallas ”spetsutbildning”. Med tanke på vad som ovan sagts om aktivitetens betydelse för utvecklingen av matematiska förmågor var det en spännande utveckling för fortsättningen av dessa fallstudier. Vad hade dessa skilda miljöer att bjuda eleverna och vad kunde de komma att betyda för elevernas fortsatta matematiska utveckling?

Sara

Sara valde alltså en matematikintensiv utbildning i en större stad. Detta hade föregåtts av besök vid två av landets då möjliga utbildningsalternativ när det gällde matematikintensiva utbildningar. Idag finns, som nämnts tidigare, spetsutbildningar i matematik vid ett flertal orter i Sverige. Familjen hade diskuterat situationen och var överens om att denna flytt inte bara gynnade Sara utan även övriga familjemedlemmar så alla såg förändringen som något positivt. Mitt första besök hos Sara i hennes nya miljö skedde hösten 2008. Sara hade då läst drygt ett år av sina gymnasiestudier. Besöket innehöll förutom intervjuer med Sara och hennes familj även intervjuer med Saras lärare i matematik under årskurs ett, Lärare 1, hennes lärare i matematik under årskurs två och tre, Lärare 2, hennes lärare i fysik samt observationer i Saras klass under matematiklektioner. Ytterligare ett besök med intervjuer av Sara, hennes lärare i matematik under årskurs två och tre samt observationer av matematiklektioner i Saras klass gjordes under våren 2009.

Saras gymnasieskola

Saras lärare under årskurs ett, Lärare 1, berättar att gymnasieskolan har sju paralleller med naturvetenskapliga klasser och eleverna som går matematikintensiv utbildning är jämnt fördelade över dessa klasser. Eleverna har all sin undervisning, förutom den i matematik, med sin ordinarie klass. Under matematiklektionerna samlas de i vad de kallar ”mattesektionen”. I denna sektion finns totalt ca 75 elever, uppdelade på tre årskurser vilket innebär tre till fyra elever från varje naturvetenskaplig klass. Studierna vid mattesektionen är tuffa och av de 32 elever som antas till utbildningen är i genomsnitt drygt 20 kvar efter tre år. Eleverna vid mattesektionen läser A, B och C kurserna i matematik under årskurs ett. A-kursen har under senare år flätats in i B-kursen då eleverna som söker sig till mattesektionen oftast redan har klarat av A-kursen. Under årskurs två läses D, och E-kurserna, diskret matematik samt en breddningskurs. Tredje årskursen läser eleverna som mest fem breddningskurser i matematik. En del av dessa breddningskurser motsvarar kurser vid universitetet och eleverna kan, om de så önskar, tentera av dessa. Övriga breddningskurser varierar vad gäller innehåll och utformning och är beroende av den lärare som ansvarar för kursen.

Eleverna som läser vid mattesektionen erbjuds ca 80 minuter mer undervisning i matematik per vecka än de som läser en traditionell naturvetenskaplig utbildning. Lärare 1 menar att undervisningen i övrigt, vad gäller exempelvis arbetssätt, inte skiljer sig nämnvärt åt mellan de traditionella naturvetenskapliga klasserna och mattesektionen. Om det skiljer något är detta individberoende, både vad gäller lärare och elever. Lärare 2 anser dock att det är stor skillnad att undervisa mattesektionens elever och övriga elever. I undervisningen på mattesektionen kan han vara mer impulsiv och komma med problem som ligger utanför kursen medan han i övrig undervisning måste ha mer strukturerade genomgångar för att eleverna inte ska gå därifrån. ”*Man får ju lägga sig på en helt annan nivå, man kan inte prata om alls samma saker och det går inte att prata om någon intensitet, det är så stor skillnad så det går inte att jämföra.*”

Lärare 1 menar vidare att det som är speciellt för lärarkollegiet vid denna gymnasieskola är sammanhållningen och att lärarna är stolta över det de gör. Men det som framförallt utmärker denna gymnasieskola är ”*att det inte är fult att vara duktig tvärtom det är helt OK att vara duktig*”. Lärare 1 menar att det uppmärksammas så fort någon gjort något bra, vunnit en tävling eller fått ett stipendium. Det finns förutom mattesektionen även liknande sektioner för ämnena tyska, franska och engelska. Lärare 1 berättar att det finns disputerade lärare i de flesta ämnen och en stor del av lärarna har viss forskarbakgrund. Hon påpekar också att skolan självklart erbjuder stödundervisning där så behövs men att det är sektionernas arbete och uppmuntran av de duktiga som är de utmärkande dragen för skolan.

Lärare 1 berättar att hon tidigare har haft mellan 10 och 20 % nedsättning för att driva olika projekt, möten och seminarieserier inom mattesektionen. Förhållandena har emellertid blivit något sämre under de senaste åren vilket även Lärare 2 intygar. Samma sak gäller kompetensutveckling för lärarna, vilken tidigare, enligt båda lärarna, varit bra. De har haft möjlighet att delta i konferenser och vissa sommaraktiviteter. Nu är ekonomin sämre och därmed är fortbildningsmöjligheterna begränsade. Det som är värre, anser Lärare 2, är att de extra aktiviteter som tidigare ordnats för eleverna vid mattesektionen har dragits in. Han har tidigare haft kvällsaktiviteter för eleverna i form av exempelvis tävlingsmatematik. Där har funnits möjlighet för de elever som önskat, oftast ett 30-tal, att finslipa formen inför kommande matematiktävlingar. Detta sker nu endast om det finns tillräckligt engagerade lärare som kan tänka sig att göra detta på sin fritid. Visserligen, menar Lärare 2, har eleverna som går vid mattesektionen mer tid för matematik än övriga elever men de läser betydligt fler kurser i ett redan högt tempo och övriga aktiviteter har svårt att få utrymme.

Undervisningen i Saras klass under gymnasiet

Enligt Sara skiljer sig de båda lärarnas undervisning till viss del åt, men båda är engagerade lärare som brinner för matematik och undervisning. Detta upplever även jag i intervjuer med och observationer av lärarna. Sara menar att Lärare 1 har en mer traditionell undervisning med genomgång av några uppgifter och därefter enskilt arbete under handledning. Under första året med Lärare 1 kunde de, enligt Sara, även ha grupparbete med problemlösning, laborativa övningar eller titta på någon film om matematiker.

Lärare 1 berättar att hon började första matematiklektionen i Saras klass, som hon brukar, med en parövning. Detta främst för att elevernas nervositet skulle släppa men också för att vänja dem vid detta arbetssätt. Hon använder en hel del par- och gruppövningar för att eleverna ska få träna sig i matematisk kommunikation och i att resonera logiskt men också för att stärka sammanhållningen i gruppen. Lärare 1 har förutom i intervjuerna med mig även beskrivit sin undervisning i två artiklar i Nämnaren. Lärare 1 använder varierade arbetssätt där laborativt arbete blandas med en hel del provokationer och hon räds inte för att dels utmana sina elever dels följa upp elevernas frågor eller kommentarer, som den gången en elev klockan åtta på morgonen började lektionen med följande fråga till Lärare 1:

> *”Du Lärare 1, om jag nu lever i tre dimensioner och så slänger jag ner ett fyrdimensionellt klot, hur kommer det att se ut?”*

Lärare 1 berättar att så fort någon ställer en sådan fråga *”åker den upp på tavlan”* och så får den bli veckans fråga *”så att de lär sig att det är OK att ställa frågorna*”. Lärare 1 har höga förväntningar på sina elever och hon litar på att de kan klara av att lära sig matematik: *”De kan mer än vi tror och jag vet att de har mycket att bidra med som kommer att utveckla lektionerna*”.

Lärare 1 berättar att hon ofta konstruerar något svårare prov för mattesektionens elever då de behöver fler utmaningar. En följd av detta blir att eleverna ibland får markeringar för felaktigheter vilket kan ge upphov till upprörda känslor då eleverna i sina tidigare matematikstudier sällan upplevt misslyckanden. Lärare 1 menar att hon som lärare är noga med att förklara för eleverna att det är helt i sin ordning att göra fel och att inte kunna allt. Hon berättar vidare om Sara *”Hennes skriftliga redogörelser är ju klanderfria, däremot så gjorde hon ju fel ibland, vilket nog var en ny upptäckt, att man kan tänka fel ibland*”. Det är också viktigt, menar Lärare 1, att eleverna får mer utmanande prov men att detta inte påverkar deras betyg i matematik negativt. Eleverna jämförs med alla övriga elever som deltar i samma kurs. Båda lärarna menar att jämförelsen sker dels i de nationella proven som har stor betydelse, dels genom att lärarna under lektionerna uppmärksammar elevernas specifika förmågor som exempelvis deras förmåga att resonera logiskt.

Saras beskrivning av Lärare 2:s undervisning som traditionell stämmer väl överens med mina observationer. Han inleder med en genomgång av ett avgränsat område, men inte sällan hamnar han utanför detta område vilket till stor del beror på de frågor han får från eleverna. Genomgången tar knappt halva lektionstiden i anspråk och övrig tid arbetar eleverna enskilt eller tillsammans med kamraterna vid samma bord och Lärare 2 handleder. Vid genomgången väljer Lärare 2 sällan att lösa standarduppgifter utan mer utmanande uppgifter antingen valda ur boken eller ur hans egen problemsamling. Tempot är högt men han för hela tiden en dialog med eleverna, uppmuntrar dem och har höga förväntningar på dem.

Något som jag redan vid första observationstillfället i klassen uppmärksammar är att flickorna hela tiden antecknar medan pojkarna enbart lyssnar. Könsskillnaden är tydlig och gäller för samtliga observationer. Det är också en spridning i aktivitetsgrad. Det är främst pojkar som ställer frågor eller ber om hjälp och främst flickor som sitter tysta under genomgången och sällan ber om hjälp under det enskilda arbetet. En pojke sover ofta under lektionerna, trots att Lärare 2 varierar rösten på ett markant sätt och för dialog med eleverna under genomgångarna. Vid ett tillfälle, direkt efter genomgången, ger Lärare 2 eleverna en svår uppgift att lösa. Han presenterar uppgiften med orden *”Nu kommer det en riktig utmaning, den är rysligt svår. Om det är någon som klarar* *den vill jag att ni visar det för mig. Den är jättesvår. Det finns lärare som kommer och frågar mig om hur man löser denna uppgift*". Pojken vaknar inte utan sover lugnt vidare. Efter en kort stund ropar Lärare 2 ut i klassen "*Han har redan klarat den och det är en perfekt lösning, helt perfekt!*". En elev i klassen har redan löst den svåra uppgiften och Lärare 2 visar sin glädje och uppskattning. Då vaknar den sovande pojken: "*Vad då, vilken uppgift?*". Lärare 2 förklarar att han under lektionen givit en svår uppgift som han vill se lösningen på om någon lyckas. Han visar också uppgiften för pojken. Den nu vakne pojken börjar genast arbeta med uppgiften och det dröjer inte länge förrän Lärare 2 återigen visar sina känslor: "*En lösning till och detta är också en perfekt lösning!*". Lärare 2 intygar, senare i en av intervjuerna, att det inte var en tillfällighet att pojken delvis sov under mina observationer. Lärare 2 menar att pojken ofta sover sig igenom genomgångarna om han upplever uppgifterna som ointressanta eller för lätta. Lärare 2 säger att han brukar låta honom sova ett tag för att sedan väcka honom och ge honom en riktig utmaning och då arbetar han alltid. Vid mina observationer sitter alla elever kvar och arbetar aktivt under andra hälften av lektionen då det är enskilt arbete. Enligt både Sara och Lärare 2 är eleverna alltid aktiva vid det enskilda arbetet. Sara menar att alla är intresserade och tycker det är bra att kunna fråga Lärare 2 om hjälp om så behövs. Lärare 2 menar att eleverna är naturligt intresserade, och "*… ibland går jag ju in med ett spännande problem från Princeton University och det vill ju ingen missa*".

Saras utveckling under gymnasiet

Sara berättar att hon kände sig nervös inför starten av gymnasiet. Hon tyckte att det skulle bli spännande men framförallt längtade hon efter "*svårare matte och att få utmana mig själv*". I de intervjuer jag haft med Saras lärare är de rörande överens om att Sara är en flicka utan svaga sidor i matematik. "*Det skulle i så fall vara att hon är så blyg*", säger Lärare 2, "*men några svaga sidor matematiskt det har hon inte*". Lärare 2 håller med och berättar om första tillfället med klassen i årskurs ett: "*Min spontana upplevelse av Sara var att hon var mycket tyst, mycket tyst och försagd. Såg nervös ut*". Men hon berättar vidare att många av de elever som börjar vid mattesektionen är ganska nervösa. Hon tror att det beror på att de börjat i en ny skola, de känner inte varandra, men framförallt är de oroliga för hur mycket bättre alla övriga elever är: "*Detta gällde nog även Sara*", menar Lärare 2.

Båda lärarna intygar att den årskurs som Sara går i är en av de bästa som de upplevt under sin tid vid gymnasiet. Sara är, enligt Lärare 2, en mycket duktig elev med särskilda matematiska förmågor och toppresultat på alla tester och prov och hon har naturligtvis högsta betyg på alla kurser men hon sticker inte ut i denna klass. Hon ställer inte frågor och redovisar inte sina funderingar eller ber om extra material utan hon verkar nöjd. Detta intygas även av Lärare 1: "*Visst kommer hon med frågor emellanåt men hon utmärker sig inte, verkar inte* *riktigt lika nyfiken som en del andra, hittar inte på egna problem i samma utsträckning och kommer inte med "konstiga frågor"*. Lärare 1 syftar här bland annat på uppgiften om fyrdimensionella klot som nämnts ovan. Hon menar vidare, angående elever som kommer med "*konstiga frågor*" att "*dessa elever behöver inte vara de smartaste men de har ett enormt driv av att veta mer, fråga och veta mer, mer mer*" men fortsätter "*är det så att Sara inte har det intresset av att sitta och tänka på fyrdimensionella klot så gör ju inte det något, jag menar man måste ju inte ha* ***det*** *intresset för att vara duktig i matte*". Men visst kan Sara bli engagerad i andra elevers problem och har, enligt Lärare 2, blivit lite modigare med tiden. Lärare 1 minns speciellt ett tillfälle då Sara engagerade sig och diskuterade en uppgift som en annan klass hade föreslagit. En annorlunda, logisk uppgift och, enligt Lärare 1, tycktes Sara gilla logiska problem.

> *"Det var en gång ett folkslag som levde på en ö. De hade en mycket konstig lag som gick ut på att alla som hade en röd prick i pannan var tvungna att lämna ön. Fast det var förbjudet att tala om för någon att den hade en prick i pannan och det fanns heller ingen möjlighet att spegla sig. En dag kom en forskningsresande till ön. På ön fanns då tre personer förutom forskaren, och alla hade prickar i pannan! Forskaren fick höra deras lag, och eftersom han inte ville tvinga någon att lämna ön så talade han inte om att alla hade prickar. Men så tänkte han, det kan väl inte skada om jag säger att åtminstone en av er har en prick. Hur många dagar tog det innan alla hade lämnat ön?"*

Problemet, som saknar tydliga förutsättningar och därmed inte är formellt matematiskt korrekt, lämpar sig väl i undervisningssituationer och har karaktären av öppet problem som stimulerar till diskussioner och matematiska resonemang. När jag, långt senare, frågade Sara om hon minns hur hon löste problemet gav hon följande resonemang:

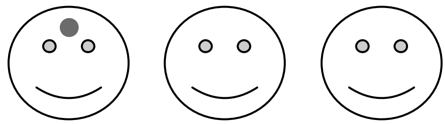
> *"Direkt efter att forskaren sagt att minst en person hade en prick så lämnade ingen ön. Då visste alla att varje person kunde se minst en prick på någon annan så därför visste alla att det måste finnas minst 2 prickar. Ingen lämnar ön och då förstår de att alla ser 2 prickar vilket betyder att alla har prickar."*

Nedan visas ett lösningsförslag av mer generell karaktär, med fallbeskrivningar, där antalet invånare på ön och antalet med röda prickar kan variera. Förslaget, fall 3, liknar Saras resonemang ovan. Därefter ges även ett motsägelsebevis för det aktuella fallet. I båda lösningsförslagen har antagande gjorts att individerna på ön träffas en gång per dygn och att de måste lämna ön inom ett dygn från det att de inser att de har en prick i pannan.

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:

Förutsättningen i lösningsförslaget är att de tre invånarna vet att minst en person har en röd prick. De möjliga fallen är då att det är en, två eller tre personer med röd prick.

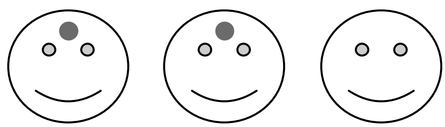
Fall 1: Precis en person har en röd prick.



A B C

Den person som har röd prick benämns A. Person A ser att ingen annan person har en röd prick och kan omedelbart dra slutsatsen att han är den som har en röd prick och lämnar därmed ön inom ett dygn.

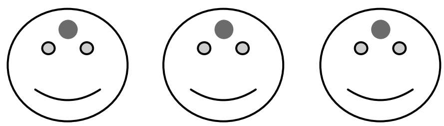
Fall 2: Precis två personer har röd prick.



A B C

De två personer som har röd prick benämns A och B. Första dagen ser A att en annan person B har en röd prick. Från detta kan A dra slutsatsen: om jag inte har en röd prick kommer personen med den röda pricken, B, att lämna ön inom ett dygn, enligt resonemanget i fall 1. Den andra dagen konstaterar A att ingen lämnat ön och drar då slutsatsen att han har en röd prick och lämnar ön efter två dygn. B resonerar på samma sätt och lämnar också ön efter två dygn.

Fall 3: Alla tre personerna har röd prick.



A B C

> Då vet att A att två andra, B och C, har röd prick. Från detta kan A dra slutsatsen: om jag inte har en röd prick kommer de två andra personerna att lämna ön inom två dygn, enligt resonemanget i fall 2. Den tredje dagen konstaterar A att ingen lämnat ön och kan då dra slutsatsen att han har en röd prick och lämnar ön. B och C resonerar på samma sätt och alla tre lämnar ön efter tre dygn.

Vid ett annat tillfälle där Sara, enligt Lärare 1, visade sin logiska förmåga, sin abstraktionsförmåga och även snabbhet i tanken, inträffade då eleverna arbetade med en gruppövning. Uppgiften skulle, enligt Lärare 1, locka eleverna till laborativt arbete och få dem att samarbeta. Eleverna fick tillgång till A4 ark och frågan som ställdes var: ”*hur många A4-ark behövs för att lägga en kvadratmeter*”. Grupperna låg på golvet och kämpade med sina A4 ark som de inte fick klippa. Lärare 1 berättar:

> *”Sedan fanns det en grupp med tre flickor som bara satt på bänkarna och dinglade med benen och väntade på att de andra skulle bli klara. Det var Sara och de andra. Jag visste precis, men jag sa inget utan lät de andra kämpa och sedan efter 20 minuter sa jag. Ja, men titta nu på Sara och de andra, för det var Sara som tänkt. Vad gör de? De sitter bara här och latar sig! De hade bara slängt ner 16 ark på golvet. De hade ju räknat ut hur många det skulle vara och sedan bara lagt ut dem. Det behövde ju inte vara en kvadrat, vilket de andra kämpat med.”*

Arean av ett A0 ark är en kvadratmeter och förhållandet mellan sidorna är kvadratroten ur två. Man får övriga format genom successiv halvering av A0 varvid förhållandet mellan sidorna bibehålls (i serie till A7). Antingen kunde eleverna använda sig av ovanstående information och på så sätt göra halveringen ner till A4 eller så kunde de beräkna arean av ett A4 ark och räkna ut hur många sådana ark som behövdes för att täcka en kvadratmeter.

Avslutningsvis berättar Läraren 2 att hon ser Sara som mycket säker på det hon gör ”det ser ibland ut som en trettiofemårings skrivning: alla pilar är på rätt ställe och håll, allt är så exakt och prydligt”.

Saras upplevelse av gymnasiet och hennes fortsatta val

Enligt Sara är skillnaden mellan matematikundervisningen i grundskolan och gymnasiet mycket stor, framförallt kunskapsmässigt. ”*I grundskolan var ju nästan allt samma sak. Det är mycket roligare nu, lite mer på min nivå, det går mycket snabbare och man måste lyssna på genomgångar*”. Då vi diskuterar hur hon ser på sig själv som ”*produkt av hårt arbete*”, vilket var ett uttalande från hennes lärare under grundskolan, eller som en matematiktalang säger hon först ”*Lite blandning. Kände väl att jag hade lätt för matte men jag arbetade också hårt med* *övningarna så uttrycket var nog inte helt fel*" men hon menar vidare att "*efter det att jag träffat dig så såg jag nog mig mer som en talang. Nu gör jag inte det om jag jämför med Axel* (elev i samma klass) *till exempel*". Påståendet bemöter jag med: "*Kanske typiskt dig att jämföra dig med just Axel?*" varpå Sara svarar "*Ja, jag jämför ju mig med den som är bäst*".

Sara har nu tagit studentexamen och hon fullföljde sin matematikinriktning även under årskurs tre då hon tog fyra av fem breddningskurser som erbjöds. Hon läste även två breddningskurser i fysik samt gjorde andra individuella val som gav meritpoäng till högskoleutbildningar. Sara är mycket nöjd med sin gymnasieutbildning och menar att hon fått de utmaningar hon behövde och som saknades under hennes tid i grundskolan. Hon bestämde sig tidigt för att ta ett sabbatsår från studier efter gymnasiet, dels för att hon inte var riktigt säker på vad hon vill läsa vidare inom, dels för att ge idrotten en chans kanske kombinerad med språkstudier vid ett utländskt universitet.

Johan

Johan valde ett traditionellt naturvetenskapligt program vid ortens gymnasieskola. Han säger i en intervju, då diskussionen om spetsutbildningar hade startat: "*Hade det funnits en sådan här när jag skulle välja hade jag valt den, men jag hade inte flyttat*". Under hösten 2008, då Johan gick i årskurs två, genomförde jag observationer i Johans klass under matematiklektioner samt intervjuer med Johan, hans föräldrar och hans lärare i matematik under årskurs två. Jag träffar även gymnasieskolans rektor vid ett antal tillfällen, främst för att diskutera skolans möjligheter att söka spetsutbildning men även för diskussioner om Johans situation.

Johans gymnasieskola

Skolan är en traditionell gymnasieskola med två naturvetenskapliga klasser i varje årskurs. Johans lärare i årskurs två berättar att eleverna läser en matematikkurs per termin vilken innebär att A och B kursen läses under årskurs ett och C och D kursen läses under årskurs två. Det är inte alla som läser E-kursen men de som gör det läser kursen under årskurs tre. Ibland läses den enbart under höstterminen men på sista tiden har eleverna läst den över hela årskursen. Det anser läraren vara ett sämre alternativ dels för att det är en liten kurs dels för att skolan då inte kan erbjuda andra breddningskurser. Diskret matematik, vilken är den enda valbara breddningskursen vid gymnasiet, kan läsas parallellt med kurs E. Samarbete finns med ortens högskola och vid några tillfällen har gymnasieelever läst fristående matematikkurser vid högskolan parallellt med studierna i årskurs tre.

Enligt läraren har lärarna vid gymnasiet goda möjligheter till kompetensutveckling och de deltar i konferenser eller på andra sätt fortbilda sig. Han anser dock, tillsammans med många andra lärare vid gymnasieskolan, att det är för många studiedagar där innehållet är generellt. Fler borde istället vara ämnesspecifika.

Undervisning i Johans klass under gymnasiet

Ett vanligt undervisningspass i matematik med Johans lärare i årskurs två består av genomgång av ett specifikt avsnitt och därefter löser läraren några uppgifter i anslutning till detta avsnitt. Han försöker få eleverna delaktiga i lösningsprocessen och lyckas till viss del då det finns elever som svarar och också påpekar om något blir fel. Det är dock sällan som Johan deltar i dessa dialoger. Han sitter oftast längst bak, han har matematikboken med sig men slår sällan upp den. Efter genomgång och gemensam lösning av uppgifter följer eget arbete med övningsuppgifter i läromedlet. Eleverna sprider då ut sig, vissa ensamma, vissa gruppvis både i klassrummet och i olika grupprum. Läraren går runt och hjälper till, förklarar i lugn och ro och med variation. Johan berättar att han inte brukar räkna så mycket uppgifter. Han säger att han alltid är med på genomgångarna som läraren håller och att han tycker att dessa är mycket bra. I intervjun med läraren intygar han att Johan alltid är med både vid genomgångar och vid det enskilda arbetet, men det är ganska sällan som han arbetar med matematikuppgifter under enskilt arbete. Johan menar att om han är med på genomgångarna och förstår innehållet i dessa behöver han inte anstränga sig så mycket mer för att få högsta betyg. Han berättar att han nog inte har räknat mer än en handfull uppgifter under A och B kurserna. Han brukar göra någon c-uppgift (svårare nivå) för att kontrollera om han förstått. Om kontrollen går bra så är han nöjd annars går han tillbaka och läser igenom texten i boken och de räknade exemplen och försöker på nytt.

Enligt läraren är Johan ”*kortfattad när han skriver men det ligger smartness bakom, där finns substans*”. Vid ett tillfälle när Johans klass haft ett delprov i Matematik C gick läraren och jag tillsammans igenom Johans lösningar och läraren uttrycker både ros och ris. ”*Han klarar rätt avancerade problem med klara tankegångar och missar sedan enkla uppgifter, inte bara slarvfel utan också tankefel.*” Jag kan se att han fortfarande är kortfattad i sina lösningar men det är snyggt och prydligt skrivet. Johan visar i uppgifterna, enligt läraren, att han arbetar logiskt, det är rent, kortfattat och elegant och han har lösningar som inga andra elever har.

Johans utveckling under gymnasiet

Som nämnts ovan fick Johan en ny lärare under årskurs åtta i grundskolan. Hon försökte tillsammans med Johan få klarhet i hans styrkor och svagheter. Klart var att han hade stora brister inom grundläggande matematiska områden samtidigt som han hade en mycket god logisk förmåga. Han föreföll lat och boken lockade inte till aktivitet. Läraren gav honom andra uppgifter dels för att se vad han behövde träna mer på dels för att stimulera honom och få honom aktiv. Tillsammans med den pågående fallstudien gjorde detta att

Johan återfann sitt intresse för matematik, tog av sig hörlurarna och började arbeta under matematiklektionerna. Johan insåg att han förlorat mycket under de år han ägnat sig åt annat på matematiklektionerna. Johans nyvunna energi avspeglade sig även inom andra ämnen och han slutade grundskolan med höga betyg i de flesta ämnen. Han kom därmed till gymnasiet väl förberedd och även motiverad för studierna vid det naturvetenskapliga programmet. Enligt läraren är Johan ingen dussinelev ”*Han kan ju mycket väl sitta en matematiklektion och läsa en skönlitterär bok. Men eftersom jag vet att han reder ut det och löser det hemma på sitt sätt så ingriper jag inte som jag kanske skulle göra med någon annan*”. Johan själv menar att han inte har tid att sitta och räkna enligt planeringen tillsammans med de andra. Då finns det intressantare saker att göra. Det är också mycket lättja som gör att han inte anstränger sig mer i matematiken. Han poängterar dock att det är roligt nu när han får använda matematiken i andra ämnen, exempelvis inom programmering. Det är dock viktigt för honom att få högsta betyg på matematikkurserna, men utöver detta lägger han inte ner mer tid och energi. Johan anser att det finns tillräckliga utmaningar för honom på gymnasiet och han läser utökad studiekurs med 500 poäng däribland psykologi, latin, historia samt extra programmeringskurser m.m.

Johans upplevelse av gymnasiet och hans fortsatta val

Johan trivs bra på gymnasiet. Han menar att han nu får de utmaningar han behöver både i matematik och i andra ämnen. Han upplever sin sociala situation som bättre än i grundskolan. Han ser även fram emot att göra sitt projektarbete som kommer att innebära någon form av spelutveckling. Han berättar att detta projektarbete och resultatet av arbetet kan fungera som ett inträdesprov till den ”*riktiga världen*”, en värld med människor han kan tänka sig att umgås och diskutera saker med. Han trivs med gymnasieklassen även om han inte har så mycket umgänge med klasskamraterna. ”*Att samtal med klasskamrater känns helt meningslöst, de är inte på samma nivå.*” Jag undrar om samtalen gäller skolämnen eller flickor. Han menar att diskussionerna oftast handlar om datorspel varpå jag blir förvånad och undrar om inte detta är Johans intresse. Jag blir då upplyst om att ”*de diskuterar hur man ska ta sig från en nivå till en annan inom ett spel och jag är intresserad av att diskutera hur man bygger spelet med allt vad det innebär*”. Detta förklarar även intresset för psykologi och den extra kurs Johan valt inom detta område. Han förklarar att spelutvecklare behöver ha god kännedom om de psykologiska faktorerna som gör att människor fastnar för spelet man konstruerar. Johan har några kamrater som han umgås med på fritiden och menar att han inte lider brist på socialt umgänge. Johans matematiklärare i årskurs två, som varit Johans mentor sedan skolstarten, berättar om första mötet med Johan vid gymnasiestarten ”*Jag var mentor för honom och det var en aktivitet där de skulle lära känna varandra. Då gick han bredvid mig och pratade med mig under hela den dagen. Han tyckte att det gav honom mest då jag påpekade att han kanske skulle* *lära känna de andra*". Men läraren berättar också att Johan på sista tiden varit engagerad i elevrådet och menar att "… *han är ju inte blyg och tyst eller håller sig undan*". Vidare säger läraren att "… *när klassen ska debattera om något, för eller emot, är han ju inte den som höjer sin röst mer än andra*".

Johan har nu, som Sara, tagit studentexamen och berättade vid studentfesten, dit jag var inbjuden, att han kände sig nöjd med sin gymnasieutbildning och sina betyg. Han berättade också att han tidigt bestämt sig för att läsa vidare direkt efter gymnasiet och att han sökt till en civilingenjörsutbildning inom data och programmering i en större stad. Vid ett uppföljande samtal med Johans föräldrar under hösten 2010 får jag information om att allt går bra för Johan. Han trivs med sin nya utbildning och i sin nya stad.

Olika miljöers betydelse för elevernas matematiska utveckling

Vi har ovan sett att ämnet matematik har olika innehåll, uppläggning och utförande i de båda elevernas naturvetenskapliga gymnasieprogram. I Saras fall är undervisningen anpassad till elever som har intresse och fallenhet för matematik och syftet är förutom ren kunskapsinhämtning att utmana och stimulera eleverna. Läraren har möjlighet att hålla ett högt tempo med en del berikningar både vad gäller innehåll och arbetssätt. Lärare med ansvar för matematikundervisningen i ett traditionellt naturvetenskapligt program har inte samma möjligheter. Eleverna har visserligen gjort ett aktivt val genom att välja ett program med större andel matematik än övriga gymnasieprogram men deras förutsättningar och intresse för matematik har oftast större variation. På samma sätt som i grundskolan behövs då mer individanpassad undervisning och lärarens möjligheter att ge spännande utmaningar i helklass är begränsade. Denna svårighet framgår tydligt då Saras lärare i årskurs två och tre jämför sin undervisning vid mattesektionen med undervisning på de traditionella programmen. "*Man får ju lägga sig på en helt annan nivå, man kan inte prata om alls samma saker och det går inte att prata om någon intensitet, det är så stor skillnad så det går inte att jämföra.*" Sara uttrycker i en intervju att hon säkert hade kunnat trivas lika bra i en vanlig klass om hon där fått samma undervisning, d.v.s. utmaningar, stimulans och möjlighet att läsa vidare i ett högre tempo med stöd av lärare. Jag tolkar att hon menar att det viktigaste är undervisningens utformning, inte att elever med samma intresse är samlade i samma grupp. Men hon säger vidare att hon inte tror att en sådan individanpassad undervisning hade varit möjlig. Även undervisningen vid mattesektionen kunde, enligt Sara, variera mellan olika lärare. Saras lärare i årskurs två och tre höll sig till en mer traditionell undervisning med föreläsning och enskilt arbete medan Saras lärare i årskurs ett använde sig av mer varierat arbetssätt och arbetsform med fler laborationer och undersökande aktiviteter i olika gruppkonstellationer.

Vid mattesektionen börjar varje år 32 elever varav knappt 20 är kvar efter tre år. I Saras klass var endast 16 elever kvar vid mattesektionen efter två år. I utvärderingen av Spetsutbildningarna (Skolverket, 2010) beräknas avhoppen från de nio spetsutbildningar som startade hösten 2009 uppgå till knappt 10 % efter första året.

Båda eleverna är nöjda med den undervisning de får i sina respektive miljöer. Saras båda matematiklärare beskriver även de en nöjd elev som sällan frågar, varken om stöd i olika övningar eller efter fler utmaningar. De beskriver däremot flera andra elever vid mattesektionen som ständigt har nya frågor och som söker utmaningar som de antingen vill ha hjälp med eller vill utmana lärare och övriga elever med. Johans lärare säger att han aldrig under sin lärartjänst fått förfrågningar om fler uppgifter eller utmaningar vid sidan om läromedlet varken från Johan eller från någon annan elev under sin lärartjänst. Men han menar vidare att han ser fördelar med att ha duktiga elever i sin klass då ”*de drar, om de är lojala, undervisningen framåt*” och fortsätter: ”*De andra eleverna märker att kan han så ska ju vi också kunna. Det är positivt*”.

Saras skola har numera valt att sprida ut de elever som går en matematikintensiv utbildning över samtliga naturvetenskapliga program istället för att placera alla i samma klass. Här menar Saras lärare i årskurs två och tre, som arbetat länge vid gymnasiet och även har erfarenhet av hur det var tidigare då alla matematikelever gick i samma klass, att det finns för- och nackdelar med dessa grupperingar. Tidigare, när alla gick i samma klass, kunde konkurrensen bli mycket hård och det fanns ibland osämja i gruppen dels på grund av konkurrensen dels på grund av många starka viljor med samma intresse. Detta upplever han inte på samma sätt nu när eleverna, i alla övriga ämnen, går i olika klasser. Både Saras lärare i matematik och hennes lärare i fysik anser att det är nackdel att eleverna inte har möjlighet att läsa fysik i snabbare takt då de behöver dessa kunskaper för de tillämpade övningarna i matematikkurserna på högre nivå men också för att de ibland känner att fysikkursen går lite långsamt. Saras fysiklärare menar att de försöker individualisera så att eleverna med matematikprofil, för att inte tröttna, får andra övningar att arbeta med parallellt.

Sara har under sin gymnasietid haft möjlighet att fördjupa sig och läsa fler matematikkurser än Johan haft möjlighet till. För Sara har dessa kurser ingått i den matematikintensiva utbildning hon valde så hon har inte behövt fråga efter fler utmaningar eller ett högre tempo. Johan menade i årskurs två att om det funnits en spetsutbildning i hans hemstad när han började gymnasiet hade han troligen valt denna. I Johans traditionella utbildning blev han inte automatiskt erbjuden fler utmaningar eller stimulerad att söka mer information. Undervisningen var traditionell med mycket arbete i läromedlet vilket Johan under hela sin skolgång upplevt som relativt tråkigt. Under gymnasiet visade sig dock, i ännu högre utsträckning, hans breda intresse och han frågade inte efter fler utmaningar utan såg snarare möjligheter att studera intressanta breddningskurser i andra ämnesområden.

Skillnaderna, som framgår av intervjuer och observationer, mellan de båda gymnasieskolornas möjligheter att stimulera elever med fallenhet för matematik, är de möjligheter till fördjupning som eleverna vid den matematikintensiva utbildningen generellt har. Eleverna läser kurserna i snabbare tempo med stöd av mer undervisningstid per vecka och har då möjlighet att använda hela tredje året till breddningskurser. Denna möjlighet finns inte vid det traditionella naturvetenskapliga programmet. Lärarna vid de båda skolorna hade alla goda matematiska kunskaper och var utbildade gymnasielärare. Lärarna vid den matematikintensiva utbildningen hade, helt naturligt, större erfarenheter av elever med särskilda förmågor i matematik men de hade ingen formell utbildning i hur särbegåvade elever kan och bör bemötas, utbildningar som erbjuds lärare i andra länder (Baldwin, 1993; Hansen & Feldhusen, 1994; VanTassel-Baska, 2007). En av lärarna vid den matematikintensiva utbildningen hade forskningskompetens inom matematik. När det gäller undervisningsmetoder eller former för de matematiska aktiviteterna skiljer sig dessa åt mellan de olika gymnasieskolorna men även mellan olika lärare.

Fallstudier av Axel och Erica

Bland de åtta fallstudier med yngre elever i grundskolan, vilka tidigare presenterats, har jag valt att närmare beskriva två: Axel och Erica. De övervägande som gjort vid valet av just dessa två elever har tidigare redovisats i metodkapitlet och består främst av genusaspekten och den geografiska placeringen. Kapitlet inleds med en bakgrundsbeskrivning av de båda eleverna som kort tar upp deras uppväxt, skolstart och mitt möte med dem. Därefter följer beskrivningar och analyser av elevernas undervisningssituation i klassrummet, den specialundervisning som skolan erbjudit samt de matematiska tester och diskussioner som skett enskilt med mig. Här fokuseras främst de sociala och sociomatematiska normer som framträder vid matematikundervisning och matematikdiskussioner samt elevernas matematiska förmågor och möjligheter att uttrycka dessa i olika situationer.

Bakgrund

Axel och Erica identifierades tidigt av sina föräldrar som speciella och föräldrarnas berättelser överensstämmer inom en rad områden men skiljer sig också åt. Nedan följer en beskrivning av elevernas uppväxt, skolstart samt mitt första och följande möten med dem. Axel var drygt sex år och gick i förskoleklass första gången jag träffade honom i februari 2007. Erica var nio år och gick i tredje klass första gången jag träffade henne i januari 2009.

Axel

Axels föräldrar berättar om en nyfiken, outtröttlig pojke som har ett minimalt sömnbehov. Han adopterades som tremånaders bebis och har fått mycket uppmärksamhet av föräldrarna under uppväxten. Hans frågvishet kan beskrivas med följande berättelse av mamma: ”*Han har haft perioder när hans frågande har blivit riktigt jobbigt. Jag har ju alltid försökt att svara honom för jag märkte ju att svarade jag inte honom så ger han ju sig inte*”. Hon berättar om en resa från Göteborg till Karlshamn då Axel är i tre-fyra årsåldern och upptäcker den digitala klockan i bilen och hela tiden frågar ”Vad *är klockan mamma? Vad är klockan nu mamma?” Jag bara svarade och svarade. Det tar ju tre timmar att åka och jag hade en väninna med mig och hon sa ”Jag fattar inte att du orkar”. Men slutar jag att svara så blir det ännu värre. Men när vi kom hem så kunde han den digitala klockan och så var han nöjd med det*”.

Erica

Erica är en lugn och eftertänksam flicka som är noggrann och målmedveten. Hon har tidigt haft förmågan att förklara hur hon tänker, något som Axel har svårare för. Ericas mamma berättar om följande episod som utspelade sig strax innan Erica fyllde fem år.

Mamma: *Vad är 5+7?*

Erica:	*12*
Mamma:	*Hur vet du det?*
Erica:	*Jag tänker med hjärnan.*
Mamma:	*Hur då?*
Erica:	*Jo, 6+6 är 12 och 5 är en mindre och 7 är en mer, så då blir det 12.*
Mamma:	*Vad blir 7+7?*
Erica:	*14, för det är 2 mer än 6+6.*

Axel och Erica

Både Axel och Erica lärde sig läsa på egen hand i tre- fyraårsåldern och de har alltid visat ett intresse för siffror, att räkna och lösa matematiska problem. Båda eleverna behärskade de fyra räknesätten då de började i förskoleklass och roade sig gärna med olika dataspel med huvudräkning, problemlösning och logiska uppgifter. Både Axels och Ericas skolstart var efterlängtad av eleverna. De hade sett fram emot allt nytt de skulle få lära sig, och för båda blev det också en positiv början.

Skolstarten

Axel

Axels skolstart gick bra enligt föräldrar och hans lärare. Läraren i förskoleklass beskriver Axel som en pojke hon inte kan jämföra med någon elev som hon tidigare haft. Hans nyfikenhet och hans sätt att ställa frågor om det mesta, allt från rymden, latinska namn på fåglar, uttryck som ”de sju dödssynderna” och ”roten ur” blev en utmaning för henne. De flesta frågor kunde hon besvara eller så hjälptes de åt att söka fakta via böcker eller webben men i matematik upplevde hon det som svårt. Axel, som efter en knapp termin i förskoleklass arbetat sig igenom de böcker förskoleklassen hade att erbjuda, började tröttna och uttryckte hemma att skolan nu var tråkig. Läraren märkte också hans uppgivenhet men även hans sociala problem då han sällan umgicks med klasskamrater utan hellre satt inne framför datorn eller pratade med lärarna på rasterna. Föräldrarna, som ibland kunde hitta Axel gråtande då de skulle hämta honom, var nu oroliga och kontaktade läraren och skolans ledning. Läraren bestämde då, i samråd med rektor, kollegor och Axels föräldrar, att erbjuda Axel att vara med årskurs två på deras matematiklektioner. Axel tyckte att detta lät spännande och antog utmaningen. Några veckor senare ställde Axel följande fråga till läraren: ”*Varför kan man inte dra roten ur alla tal utan bara vissa?*”. Det visade sig att Axel i ett datorspel kommit i kontakt med begreppet kvadratrot och på egen hand undersökt och hittat de jämna kvadraterna. Men han var inte nöjd eftersom han inte insåg helheten i begreppet. Vad fanns däremellan? Läraren kände själv att hon inte hade kompetens att förklara begreppet för Axel och hon diskuterade även med läraren i årskurs två hur de skulle gå vidare. De hade inom en kompetensutbildning i matematik hört talas om den forskning som fanns i Sverige inom området och tog kontakt med mig och beskrev Axel och vad de gjort för honom.

Erica

Erica som, enligt föräldrarna, inte var speciellt intresserad av att visa vad hon kunde under förskoleåren då hon ofta smygläste böcker, läste nu sagor för klasskamraterna vilka uppskattade detta och Erica trivdes.

Det var först under årskurs två som föräldrarna märkte att matematikundervisningen inte riktigt fungerade för Erica. Mamma berättar:

> *"Veckans matte gjorde hon alltid veckans första lektion. Resten av timmarna läste hon Harry Potter, när hon hade tröttnat på kluringarna. Det var först här jag insåg att skolan inte klarade av Erica i matten."*

Undervisningen i Ericas klass bestod av eget arbete i läromedel och Erica upplevde nu skolan som ganska tråkig. Hon hade tröttnat på matematiken som fanns i de extraböcker som hon erbjöds och även andra ämnen såsom engelska var ett bekymmer då Erica hade kommit betydligt längre i sin språkliga utveckling än övriga elever i klassen. Erica klagade alltmer på huvudvärk och hade ingen lust att gå till skolan. Mamma tog, efter att ha läst en tidningsartikel om min forskning, kontakt med mig och berättade om sin dotter och skolans bemötande.

> *"Vi är livrädda att hon ska tröttna på matte och skolan. Har insett att det inte är lätt att vara förälder och det finns en sannolikhet att lillebror och lillasyster kommer gå samma väg till mötes. Det gäller att vi hittar en långsiktig plan för hur vi ska hantera barnens kunskapstörst och undervisning."*

Axel och Erica

Medan Ericas uppväxt kan ses som ganska normal för en flicka i hennes ålder, med vänner och sociala aktiviteter har Axel haft problem med de sociala kontakterna och därmed inte haft några nära vänner. Han har istället tytt sig till vuxna och aktivt deltagit i deras diskussioner. Han har fått utstå en del mobbing då han enligt föräldrarna "… *körde sitt race utan att lyssna och upplevdes då som annorlunda*". Hans intressen rörde inte heller det som pojkar i hans ålder normalt intresserar sig för.

Mitt första möte med eleverna och deras omgivning.

Axel

Första gången jag träffar Axel i mitten av februari 2007 har han nyss fyllt sex år och går i förskoleklass. Innan jag hinner ställa min första matematiska fråga till honom säger han: *”Eva, hur många timmar är 18 kvartar?”* *”Om du har något och delar det med 3 och får 15. Hur mycket hade du från början?”*. Jag svarar ganska snabbt och Axel godkänner mig med orden. *”Du är inte dum du. Nu kan du fråga mig.”* Jag frågar Axel: *”Om Lisa är dubbelt så gammal som Kalle och de tillsammans är 18 år. Hur gamla är då Lisa och Kalle var för sig?”*. Svaret *”12 och 6 såklart”* kommer omedelbart Ingen betänketid alls. Jag fortsätter att ge honom problem av varierad svårighetsgrad och vi spelar även en del strategispel. När vi avslutar tackar jag Axel för att jag fick möjlighet att träffa honom och undrar om jag får komma tillbaka vid något annat tillfälle. Då springer han iväg och kommer efter några sekunder tillbaka med en lapp till mig där det står:

glöm inte
helsa på
mig

Axel, som fick möjlighet att i förskoleklass läsa matematik med eleverna i årskurs två, såg inte detta som mer stimulerade än undervisningen i förskoleklassen. Han fick fortfarande bara använda addition och subtraktion trots att hans matematiska kunskaper omfattande alla fyra räknesätten och mer därtill. På en direkt fråga från mig om hur det var att ha matematik med årskurs två svarade Axel *”Det var samma skit, fortfarande bara att fylla i plus och minus”*.

Efter några besök hos Axel och i diskussioner med hans föräldrar och lärare kom vi gemensamt fram till ett nytt åtgärdsförslag som innebar att Axel skulle få en egen mentor, en gymnasielärare som fanns på ortens gymnasieskola och som hade stort intresse för elevers lärande. Mentorn skulle träffa Axel en gång i veckan och Axel skulle då få möjlighet att diskutera områden i matematik som intresserade honom och som det inte fanns utrymme för i den ordinarie undervisningen. Nu var frågan bara om skolledningen skulle acceptera förslaget. Rektor visade sig vara mycket positiv och Axel och hans föräldrar var förväntansfulla. Vid de första träffarna med mentorn fanns jag med, dels för att övergången från mig till honom skulle ske så mjukt som möjligt, dels för att jag ville se hur relationen dem emellan fungerade. Axel trivdes med sin mentor som han kunde ställa alla sina frågor till och som han kunde utmana i olika frågesporter. Dessa handlade inte bara om matematik utan kunde även röra andra områden eller frågor som var aktuella för Axel.

Erica

Första mötet med Erica och hennes mamma sker tidigt på vårterminen i årskurs tre. Det är en blyg flicka med långt mörkt hår och pigga ögon som möter mig. Då jag frågar henne vad hon tycker bäst om i matematik vet hon inte riktigt. Hon svarar på de frågor som jag ställer men är i övrigt mycket tyst. Hon berättar att hon fått fyrans matematikbok att arbeta extra i och att matematiklektionerna alltid består av räkning i böckerna. Vid första träffen med Ericas lärare får jag ett positivt bemötande och hon är genast med på att mer behöver göras för Erica men vad visste hon inte. Hon beskriver sig själv snabbt med orden: *"Jag är ju ingen mattemänniska, tittade efter i mina examenspapper från lärarutbildningen, tidigarelärare 1-7 med inriktning svenska/SO, och jag hade totalt fem poäng matematik. Men jag vill naturligtvis att vi ska göra allt för att lösa detta och är öppen för förslag"*.

På Ericas skola finns två paralleller i årskurs tre och de arbetar tillsammans inom vissa ämnen med olika teman men inte i matematik. Matematikundervisningen består till allra största delen av enskilt arbete i matematikboken och Ericas lärare vill gärna hålla ihop klassen så att alla elever arbetar inom samma område. Hon försöker istället ge elever som är klara med veckans beting extra uppgifter. Erica har också, efter föräldrarnas påtryckningar, fått en extra bok avsedd för årskurs fyra. Läraren berättar vidare att Erica är en otroligt duktig, ordentlig och prestationsinriktad flicka. Hon är tystlåten och frågar sällan utan arbetar självständigt med de arbetsuppgifter hon får. Det finns inte, som läraren ser det, någon annan i klassen som ligger på samma eller liknande nivå som Erica inom matematiken.

Efter mitt besök på Ericas skola började läraren, tillsammans med skolans rektor, diskutera hur de skulle kunna stimulera Erica på ett bättre sätt i matematik. Diskussionen ledde till att Erica fick möjlighet till extra stöd av en av skolans speciallärare under en timme per vecka. Under denna timme var tanken att Erica skulle få berikning genom mer utmanande uppgifter eller uppgifter inom andra matematikområden. Tyvärr blev det inte riktigt så, enligt Erica och läraren, utan mest att räkna framåt, d.v.s. acceleration. Specialläraren och Erica har, enligt läraren, fungerat bra tillsammans och då läraren frågat Erica om timmarna med specialläraren har hon varit nöjd.

Läraren har då valt att avvakta. Läraren och hennes kollega i parallellklassen inledde samtidigt en diskussion om hur de skulle kunna förändra sin undervisning så att fler elever fick rätt stimulans. Efter mitt besök har de låtit eleverna arbeta med andra aktiviteter än bara läroboken. Dessa aktiviteter har bestått dels av grupparbete med problemlösning, där exemplen hämtas från bl.a. Kängurutävlingen, där det diskuterats matematik livligt, dels av laborativa övningar. Sedan de börjat titta och lyssna på ett annat sätt på sina elever har de också uppmärksammat att det finns fler elever i klasserna som visar intresse och fallenhet för matematik. "*Så det känns som om vi skulle kunna skapa en liten grupp med kluriga tjejer och killar som vi kan stimulera lite extra*" skriver läraren.

Fortsatta möten med eleverna och deras klasser

Vad hände sedan? Följde skolan upp dessa elever? Fick de stöd och stimulans även fortsättningsvis?

Axel

I drygt två år har Axel haft extra stöd i form av mentorn, gymnasieläraren, som han träffat och fortsatt träffar en timme per vecka. Mycket har hänt i Axels liv, både i hans sociala och matematiska utveckling. Det mesta är positivt och både Axel, hans föräldrar och skolan är nöjda med den lösning som skapats för Axel. Han är med vid all undervisning med klassen utom den timme som han har med sin mentor. I den ordinarie klassrumsundervisningen arbetar Axel i en egen bok avsedd för årskurs fyra och får, om han vill, vara med då klassen har gemensamma genomgångar eller andra aktiviteter. Förutom observationer i Axels klass och hos hans mentor har jag haft enskilda träffar med Axel där vi arbetat med problemlösning och haft matematiska diskussioner. Jag har även haft kontinuerlig kontakt med Axels mentor och därigenom fått information om deras träffar. På Axels skola finns, precis som på Ericas, två parallellklasser men dessa har i stort sett inga gemensamma aktiviteter. I parallellklassen finns ytterligare en pojke, Hampus, med intresse och fallenhet för matematik, som jag också följt inom ramen för denna studie. Vid några tillfällen har pojkarna gemensamt fått lösa matematiska problem tillsammans med mig. De har båda visat att de tycker att detta är spännande och roligt. Skolan har dock inte erbjudit någon möjlighet för sådant samarbete. Klasserna arbetar på helt olika sätt med sin matematikundervisning där Axels klass har en mer traditionell undervisning med till största delen eget arbete i läroboken medan Hampus klass har fler gemensamma aktiviteter, grupparbeten och diskussioner.

Erica

Ett halvår efter mitt första möte med Ericas lärare hade jag ett nytt möte med henne och med specialläraren. Det visade sig att en hel del hade förändrats vad gällde matematikundervisningen för eleverna som nu gick i årskurs fyra. Tillsammans med eleverna och deras föräldrar, som hela tiden varit informerade och positiva, hade lärarna delat in de två parallella klasserna i årskurs fyra i fyra olika grupper. Den till antalet minsta gruppen bestod av elever med svårigheter i matematik. Dessa elever hade redan tidigare haft extra undervisning tillsammans med specialpedagoger. För de elever som visat intresse för matematik och som själva önskat att få syssla mer med ämnet, framförallt med problemlösning, skapades en grupp. Ansvarig för denna grupp blev den speciallärare som tidigare arbetat enskilt med Erica och gruppen kallades Spetsgruppen. De elever som valt att tillhöra Spetsgruppen måste vara beredda att arbeta en del med matematikboken hemma. Övriga elever är indelade i två grupper vilka leds av de ordinarie klasslärarna. Det har inte satsats några extra medel för detta upplägg utan skolan har klarat satsningen genom att bättre utnyttja sina resurser.

Klasserna arbetar i dessa grupper en timme per vecka, övrig undervisningstid, ca två timmar, sker i ordinarie klassrumsundervisning. Spetsgruppen arbetar alltid med problemlösning och utmaningar under denna timme medan övriga grupper till största delen arbetar med matematikboken men där ambitionen finns att efterhand berika stoffet med problemlösning och matematiska utmaningar.

Erica finns naturligtvis med i spetsgruppen och här finns ytterligare nio elever från de båda parallellklasserna. Utöver detta får Erica enskilt 20 minuter med specialläraren. Under dessa 20 minuter går de oftast igenom vad Erica ska syssla med under de ordinarie matematiklektionerna kommande vecka eller tar upp problem som hon stött på i sin extrabok under veckan som gått.

Läraren och specialläraren berättar också att skolan startat arbetsgrupper inom olika ämnen och projektområden, däribland matematik. Gruppen inom matematik ska ta fram förslag på hur de kan stimulera samtliga elever på skolan med intresse för matematik. De utgår från det arbete som läraren och hennes kollegor arbetat fram. Grundtanken är att berika istället för att accelerera för de elever som visar intresse för matematik. Här finns också ambitioner att låta alla elever arbeta med mer problemlösning samt laborativ matematik.

Sammanfattning och slutsatser av elevernas bakgrund

Axels nyfikenhet och outtröttlighet och Ericas lugn och noggrannhet är utmärkande drag för de båda eleverna. Det är också de mest särskiljande dragen och det som gör att eleverna upplevs som mycket olika.

Båda har ett starkt intresse för kunskap och i båda fallen är det intresset för matematik som är mest framträdande. De lärde sig båda läsa tidigt och på egen hand och båda såg fram emot skolstarten. För Axels del tog det bara ett halvår innan skolan var tråkig och han visade tydliga tecken på att han vantrivdes. Erica fann sig under en längre period, vilket kan ha berott på att hon hade ett socialt nätverk med vänner och aktiviteter vilket Axel i stor utsträckning saknade. Under årskurs två, kom emellertid signaler om att Erica inte trivdes med undervisningen. Även hon tyckte nu att skolan var tråkig och hon klagade ofta på huvudvärk.

Axels nyfikenhet och Ericas lugn var också de mest framträdande dragen vid min första träff med eleverna. Axel överföll mig med frågor så fort vi träffades, först rent matematiska frågor men sedan även frågor om mig och min familj. Detta kan ses som en blandning av nyfikenhet och behov av kontroll. Han ville veta om det gick att lita på mig i matematiska sammanhang. För Axel är det viktigt att personer han diskuterar med förstår honom och kan ge honom utbyte i diskussionen. Vid vårt första möte var matematiken viktig för honom och han behövde veta att jag uppfyllde kriterierna. Då det visade sig att jag på något sätt levde upp till hans krav eller förväntningar visade han också tydligt, genom ett skriftligt meddelande, att han ville behålla kontakten.

I Ericas fall fanns inte alls samma behov av att veta mer om mig. Det var jag som ställde frågorna och i de flesta fall fick jag dra svaren ur Erica. Detta ändrades delvis efterhand som vi lärde känna varandra och Erica blev mer och mer öppen. Hon har vid senare tillfällen ofta kommit med rent matematiska frågor som rör de problem som de sysslat med i skolan, framförallt i spetsgruppen. Hon kan fråga om lösningar som hon gjort och som skiljer sig från andra elevers och lärarens.

Matematikundervisningen i de båda klasserna skedde på liknande sätt. Vissa halvklasslektioner kunde inledas med en genomgång eller ett laborativt moment, i övrigt var det uteslutande eget arbete i läromedlet och handuppräckning vid frågor. I båda fallen tog skolorna tag i problematiken med elevernas behov av extra stimulans i matematik. De löste det till att börja med på liknande sätt genom att eleverna fick en specialresurs ett tillfälle per vecka. I Axels fall anlitades en extern person som mentor och i Ericas fall användes en befintlig speciallärare på skolan. I Ericas fall utvecklades detta dock snabbt till ett erbjudande för fler elever och en mer varierad matematikundervisning för samtliga elever i årskurs fyra.

Klassrumsundervisning i hel- och halvklass

Både Erica och Axel har matematikundervisning i både hel- och halvklass. I Ericas fall sker halvklassundervisningen under årskurs fyra i spetsgruppen vilken har tio deltagare. I Axels fall sker både hel- och halvklassundervisningen inom klassen på traditionellt sätt med största delen eget arbete i läromedel. Halvklasslektionerna, då det är ca tio elever, innehåller ibland laborativa eller undersökande aktiviteter. Jag har vid fyra tillfällen observerat Ericas matematikundervisning i helklass, i slutet av årskurs tre och under årskurs fyra. Vid två tillfällen under årskurs fyra har jag observerat spetsgruppens problemlösningsaktiviteter. Axels undervisning i hel- och halvklass har jag observerat under årskurs två genom tre observationstillfällen med helklassundervisning och tre med halvklassundervisning. Jag studerade de sociala och sociomatematiska normer som etablerades i diskussionerna och de matematiska förmågor som då uttrycktes och utvecklades.

Axel

I Axels klass, årskurs två, är det enskilt arbete i läromedel som upptar största delen av matematikundervisningen. Läromedlet står alltid i centrum under helklasstimmarna medan Axels lärare berättar att hon under halvklasslektionerna försöker inleda med någon genomgång av ett nytt område och en del praktiska moment innan eleverna fortsätter att räkna i böckerna. Under halvklasslektionerna sker också redovisningar av olika teman eller grupparbeten, även enskilda redovisningar förekommer. Läraren berättar vidare att hon försöker få alla eleverna att framträda inför de andra och ser detta som något mycket viktigt. Läraren är särskilt intresserad av läsinlärning och språkets betydelse men är ingen ”*mattemänniska*” som hon uttrycker det. Hon har många olika uppdrag vid sidan av ansvaret som klasslärare. Hon har helt nyligen blivit skolans representant i den nya utredningen av IUP (Individuell utvecklingsplan) och har ansvaret för de nationella proven för årskurs tre.

Axels klassrum är stort och ganska kalt. Det finns inte så mycket utsmyckning på väggarna. Hon berättar att hon trivs med att ha klassrummet rent och enkelt. Det finns en hylla med laborativt material i matematik där eleverna själva kan hämta vad de vill ha. Det finns också en stor avdelning med mysiga soffor och bokhyllor med böcker och annat som hör språkutveckling till.

Axel arbetar i sin egen bok (4:ans bok) men vid genomgång och praktiska moment får han vara med om han vill och han brukar också delta om det är något som intresserar honom. Nedan följer utdrag från en halvklasslektion med tio elever där läraren erbjuder två matematiska aktiviteter av helt olika slag:

Läraren inleder med att skriva talet 1000 på tavlan. Hon undrar om eleverna kan säga något som blir 1000. Eleverna svarar med t.ex. 500+500, 700+300, 600+400 o.s.v. Läraren skriver alla förslag på tavlan. Axel räcker upp handen hela tiden och säger, när han blir tillfrågad, i tur och ordning 200·5, 10·10·10, 90+10·10, 50+50·10, 250·4, 25·4+900 vilket läraren skriver på tavlan som ovan. I anslutning till att Axel ger sitt sjätte förslag, 25·4+900, undrar läraren om Axel kan förklara för de andra eleverna hur han tänkte när han fick 250·4.

[…]

Axel	*Jag tänkte först från den andra jag sa, 25·4 + 900, och då är det ju 900 kvar men så tänkte jag inte utan det blir ju 10 gånger. Men annars kan man ju tänka att man har 1000 och delar till 500·2 och sedan delar 500 i två delar.*

Läraren *Ja, du Axel. Om de andra ska förstå så får vi nog utgå ifrån de 250 och om vi gångar det med 2 så får vi 500 och vad händer om vi tar dubbelt av det?*

Nora *Då blir det 1000.*

Läraren *Du tänkte rätt också Axel men du utgick ifrån 1000 och jag tror inte att de andra hänger med då.*

Axel *Det kan vara 850+150 också.*

Läraren säger att de skulle kunna hålla på hela dagen och skriva upp tal som blir 1000 men nu skall de göra något annat.

Läraren *Om vi skulle ta och skriva upp alla talen från 1 till 1000 och vi hjälps åt. Hur skulle vi kunna göra då?*

Det är tyst i klassen.

Läraren *Om Nora får börja skriva från 1 till 100 vad ska du fortsätta med då Svante?*

Svante *200*

Läraren *Nej, vad kommer efter 100?*

Axel *101*

Läraren delar ut papper med rutor där eleverna skall fylla i tal. Alla skall fylla i 100 tal.

Läraren *Ni får börja nu och sedan tar ni med hem och fortsätter med det där. Glöm inte att skriva med fina siffror.*

[…]

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i denna aktivitet:

Läraren erbjuder under denna halvklasslektion två matematiska aktiviteter av helt olika karaktär. Den första aktiviteten, att säga något som blir 1000, inbjuder till reversibelt tänkande: att utgå ifrån summan och dela upp i termer eller faktorer. Övningen är av undersökande karaktär och alla elever har möjlighet att uttrycka sina matematiska förmågor, exempelvis förmåga till reversibelt tänkande, förmåga att operera med siffror, relationer och samband, i detta fall att använda de olika räknesätten i ett och samma uttryck, förmåga till flexibilitet i tänkandet samt förmåga att generalisera. Läraren har möjlighet att ta del i den matematiska gemenskapen genom att ställa fördjupande frågor, bekräfta lösningar och göra eleverna uppmärksamma på vad som är en annorlunda eller mer sofistikerad lösning.

Alla förslag som eleverna presenterar, förutom Axels, är av samma karaktär. De bygger på addition och består av jämna hundratal. Några av förslagen kommer också i dubbla eller fler upplagor och här finns även förslag där termerna kommer i annan ordning, exempelvis 200 + 800 och 800 + 200. Läraren skriver upp alla förslag, även de som kommer flera gånger, vilket för eleverna blir en bekräftelse på att förslagen är korrekta. Hon ger inga övriga kommentarer varken om dubbletterna eller om den kommutativa lagen för addition. Även Axels förslag skrivs exakt så som han uttrycker dem verbalt [200·5, 10·10·10, 90+10·10, 50+50·10, 250·4, 25·4+900], utan kommentarer eller frågor och inte heller tas någon hänsyn till parenteser och de distributiva lagarna [200·5, 10·10·10, (90+10)·10, (50+50)·10, 250·4, 25·4+900]. Den sociomatematiska normbildningen är inte framträdande och det är i stället de sociala normerna som styr mycket av det som händer i den matematiska aktiviteten. Under hela övningen sitter eleverna tysta i sina bänkar, räcker upp handen när de har ett förslag att delge och läraren pekar i tur och ordning på de elever som ska svara. Att sitta stilla på sin plats och räcka upp handen när man vill prata är sociala normer som alltid gäller i Axels klassrum liksom i många andra klassrum. Att Axels lärare dessutom är noga med att alla ska få möjlighet att ge förslag och att alla ska få komma till tals är ytterligare en social norm som styr klassrumsmiljön. De reglerar klimatet i klassrummet men blir de för dominerande riskeras att inget utrymme ges för diskussion eller argumentation mellan eleverna. Den enda fråga som ställs är den Axel får av läraren om hans förslag 250·4. I övrigt förekommer inga diskussioner eller kommentarer om olikheter och skillnader mellan de förslag som ges. Därmed kan eleverna inte bilda sig någon uppfattning om vilka lösningar som kan ses som annorlunda eller mer sofistikerade och det skapas inga nya sociomatematiska normer i klassrummet. Inte heller uppmärksammas de två förslag Axel ger som verbalt är korrekta men som blir fel (formellt matematiskt) då läraren skriver dem utan parenteser. Möjligen är läraren obekant med prioriteringsreglerna eller möjligen anser hon att detta är för komplicerat att ta upp med eleverna. Men det hade varit ett tillfälle, bland många andra i denna aktivitet, att fånga de matematiska objekten och fördjupa den matematiska diskussionen.

Av Axels sätt att inleda sin förklaring av 250·4 kan vi anta att han just då är mitt uppe i en annan tanke, nämligen hans senare förslag, 25·4 + 900: ”*Jag tänkte först från den andra jag sa, 25·4 + 900, och då är det ju 900 kvar men så tänkte jag inte utan det blir ju 10 gånger*”. Han visar här förmåga till flexibilitet då han snabbt lämnar de tankar som för tillfället upptog hans koncentration och övergår till en kort och tydlig förklaring där han utgår från det tal läraren skrivit på tavlan och därifrån i steg närmar sig sitt svar. ”*Men annars kan man ju tänka att man har 1000 och delar till 500·2 och sedan delar 500 i två delar.*” Då läraren lyssnat på Axels förklaring undersöker hon inte med resten av klassen om de förstått hans förklaring eller om det finns kommentarer, utan hon utgår från att övriga elever inte förstått och förklarar istället hur man kommer till 1000 på ett mer traditionellt sätt där hon utgår från delarna för att få helheten: "*Ja, du Axel. Om de andra ska förstå så får vi nog utgå ifrån de 250 och om vi gångar det med 2 så får vi 500 och vad händer om vi tar dubbelt av det?*". Hennes kommentar har sin grund i underliggande sociala normer om att alla måste förstå det som görs i klassrummet och tolkningen stärks också av att hon i slutet av sin förklaring ställer en fråga till eleverna i syfte att se om de förstått hennes förklaring. Läraren bekräftar att Axel tänkt rätt: "*Du tänkte rätt också Axel men du utgick ifrån 1000 och jag tror inte att de andra hänger med då*" men nedvärderar samtidigt övriga då hon förutsätter att de inte förstår Axels förklaring. Exemplet visar hur de sociala normerna i ett klassrum, i detta fall normen att alla ska förstå och att ingen ska känna sig osäker eller underlägsen, styr undervisningen och skapandet av sociomatematiska normer som exempelvis att variera lösningsförslagen, förklara sina lösningar, argumentera för sin egen och övriga elevers lösningsförslag.

Axel har ett sista förslag innan övningen avslutas: "*Det kan vara 850+150 också*". Han håller sig här till en variant av de förslag som övriga elever tidigare givit och fått bekräftade men som ändå skiljer sig från dessa förslag och på så sätt fattas på tavlan. Kanske kan förslaget från Axel sida vara ett försök att passa in i den sociala normen som finns i klassrummet, att inte skilja sig från mängden, som gör att han snabbt lägger till detta förslag på slutet. Han är medveten om att han är annorlunda och ofta sticker ut, men visar ofta på en önskan om att tillhöra gemenskapen. Det blir dock ingen mer diskussion utan övningen lämnas till förmån för nästa aktivitet.

Lektionens andra aktivitet går ut på att eleverna tillsammans ska skriva tal mellan 1 och 1000. Läraren börjar med att fråga hur de då skulle kunna göra. Ingen elev räcker upp handen. Det ser ut som om Axel fortfarande har sina tankar på den föregående övningen då han studerar förslagen på tavlan. Läraren fortsätter att förklara hur de ska gå tillväga och påpekar slutligen att de inte ska glömma att skriva fina siffror. Övningen är rent mekanisk och på en nivå som Axel och även andra av eleverna i hans klass för länge sedan passerat. Läxan blir därför snarare en övning i handstil än i matematik. Denna form av läxa tillsammans med lärarens uppmaning till eleverna "*Glöm inte att skriva med fina siffror*" kan tolkas som att prydlighet och noggrannhet är något som läraren anser vara viktigt och detta kan också uppfattas av eleverna som ett uttryck för en norm som läraren försöker etablera. Lärarens agerande och uttalande kan, som nämnts ovan, tolkas som uttryck för en social norm i det att läraren anser att det är viktigt att eleverna lär sig vara noggranna och skriva tydligt. Uttalandet kan även tolkas som ett försök från läraren att etablera eller förstärka en sociomatematisk norm i det att läraren anser att det i ämnet matematik är viktigt att eleverna tidigt lär sig att vara noggranna och skriva tydligt för att i framtiden genomföra svårare och mer komplexa uträkningar där prydlighet är väsentligt för att förstå sina egna och andras lösningar. I detta fall tolkar jag utsagan från läraren främst som ett uttryck för en social norm då läraren i olika situationer visat att prydlighet snarare är generellt viktigt för henne än viktigt just i matematikundervisningen.

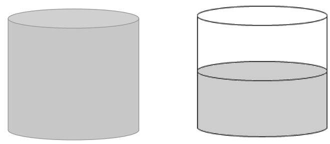
Erica

Vid mitt första tillfälle som observatör vid en matematiklektion i Ericas klass är det, precis som hos Axel, enskilt arbete i matematikboken. Läraren går runt och hjälper till och det är ständigt händer i luften. Jag blir ganska snart själv en resurs i klassen. De är 24 elever i klassen men tre har gått ut för att få extra stöd i matematik. Klassrummet är litet, eleverna sitter två och två eller tre och tre och längst bak i klassrummet står det fem datorer. På väggarna sitter teckningar som eleverna själva målat. Det finns dock inte mycket som ger upphov till matematiska funderingar eller som inspirerar till matematiskt resonerande. På blädderblocket längst fram står ett arbetsschema som gäller veckans arbete. Överst står ”Matteboken till s. 41”. Detta första observationstillfälle i Ericas klass speglar ganska väl hennes matematikundervisning i helklass under årskurs tre och fyra.

Under årskurs fyra är jag även med i Spetsgruppens matematikundervisning, vilken utgör en timme per vecka och där upplägget är ett annat. Specialläraren börjar varje tillfälle med att dela in de tio eleverna i grupper om två eller tre, nya grupper varje vecka, därefter går hon igenom dagens problemsamling vilken oftast består av tre uppgifter av varierande karaktär. Hon läser uppgifterna högt och eleverna har möjlighet att fråga om det är något i formuleringen som är oklart. Därefter fördelar sig grupperna i olika små rum och inleder direkt arbetet. När de känner sig klara och har förvissat sig om att alla i gruppen förstått lösningen som diskuterats kallar de på läraren och förklarar sin lösning. De får då ett godkännande eller ett tips för att tänka om. Grupperna har en bestämd tid på sig och därefter är det samling i storgrupp (10 elever) där de tillsammans går igenom lösningarna. Vid denna avslutande samling har alla möjlighet att berätta om sin lösning och även kommentera de övriga gruppernas lösningar. Läraren leder diskussionen.

Följande dialog är hämtad från en gemensam efterdiskussion, vilken denna gång inledde spetsgruppens problemlösningstimme, då de under förra veckan inte hann gå igenom uppgiften. Läraren inleder med att repetera problemformuleringen från förra veckan.

Läraren	*Vi hade en syltburk, eller en marmeladburk var det, burken plus innehållet vägde 800 gram. Sen hade vi en halvfull marmeladburk och den vägde 480 gram.* [Läraren skriver och ritar, enligt nedan] *Frågan var hur mycket väger burken? Den löste vi förra gången.*



800 g 480 g

Det blir diskussioner om vilka grupper som klarat uppgiften förra veckan. Det framkommer att det bara var två grupper som blev klara. Här kallar jag dem *Kalles* grupp och *Ericas* grupp, då det är dessa elever som redovisar lösningar.

[…]

Erica	*Jag kan berätta.*
Läraren	*Fast du löste den på ett lite annorlunda sätt.*
Erica	*Då är det, man tar en halvfull marmeladburk gånger 2, med burken. 480 plus 480.*
Läraren	*Vad sa du nu, 2 gånger 480* [skriver på tavlan] *det är nog jag som inte kan skriva. 480….*
Erica	*Det är 960.* [Erica säger detta innan läraren hinner räkna ut det på tavlan, jag får en känsla av att hon tycker att det går lite långsamt.]
Läraren	*960…för att klargöra nu, vad är svaret på 960, vad är det vi har svarat på?*
Erica	*Det är en fylld… det är lika mycket marmelad som i en hel burk och så är det två burkar och sedan tar man 960 minus 800 gram och då får man burken kvar.*
Läraren	*960 minus 800g är lika med 160* [Läraren skriver långsamt och pratar samtidigt så att alla ska vara med på vad som görs]. *Får jag fråga nu, förstod ni det här?*

Ja, från alla utom Stina.

Stina	*Nej, inte riktigt.*
Läraren	*Det här är burken som är till hälften fylld, då tar vi alltså två sådana burkar. Sedan tar jag och flyttar över marmeladen från den ena burken till den andra. Är du med på det?.... Då får jag en hel burk med marmelad och en tom burk med marmelad och det blir tillsammans 960 gram. Är du med på det?.... I uppgiften så stod att en full burk vägde 800 gram och tar du bort då 960 som är en full*

burk och en tom burk och från det tar du en full burk med marmelad så får du reda på vad bara burken väger.

Stina *Nu är jag med.*

Läraren *Kalle* [räcker upp handen]

Kalle *Vi tog, började med typ 100, chansade på att burken vägde ungefär 100 gram och så tog vi minus 100 på båda tills de kanske, ja och sedan fortsatte vi med 110 och 120 tills, vad heter det, de 480 blev hälften så mycket som 800.*

Läraren *Johan, vet du vad, jag tror att det är lättare om du står här framme och skriver och berättar. Jag hänger inte riktigt med.*

Erica *Han provar sig fram.*

Läraren *Ja, gå fram och visa Johan.*

Kalle *Om vi börjar med 100g och då blir det 480 minus 100 är 380…*

Läraren *Då skriver du 480 minus 100*

Kalle *Då blir det 380 och så tar vi 800* [Johan har nu skrivit 480-100 = 380 och 800-100 = 700]

Läraren *Ja, vänta lite nu här, nu ska vi se här 480, det är den burken…*

Kalle *Ja*

Läraren *Sen provar du om burken väger 100 och då ska marmeladen väga..*

Kalle *… 380g och då prövar vi likadant med 800 gram och då blir det 700 och då stämmer det ju inte.*

Läraren *Just det då har du hela burken med marmelad och så tar du bort burken och får du 700 och då skulle alltså…*

Kalle *… vad heter det, den plus sig själv vara lika med den.*

Läraren *Och det stämde inte.*

Kalle *Fast då provade vi med 10 till.*

Läraren *Ja, nu är jag med, du provade olika vägar.*

Läraren *Såhär löste jag den, fast jag tycker att era andra är smartare. Om du har 800 g och sen har vi halva, här är hela burken, så tar vi bort halva innehållet plus en hel burk. 480g, vad blir det då, om vi tar det i huvudet.*

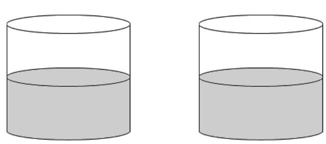
Erica *320*

Läraren	*320. Är du med på det, om vi lägger till 20 här så är vi uppe i 500 och sedan 300 till. Vad har jag räknat ut när jag gör såhär?*
Läraren	*Erica*
Erica	*Hälften av marmeladen.*
Läraren	*Just det, det här är ju halva marmeladen. Hur gör jag för att få reda på hela marmeladen?*
Läraren	*Erica*
Erica	*320 plus 320*
Läraren	*Vad får jag då?*
Erica	*640*
Läraren	*Och 640, vad har jag fått reda på där?*
Erica	*Hur mycket marmeladen väger.*
Läraren	*Men frågan var väl vad burken vägde, du kan fortsätta Erica.*
Erica	*800 minus 640*
Läraren	*Just det, 800-640 och vad blir det?*
Erica	*160*
Läraren	*Det är detta jag tycker är lite roligt, att man kan lösa en uppgift på olika sätt och ändå komma fram till samma svar.*

[…]

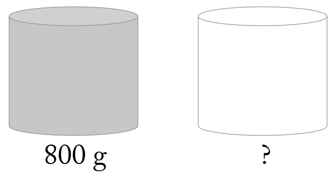
Förtydligande av elevernas lösningsförslag:

Ericas lösningsförslag:



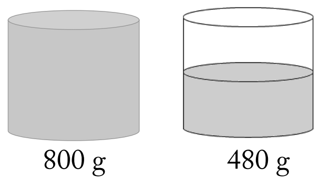
480 g 480 g

Erica utgår från två halvfulla marmeladburkar och utför beräkningen $480 \cdot 480 = 960$. Summan beskriver hon som ”*det är lika mycket marmelad som i en hel burk och så är det två burkar*”, vilket illustreras nedan:

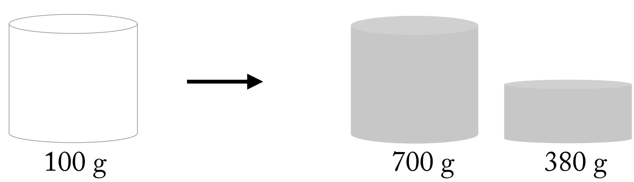


Därefter utför hon subtraktionen 960 – 800 = 160 vilket innebär att hon utgår från den totala summan och drar bort en fylld marmeladburk och får svaret på vad en tom burk väger.

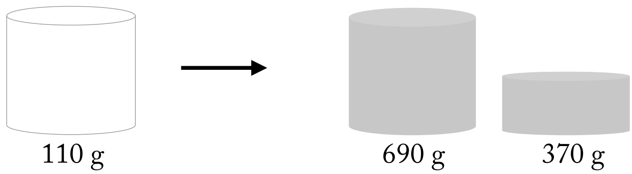
Kalles lösningsförslag:



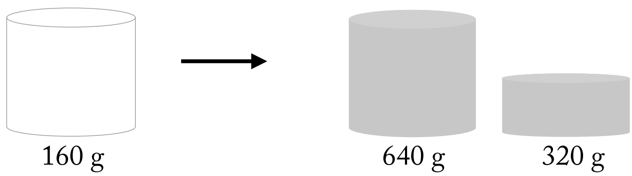
Kalle utgår från en fylld burk och en halvfylld burk enligt förutsättningarna. Hans utgångspunkt är att det i båda dessa vikten, 800 g och 480 g, ingår vikten av en tom burk. Utöver vikten av en tom burk ska det i vikten 480 g ingå hälften så mycket marmelad som i vikten 800 g vilket Kalle förklarar enligt: ”*chansade på att burken vägde ungefär 100 gram och så tog vi minus 100 på båda tills de kanske, ja och sedan fortsatte vi med 110 och 120 tills, vad heter det, de 480 blev hälften så mycket som 800*”. Han visar att det första försöket, att burken väger 100 g, inte fungerar då 800 – 100 = 700 och 480 – 100 = 38 och 380 inte är hälften av 700.



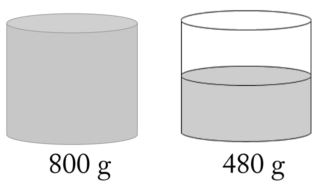
Han förklarar att de provat med att burken väger 110 g, 120 g o.s.v. tills marmeladen i den halvfyllda burken vägde hälften av marmeladen i den fyllda burken.



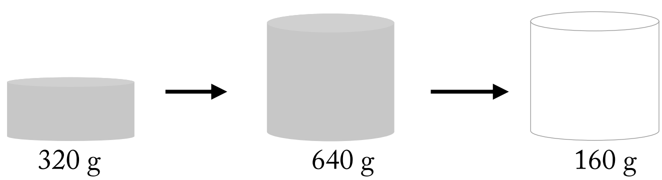
o.s.v.



Lärarens lösningsförslag:



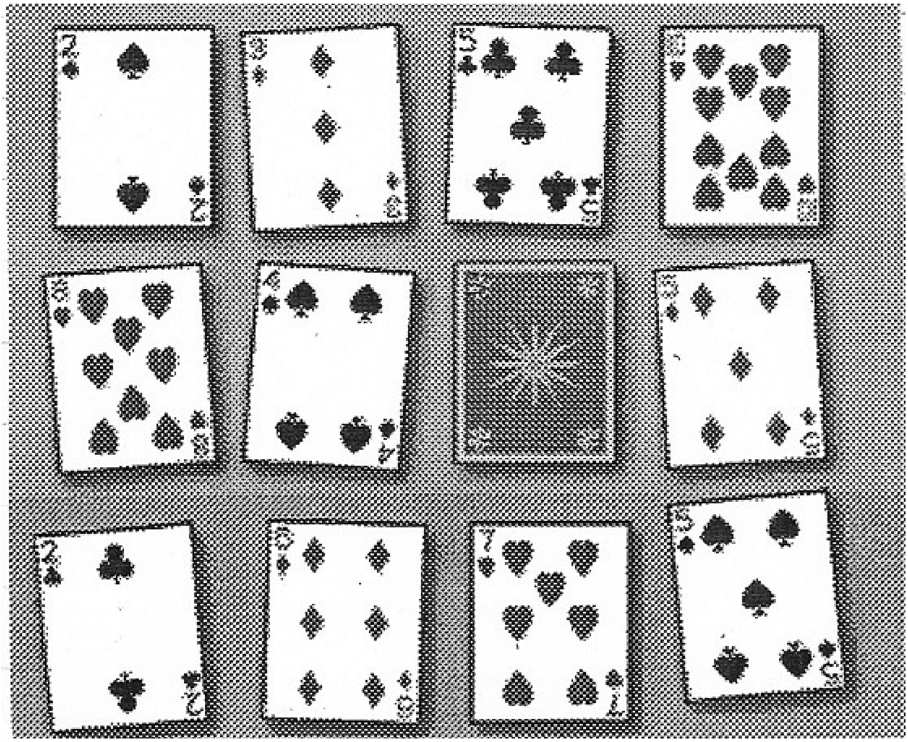
Läraren utgår från en fylld och en halvfylld marmeladburk. Hon utför subtraktionen 800 – 480 = 320 och Erica förklarar vad differensen innebär ”*Hälften av marmeladen*”. Därefter utförs additionen 320 + 320 = 640 vilket innebär vikten av marmeladen i en fylld burk och därefter utförs subtraktionen 800 – 640 = 160 vilket resulterar i burkens vikt.



Direkt efter genomgången och redovisningen ovan delas eleverna in i nya grupper och dagens tre problem delas ut. Detta sker dels genom att eleverna får varsitt papper med problemen, enligt nedan, samt att läraren går igenom problemen muntligt, läser dem högt inför eleverna. Därefter ber hon dem hämta papper och pennor och annat laborativt material som de behöver för att lösa problemen.

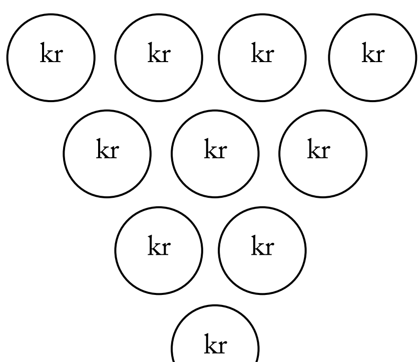
Problem 1

Kan du lista ut vilket det gömda kortet i mittenraden är?



Problem 2

Går det att bara flytta tre mynt och få spetsen på pyramiden att peka uppåt?



Problem 3

Olle är född 1 januari 2002 och han är 1 år och 1 dag äldre än Lisa. När är Lisa född?

Nedan redovisas diskussionen i den grupp där Erica deltar. Förutom Erica ingår Olle och Britta i gruppen. Eleverna har hämtat papper och pennor samt en stor hög platsenkronor. Till en början lyssnar även läraren på gruppens diskussioner.

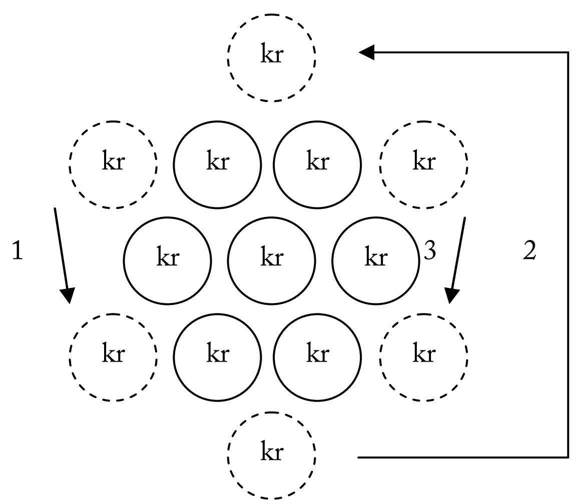
Diskussion och arbete i Ericas grupp
[…]

Erica *Tvåan kan jag direkt.*

Britta *Den kan jag med.*

Erica *Man gör bara såhär.*

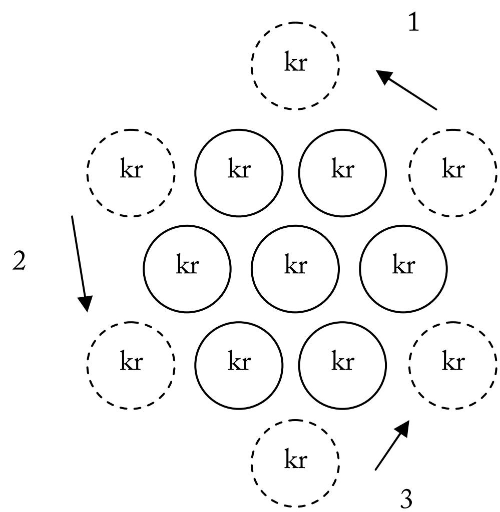
Eleverna har lagt ut varsin pyramid med enkronor framför sig. Erica flyttar översta radens vänstra mynt två rader ner till vänster, nedersta myntet i pyramiden högst upp till toppen samt översta radens högra mynt två rader ner till höger, se figur nedan. Britta och Johan tittar och lyssnar.



Läraren *Oj, det var snabbt. Men om du ska flytta den kortaste vägen.*

Erica *Ja, då kan man göra såhär.*

Erica och Britta flyttar, tillsammans, utan att diskutera, de tre mynten gemensamt ”den kortaste vägen”, se figur nedan. Erica börjar med att flytta upp översta radens högra mynt till toppen medan Britta flyttar ner översta radens vänstra mynt två rader ner till vänster varpå Erica snabbt flyttar upp bottenmyntet en rad upp till



Jag häpnar och frågar om de sett detta tidigare.

Erica *Nej, vi har gjort en del andra sådana trick med tändstickor men inte detta.*

Eva *Hur kunde ni se så snabbt vilka ni skulle flytta?*

Erica *Man kan ju inte flytta de tre nedersta för det räcker inte. Då ser man att den här* [pekar på raden med två mynt i] *måste vara botten. Då måste det vara fyra i den och då är det klart.*

Britta *Den var lätt.*

Olle *Nu vill jag veta hur ni gjorde.*

[…]

Flickorna visar en gång till och förklarar för Olle som inte riktigt hunnit med. Olle ritar på sitt papper och visar med pilar, likt de ovan, hur de gör.

Britta *Ska vi ta första uppgiften nu?*

Olle *Ja, den har jag funderat på. Man ser ju att 2 plus 3 är 5 och sedan är 5 plus 5, 10. Så kanske det är…*

Britta *Ja, men det stämmer ju inte i den nedersta. 2 plus 6 är ju inte 7. Det måste vara ett klöver.*

Erica *Ja, det fattas ju ett klöver i den raden.*

Olle *Vi räknar ihop alla hjärter och så tar du ruter och du spader och så kanske det saknas så många klöver.*

Erica *Skulle jag ta ruter?*

Britta *Nej, jag tar ruter och du spader.*

Alla räknar och Erica samlar sedan in resultatet. Hon ritar symboler och skriver det de andra fått fram.

Erica *Det finns ju inget system i 24, 7, 16 och 11.* [de har räknat fel på hjärter och ruter]

Olle *Men spader och klöver blir ju 7.*

Britta *Ja, då ska det vara en klöver 3:a. Är det rätt Eva?*

Erica *Ja, det stämmer ju men kan man göra så?*

Eva *Har de andra korten ingen betydelse då?*

Erica *Jo, men de blir 13 i alla rader.*

Britta *Då tar vi trean.*

Olle *Om vi först tar bort den där dagen så kan vi räkna ett år sedan.*

Britta *Men hur många dagar har december.*

Eva *Kan ni räkna på knogarna.*

Britta *Ja, jag kan. Visar och räknar. Det är 31 dagar.*

Olle *Då blir det den 31 december.*

Erica *Men vilket år blir det?*

Britta *Det måste ju bli 2000.*

Erica *Nej, det kan det ju inte bli då är hon ju äldre än honom.*

Olle *Nej, det blir 2003.*

Britta *Ja, det blir det eller…*

Olle	*Det måste det bli, det blir i alla fall den 31 december men jag vet inte vilket år.*
Britta	*Det måste ju vara 2003 för det skiljer ju ett år.*
Erica	*Men, måste det inte bli på andra hållet. Om det skiljer ett år så blir det ju 1 januari 2003…*
Britta	*Ja, så det blir den 2 januari.*
Erica	*Ja, det var så jag menade.*

[…]

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

Klimatet i gruppen är öppet och alla är välkomna in i diskussionen, en social norm som är påtaglig både i de små grupperna och i den avslutande redovisningen. Denna norm, att klimatet ska vara inbjudande och tillåtande, skapas framförallt i gruppernas arbete där diskussionen är nödvändig då eleverna måste försäkra sig om att alla har förstått lösningen. Även i inledningen av den gemensamma diskussionen i stor grupp ser vi hur lärarens tillåtande arbetssätt och uppföljning av Ericas tankesätt och lösningsstrategi bidrar till skapandet av sociomatematiska normer som exempelvis att eleverna bör uppmanas att förklara sina lösningar, variera lösningsförslagen och argumentera för sina resonemang. Detta visar, i ett exempel, hur den sociala normen om öppenhet bidrar till skapandet av sociomatematiska normer till stöd för elevernas kunskapsutveckling. Läraren är noga med att alla i gruppen har förstått innan hon går vidare, även detta en social norm som i vissa fall, dock ej här, kan inverka negativt på skapandet av sociomatematiska normer då sociala normer också anger gränser för vad som är socialt acceptabel kunskapsnivå i en diskussion.

I gruppen är det en accepterad social norm att deltagarna säger ifrån om något är oklart för dem och då krävs ytterligare förklaring. Detta sker både i de små grupperna och i storgruppen, som i exemplet då en elev, Stina, inte riktigt förstår ett resonemang. Trots att alla övriga elever ropar: ”*Ja*” då läraren ställer frågan om alla förstått är Stina uppriktig och säger: ”*Nej, inte riktigt*”. Läraren repeterar då lösningen med egna ord och i narrativ form, dock utan att ändra på den övergripande strukturen i Ericas förslag.

I Kalles redovisning finns inte lika mycket uppföljning. Läraren är fortfarande positiv och försöker förmå Kalle att ta det lugnt och anteckna vad han gör. Kalle har i sin förklaring inte samma tydlighet som Erica och han är, om möjligt, mer forcerad. Han visar dock, främst i sin första utsaga ”*… så tog vi minus 100 på båda tills de kanske, ja och sedan fortsatte vi med 110 och 120 tills,* *vad heter det, de 480 blev hälften så mycket som 800*" att han har förståelse för den lösningsmetod gruppen använt och han gör även fortsättningsvis goda försök att förklara sina tankegångar: "*… 380g och då prövar vi likadant med 800g och då blir det 700 och då stämmer det ju inte*" samt "*… vad heter det, den plus sig själv vara lika med den*". I de två senare utsagorna försöker han beskriva relationen mellan vikten av sylten i den fulla burken och i den halvfulla då burkens vikt tas bort.

När läraren själv förstår hur Kalle löst uppgiften nöjer hon sig med detta. Istället för att fråga övriga elever i klassen om de förstått övergår hon till att beskriva sin egen lösningsmetod. Så mötte hon inte Ericas lösningsförlag vilket möjligen kan bero på att hon tidigare, i förra veckan, sett Ericas lösning medan hon vid redovisningen av Kalles lösning var oförberedd på vad som skulle komma.

Genom att läraren redan inledningsvis introducerar Ericas lösning som en "*annorlunda*" lösning, har alla elever möjlighet att bilda sig en uppfattning om vad som är en annorlunda lösning på denna uppgift och möjlighet att etablera den sociomatematiska normen att en uppgift kan ha alternativa lösningar och att dessa är välkomna i diskussionen. Eleverna hade under redovisningen möjlighet att se tre helt olika lösningar av samma problem och får också veta att alla tre är acceptabla.

Läraren uttrycker en värdering av lösningarna "*Såhär löste jag den, fast jag tycker att era andra är smartare*", en utsaga som kan tolkas som en värdering av den egna lösningen som mer traditionell och elevernas lösningar som annorlunda, mer intressanta och effektiva. Läraren etablerar då en sociomatematisk norm som säger att vissa lösningar kan vara effektivare, elegantare eller mer sofistikerade än andra. Dessutom får eleverna en annan bild av läraren, vilken oftast är bilden av en auktoritet som har alla svar och vars lösningar är de bästa. Här stödjer läraren en social normbildning som går ut på att hon deltar i diskussionen: hon fördelar ordet, repeterar lösningar och förklaringar där det behövs, hon tolkar och förtydligar resonemangen men det är eleverna som själva ansvarar för sina lösningsförslag.

Läraren visar också sin glädje och entusiasm då hon utvärderar diskussionen "*Det är detta jag tycker är lite roligt, att man kan lösa en uppgift på olika sätt och ändå komma fram till samma svar*". Med detta uttryck stödjer hon den sociomatematiska normbildningen: att det är positivt att hitta alternativa lösningar till ett problem samt att det är accepterat att eleverna tänker på olika sätt.

Erica visar i sitt lösningsförfarande förmåga att operera med siffror samt förmåga att se relationer och samband, både då hon själv förklarar sin lösning men också då hon svarar på lärarens frågor vid hennes lösningsförklaring. Erica eftersträvar korta, eleganta lösningar och visar även en förmåga och vilja att sätta sig in i andras lösningsförslag och stötta med information där så efterfrågas. Kalle visar vilja och engagemang då han presenterar gruppens lösningsförslag, vilket är helt olikt Ericas förslag.

Arbetet i de små grupperna är intensivt, alla bidrar med förslag och idéer och i de flesta fall överväger gruppen förslagen genom att antingen hålla med eller komma med motargument. I det andra problemet, som gruppen löser först, visar Erica på en snabbhet i tanken då hon omedelbart kan flytta kronorna så att spetsen pekar åt motsatt håll. Här verkar det som om även Britta hittat omflyttningen men hon får inte möjlighet att visa den. Min tolkning är att flickorna, från det att läraren presenterat problemen i storgrupp, har funderat på en lösningsmetod för denna uppgift. Detta visar, om så är fallet, på ett intresse och ett engagemang som kan jämföras med Krutetskiis beskrivning av ett matematiska sinnelag eller med motivation och kreativitet i Mönks modell, den *triadiska interdependensen*. Då läraren kommenterar lösningen med ”*Men om du ska flytta den kortaste vägen*” visar flickorna förmåga till flexibilitet och även här en snabbhet i tanken då de omedelbart har ett nytt lösningsförfarande som uppfyller lärarens nya krav om en kortare väg. Kalle hänger inte riktigt med i dessa förklaringar och påtalar detta för flickorna. Båda flickorna tar sig då tid och hjälps åt att förklara, ibland samtidigt. De flyttar mynten flera gånger, hela tiden enligt andra lösningen ovan, och Kalle ritar under tiden upp mynten och flyttningarna på sitt papper. Andra övningen som eleverna arbetar med, problem 1, har karaktären av öppet problem i det att förutsättningarna inte är tydligt angivna i uppgiften. Ska eleverna anta att de ska söka efter ett mönster eller en relation mellan de olika färgerna eller går det bra att gissa? Finns det bara en kortlek o.s.v.? Eleverna tycks ha etablerat en sociomatematisk norm som säger att skoluppgifter kan lösas givet de förutsättningar enligt vilka de är konstruerade och utan beaktande av formella matematiska aspekter. Uppgiften ger dock upphov till intressanta diskussioner och gruppen visar motivation och kreativitet då de föreslår olika möjliga strategier och även argumenterar för varför dessa inte är hållbara. De fördelar arbetsuppgifter mellan sig och utvärderar resultat. De visar också sin osäkerhet inför hur uppgiften ska tolkas och inför sina resonemang då de frågar ”*Är det rätt Eva?*” och ”*kan man göra så?*” vilket kan tolkas som att de försöker bekräfta sociomatematiska normer. I den tredje uppgiften visar Erica hur hon lugnt och metodiskt arbetar sig fram till lösningen samtidigt som hon på ett korrekt sätt argumenterar för varför de andras förslag inte är möjliga. Hon försöker inte övertala sina gruppmedlemmar utan istället övertyga dem genom argument och förklaringar. Hon förstärker därmed sociomatematiska normer om att lösningsförslag måste vara tydliga och ha acceptans av alla i gruppen innan de ses som gällande.

Sammanfattning och slutsatser av hel- och halvklassundervisning

Metoden för helklassundervisningen i Ericas och Axels klasser är den klart vanligaste i Sverige: enskilt arbete i läromedel. Båda eleverna arbetar i andra böcker än övriga klasskamrater. Böckerna har valts ut av deras lärare i samråd med speciallärare och specialpedagoger vid skolan. Böckerna är avsedda för elever i högre årskurser och arbetet under dessa helklasstimmar kan ses som acceleration snarare än berikning.

Undervisningsupplägget vid Spetsgruppens problemlösningstimmar möjliggör ett undersökande arbetssätt där de både i små grupper och i den större samlingen kan skapa möjligheter för matematisk kommunikation, argumentation och logiska resonemang. I diskussionen etableras sociomatematiska normer avseende vad som är en acceptabel lösning och förklaring, vad som är en annorlunda lösning och även vilka lösningar som kan anses mest effektiva eller sofistikerade.

På samma sätt är den första aktiviteten hos Axel, att säga något som blir 1000, en aktivitet där alla elever har möjlighet att delta och uttrycka sina matematiska förmågor. Övningen inbjuder dessutom till reversibelt tänkande: att utgå från helheten och dela upp den i termer och/eller faktorer. Läraren har möjlighet att stödja förslagen och diskussionen genom att ställa fördjupande frågor, bekräfta lösningar och göra eleverna uppmärksamma på vad som är en acceptabel eller mer sofistikerad lösning.

Gruppövningar

I detta avsnitt beskriver jag tillfällen då Axel och Erica tillsammans med en klasskamrat eller annan elev löser problem.

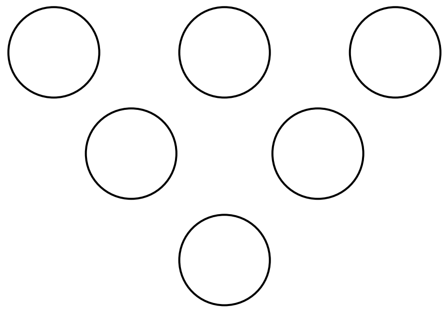
Axel

Nedanstående uppgift presenterades för mig första gången under en halvklasslektion hos fallstudieeleven David och hans lärare. David gick då i årskurs tre. Eleverna arbetade två och två och uppgiften var en av fem uppgifter som läraren ville att eleverna skulle arbeta med under denna halvklasslektion. Namnet på uppgiften var ”Magiska figurer” och det fanns två svårighetsgrader. Uppgiften är ett tydligt exempel på ett rikt problem då den är lätt att förstå, utmanar och kräver ansträngning samt inbjuder till egna generaliseringar och fördjupningar. Vidare kan den lösas på fler olika sätt med olika strategier vilket ger upphov till matematiska diskussioner (Taflin, 2007, s. 22).

Uppgift:

Ställ sex tallrikar i form av en triangel (se figur nedan). Uppgiften är att fördela 21 kulor i de olika tallrikarna så att summan längs med varje sida är

densamma. Om detta är för lätt, inför regeln att ingen grop får vara tom och att det måste vara olika antal stenar i alla gropar.



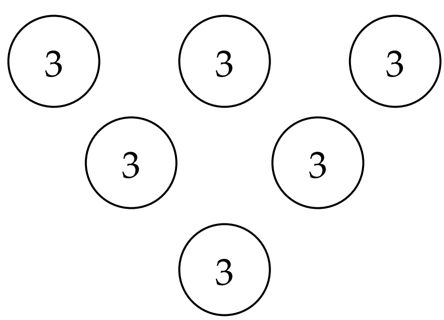
David som under lektionen arbetade tillsammans med sin klasskamrat Lucas, var det enda par som hann komma fram till övningen under lektionstiden. De fann också en lösning till första delen av uppgiften innan lektionen var slut. Några dagar senare fick jag möjlighet att åter presentera uppgiften för Axel och Hampus. De gick då i årskurs två. Det var första gången dessa pojkar gjorde en matematisk övning tillsammans.

Jag börjar med att presentera uppgiften för eleverna. Jag har ställt fram sex skålar och 21 glaskulor. Jag ställer skålarna enligt figuren och ber pojkarna lägga de 21 glaskulorna i skålarna så att det blir lika många kulor längs varje sida i triangeln. Jag säger också att de skall samarbeta och försöka hjälpas åt med övningen.

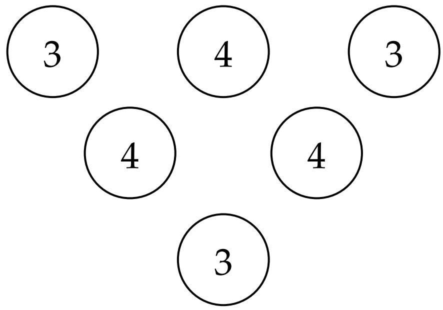
Axel tar alla kulorna och börjar lägga i skålarna medan Hampus tar ett papper som jag har lagt fram och börjar rita av skålarna.

Axel *Det blir tre i varje, nej det blir bara 18. Ok, då blir det såhär.*

Axel lägger ut kulorna med tre i varje.



Hampus *Nej, sen tar vi en där och en där och en där.* [Hampus tar de överblivna kulorna och lägger i mittenskålarna längs varje sida.]



Axel *Ja, detta stämmer. Tre treor och tre fyror det blir 21.*

Eva *Är det lika mycket i den raden* [pekar längs ytterkanten i triangeln] *som i den* [pekar] *som i den* [pekar] *nu då?*

Axel *Aha, det var det vi skulle göra.*

Hampus *Det är de….*

Hampus blir avbruten och Axel överröstar Hampus.

Axel *Ja, det är lika mycket.*

Eva *Hur mycket är det längs varje sida.*

Axel *Det är 10, 10 och 10.*

Eva *Ni löste detta väldigt snabbt.*

Jag var fascinerad över deras snabbhet och intensitet och rycktes med i tempot vilket gjorde att jag direkt övergick till andra delen av uppgiften utan tanke på att ställa följdfrågor om första delen.

Eva *Nu skall jag göra ett lite svårare exempel så nu får ni lyssna noga på instruktionerna så att ni vet vad ni skall göra.*

Jag förklarar förutsättningarna för den andra delen av övningen. Det får inte ligga samma antal kulor i skålarna och det får inte vara någon skål som är tom. Axel har redan börjat lägga kulor i skålarna och lyssnar inte riktigt på vad jag säger.

Axel *I varje rad eller?*

Hampus sitter och skriver på sitt papper.

Eva *Försök att prata er samman om hur ni skall göra. I varje skål skall det vara olika antal kulor, i varje rad skall det vara lika antal.*

Axel *Jag tror jag vet.*

Samtidigt lägger han kulor i skålarna.

Hampus *Det är ju lika många där och där.*

Axel *Fem, två och tre är tio.*

Hampus *Men det är ju fortfarande lika många där och där, det kan det inte vara.*

Axel *Nej, det stämmer inte. Det blir inte 10 där.*

[…]

Eleverna fortsätter på den inkörda vägen, enligt ovan. Axel försöker placera ut kulorna i skålarna, fast besluten att det ska vara tio kulor i varje rad. Han tar mindre hänsyn till de nya förutsättningarna, att det inte får vara två skålar med lika antal kulor, vilket Hampus fokuserar på. Samarbete mellan pojkarna saknas nästan helt, de framför sina egna åsikter och lyssnar sällan på varandra. Efter en stunds arbete, utan framgång, ger jag dem ett tips trots att de inte vill ha något. Jag ber dem koncentrera sig på att lägga olika antal kulor i skålarna. När de klarat detta ber jag dem istället flytta skålarna. Eleverna kommer snabbt med en lösning där varje sida innehåller tio kulor. Inte heller nu ställer jag några fler följdfrågor utan uppgiften avslutas.

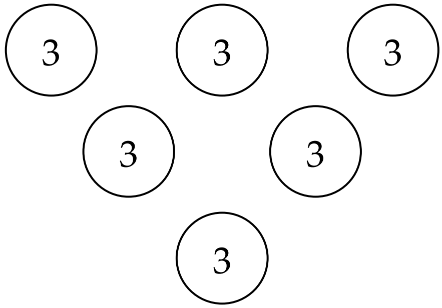
Två år senare, då eleverna gick i årskurs fyra, träffades vi för att diskutera hur de upplevde skolan, matematikundervisningen, nya läraren och mycket annat. I träffen ingick även ett antal matematiska aktiviteter, varav en var samma som uppgiften ovan. Detta var ett medvetet val från min sida då jag ville studera hur eleverna utvecklats men framförallt studera hur diskussionen och lösningsförfarandet kunde fördjupas genom uppföljande frågor och viss handledning från observatörens sida. Skulle det bli en annorlunda och matematiskt intressantare diskussion med ovan angivna ingång?

Samma fråga som vid förra tillfället ställs nu till eleverna. De uppmanas att tänka högt och att samarbeta. Pojkarna har ett visst antal kulor var i händerna när övningen startar.

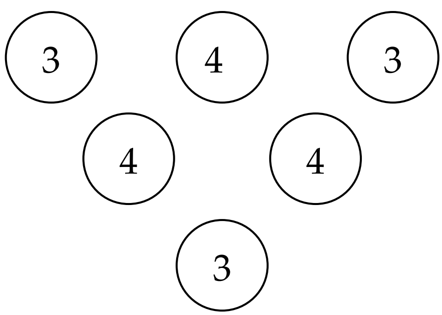
Axel *Ska vi börja lägga ut såhär, en i varje?*

De turas om att lägga ut kulor i skålarna, jämt fördelade.

Axel *Nu har vi tre i varje.*



Eva	*Hur tänker ni nu?*
Hampus	*Hur många har vi kvar?*
Axel	*Jag tänker såhär, ja vi har här* [visar de tre kulor han har i handen], *lägger vi en här…* [Axel lägger en kula i en av de mellersta skålarna]
Hampus	… *och en här* [pekar på en annan av de mellersta skålarna och Axel lägger en kula i denna skål].
Axel	… *och en här* [lägger en kula i den av de mellersta skålarna som fortfarande bara har tre kulor].

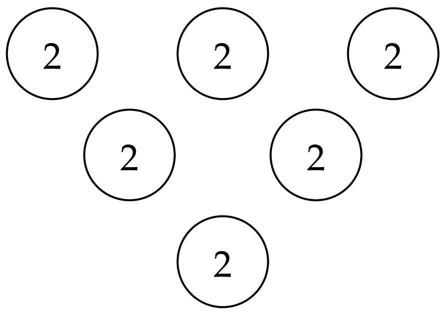


Eva	*Hur många har ni i varje nu?*
Axel	*Tio.*

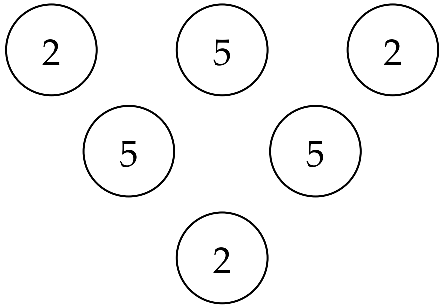
Det tog eleverna 30 sekunder att komma fram till detta svar.

Eva	*Då frågar jag såhär, för det gjorde jag inte förra gången jag var hos er, men nu undrar jag; Går det att lösa detta på ett annat sätt?*
Axel	*Ja, jag tror det.*

Eva	*Går det att ha något annat än tio längs varje sida?*
Hampus	Mm
Axel	*Man kanske lägger…*
Eva	*Ni får gärna tänka lite.*
Axel	*Ska vi lägga såhär, två och två och…* [Axel lägger två kulor i varje skål medan Hampus tittar på]. *Sen har vi de här, typ* [öppnar handen och visar Hampus]



Hampus	*Hur många har du kvar? Hur många har du där?*
Axel	*Eller vi, eller det här funkar, eller det funkar det…*
Hampus	*Det beror på hur många har du…*
Axel	*Ska vi kolla om det…*
Hampus	*Jo, det här kommer att funka, det kommer att funka!* [Hampus tar kulor från Axels hand] *Du lägger en där, en där och en där och så en där, en där och en där och… såhär.*
Axel	*Nämen den…*
Hampus	*Då är det fem…*



Eva *Kan någon förklara hur det är nu?*

Axel *Nio i varje*

Eleverna har nu arbetat 90 sekunder totalt med uppgiften.

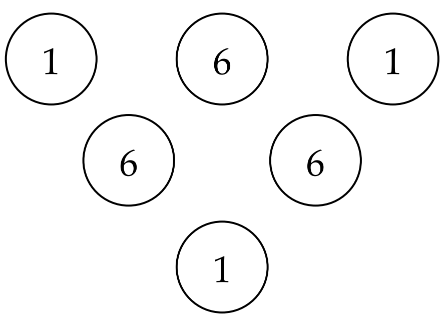
Eva *Vad gjorde ni egentligen, från det ni hade förra gången?*

Axel *Vi la ut två här istället för tre…*

Hampus *… och så fler här*

Eva *Förra gången hade ni tre i hörnen och så fyra här* [pekar på mellanskålarna] *och nu hade ni två i hörnen och fem här* [pekar igen] *och då blev det nio. Går det att göra på fler sätt?*

Hampus *Ja, man tar en från varje sånhär där det är två och lägger en så… så det blir sex i varje.*



Axel *… så det blir en i varje här*

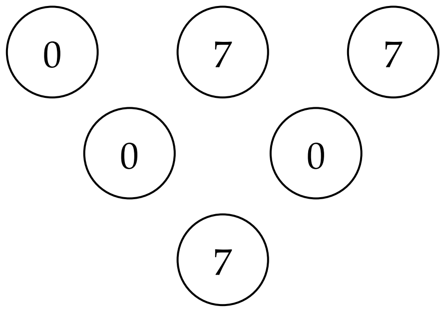
Eva *Hur många blev det nu?*

Hampus *Åtta*

Eva *Nu har ni haft tio, nio och åtta. Går det att ha fler?*

Axel *Vet inte*

Hampus lägger över kulorna i hörnskålarna till de mellersta skålarna. Axel är inte riktigt närvarande i diskussionen nu, han leker lite med materialet och jag får en känsla av att hans tankar är på annat håll.

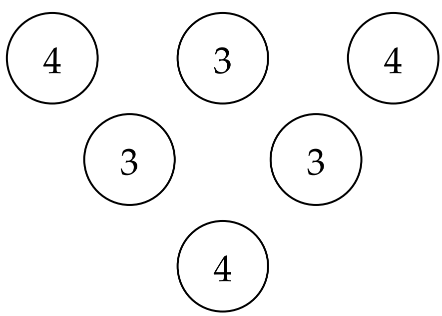


Eva *Sju, eller hur? Sju, åtta, nio och tio har ni haft. Då frågar jag, finns det ännu fler?*

Tystnad i fem sekunder. Därefter börjar Hampus plocka upp kulorna ur skålarna.

Hampus *Jo, det gör det. Först tre i varje först* [Hampus lägger tre kulor i varje skål och Axel visar nu intresse för uppgiften igen] *det har vi där och så där…*

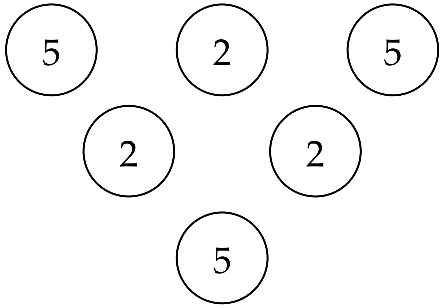
Axel *Ska vi lägga… eller vad sa jag, då blir det elva i varje.*



Eva *Elva, går det ännu fler*

Axel *Vänta, kan man ta bort de här och så lägger man ut dem på kanterna istället.*

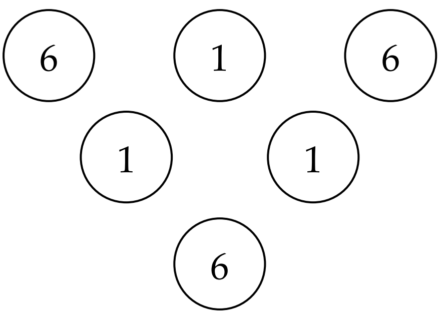
Hampus *Ja*

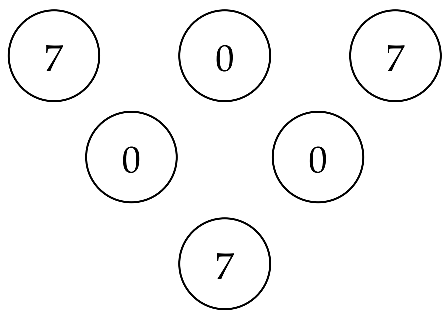


Hampus *Tolv*

Axel *Tolv. Vänta, sen gör man, sen, ta bort… och så här…*

Axel fortsätter att plocka kulor från de mellersta skålarna ut till hörnskålarna och får fram summorna 13 och 14 i yttersidorna. Hampus är hela tiden med och aktiv men det går nu i ett högt tempo.





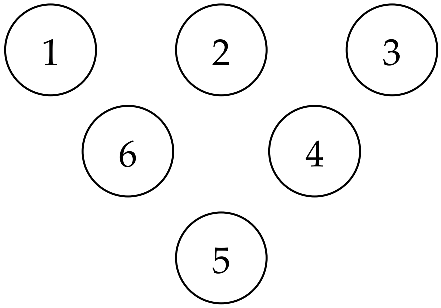
Eva *Vad ni är duktiga, nu hittade ni alla sätten. Jag blir mycket imponerad av er.*

Eleverna har arbetat med uppgiften totalt tre minuter. Innan vi går över till nästa del av uppgiften diskuterar vi hur många olika lösningsalternativ pojkarna kommit fram till och om det kan finnas ytterligare. Därefter ger jag förutsättningar för nästa deluppgift då det måste vara olika antal kulor i skålarna och ingen av skålarna får vara tom. Axel börjar lägga ut kulor i skålarna medan jag pratar och jag väljer att ge dem ett tips direkt.

Eva *Ni behöver inte få lika i alla sidor nu från början utan tänk på att ni ska ha olika antal kulor i skålarna, hur ska ni lägga ut då?*

Hampus *Då är det ju bara ett, två, te, fyra, fem och sex.*

Eleverna hjälps åt att lägga ut kulorna i skålarna enligt Hampus förslag.



Axel *Ja, ska vi flytta den dit?*

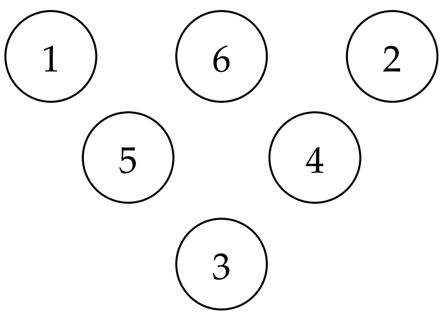
Eleverna flyttar runt skålarna och

Eva *Jag skulle gärna vilja att ni tänker högt också.*

Axel *Ska vi testa såhär eller, vad tycker du?*

Eleverna flyttar runt skålarna, som jag tolkar det, utan någon strategi. Under ett antal sekunder är det svårt att urskilja deras utsagor då flyttningen av skålarna överröstar.

Axel *Här är det nio, här är det nio, här är det nio.*



Eva *Bra, det tog inte ens 20 sekunder för er att lösa den. Jag tror ni hade lite, lite tur eller? Hur tänkte ni?*

Hampus *Man sätter ju såhär ett, två, tre, fyra, fem och sex i början och sedan är det bara att raffla om.*

Eva *Och när du rafflar om hur tänker du då?*

Hampus tittar på skålarna med kulor en kort stund.

Hampus *Den högsta ska ha de två lägsta och så höga som möjligt på kanterna.*

Eva *Bra. Hur tänkte du, Axel?*

Axel *Jag vet inte, jag tänkte inte så mycket.* [Axel är nu inne i en ny period av ointresse och sysslar med annat]

Eva *För det ni gjorde är, titta här nu, ni satte de tre lägsta i hörnen, eller hur… och de tre högsta här emellan. Då fick ni det att fungera och ni fick en lösning då det är nio i varje. Finns det fler lösningar här också?*

Hampus *Tio kan man göra. Så…*

Omflyttning av skålar sker nu under ca 5 sekunders tystnad.

Axel *Nej, det funkar inte. Här är tio, här är…*

Eva *Ni får gärna berätta, för det är det enda jag kan höra sedan, hur ni tänker.*

Axel *Om man tar de höga i… nej, vänta, jaha såhär kanske*

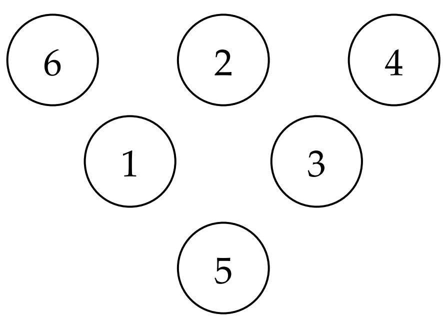
Eva *Men prova*

Omflyttning av skålar under ca 15 sekunders tystnad.

Axel *Här är det tolv och här är det också tolv eller nej, eller jo*

Hampus *Jo, det är tolv, tolv, fyra, tre och fem*

Axel *Här är det också tolv. Tolv, tolv*



Eva *Bra, nio hittade ni först och sedan hittade ni tolv. Undrar om det finns fler?*

Hampus *Nej...*

Axel *Jo, det måste finnas fler.*

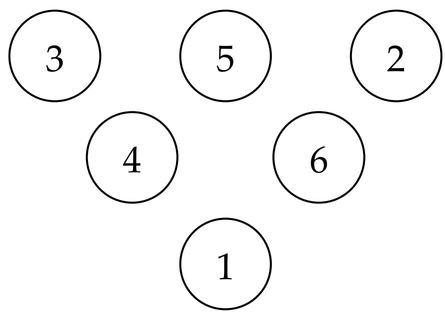
Eva *För att jag frågar eller varför?*

Axel *Jag vet inte, det känns så.*

Eva *Om det skulle finnas fler, hur skulle ni tänka då, för nu hade ni de lägsta i ytterkanterna och sedan de högsta i ytterkanterna. Om det skulle finnas fler hur skulle man tänka då?*

Hampus *Stor, liten, stor, liten, stor, liten, stor*

Axel *Jag tycker att vi ska ha den här, sen tycker jag att vi ska ha den här, så tycker jag den… nej, det blir fel.* [Axel flytta skålarna så att det blir omväxlande höga och låga tal]



Hampus *Jo, vänta kolla. Kan vara rätt.*

Eva *Men nu är det ett, två, tre i hörnen, den har vi redan haft.*

Eleverna flyttar om skålarna igen.

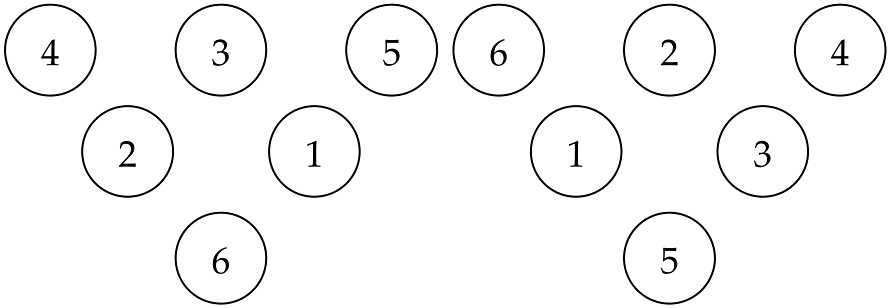
Axel *Vänta, ska vi testa varannan igen. Ska vi testa…*

Eva *Vill ni ha papper och penna istället och rita ringarna?*

Axel *Nej*

Hampus *Nej*

Hampus *Men om man vrider den såhär och har sexan här uppe och femman här…*



Eva *Då blir det samma som ni hade innan fast man ser den från olika håll och det räknas då som samma lösning*. [visar från mitt håll och från Hampus håll]

Axel *Nu har jag hittar en, nej, det har jag inte alls.*

Hampus *Nä, har du kollat.*

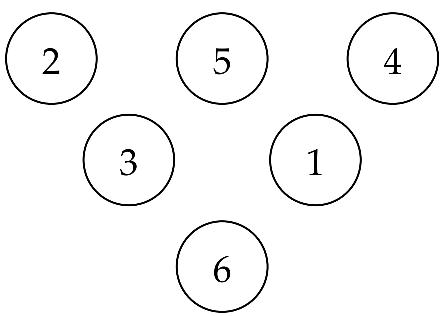
Axel *Ja, det har jag.*

Eva *Vill ni ha ett tips?*

Tystnad. Axel arbetar intensivt med att studera kulorna och flytta om skålarna och lyssnar inte, Hampus verkar nu lite trött.

Eva *Första gången hade ni ett, två tre i ytterkanter och fyra, fem, sex i innerkanter och sedan fyra, fem sex i ytterkan…*

Axel *Nuu, nu, nu, elva nu, elva, elva, elva!*



Eva *Vad är det du har gjort nu? Hur har du satt dem?*

Axel *Ja, vad har jag gjort? Jag satte varannan eller nej det gjorde jag ju inte.*

Hampus *Jo, stor, liten, stor*

Axel *Nej, här är inte varannan* [pekar på tvåan och trean].

Eva *Om vi koncentrerar oss på de som är i hörnen och de här inne. Hur är skillnaden…*

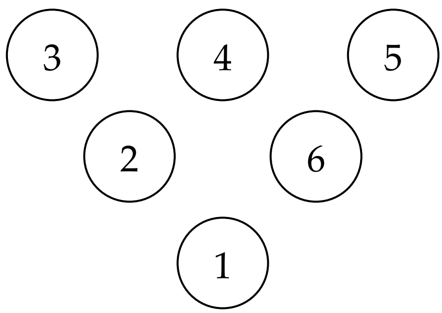
Axel *Jämna och udda*

Eva *Bra!*

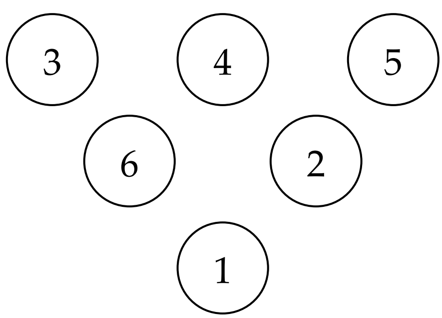
Hampus *Då kan vi ju bara byta plats på dem sen.*

Axel *Ja!*

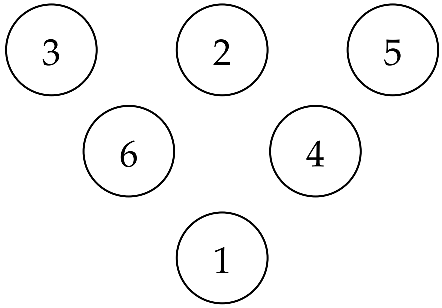
Eleverna hjälps åt att byta plats på skålarna.



Axel *Nej, det går inte vi måste byta plats på typ, ettan och fyran, nej, nej vi måste byta plats på några* [pekar nu på sexan och tvåan].



Axel *Jo, jo, jo, jag har hittat tio också* [byter plats på tvåan och fyran].

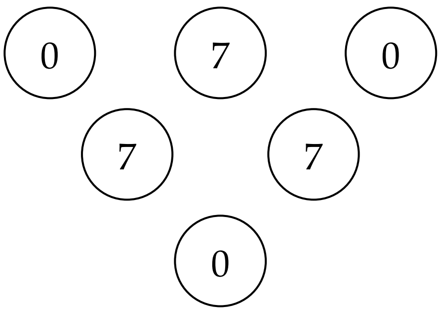


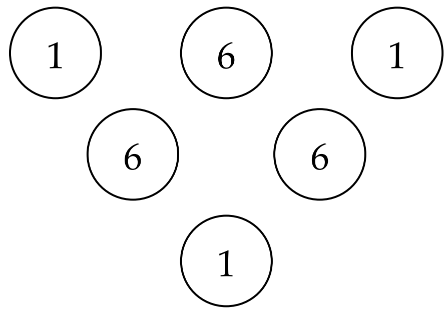
Eva	*Bra, då har ni ett, tre, fem i ytterkanterna. Förra gången hade ni två, fyra och sex i ytterkanterna. Ni sa ju varannan tidigare i er lösning och det är det ju på sätt och vis i dessa lösningar men det gäller att ha dem på rätt plats också. Hur många lösningar har ni haft nu?*
Axel	*Fyra olika.*
Eva	*Ni hittade nian först eller?*
Hampus	*Nian, tolvan, tian, elvan*
Axel	*Nio, tio, elva och tolv*
Eva	*Tror ni det finns ännu fler*
Axel	*Nej, nio, tio … nej*
Eva	*Ni har haft de små och de stora i ytterkanterna och de udda och de jämna.*
Axel	*Nej, då finns det inte fler. Då tar vi fikapaus.*
Eva	*Det gjorde ni jättebra. Hur är det att jobba med sådana här problem?*
Axel	*Ganska kul men enkelt.*
Eva	*Var det enkelt? Jag tyckte att jag gjorde det lite svårare idag när jag ställde följdfrågor.*
Axel	*Lite*

Uppgifterna tog ca 15 minuter för eleverna att genomföra enligt redovisningen ovan.

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:
Enligt förutsättningarna i första delen av uppgiften:

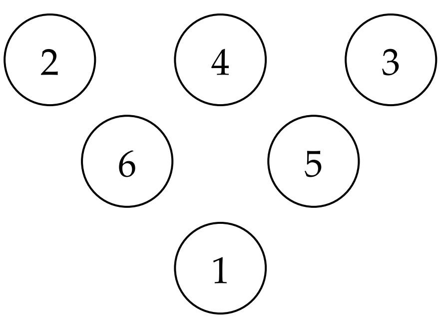
21 kulor kan fördelas i de sex skålarna så att summorna längs sidorna antar heltalsvärden från 7 upp till 14. Detta beror på att hörnskålarnas kulor räknas dubbelt. Då hörnskålarnas antal är 0 blir sidornas summor 7, enligt bilden till vänster. Om en kula från varje mittenskål flyttas över till hörnskålarna, se bilden till höger, och räknas dubbelt får vi sidosummorna 8. För att få summan 9 flyttas ytterligare en kula över o.s.v. Detta ger åtta olika lösningar på problemet.

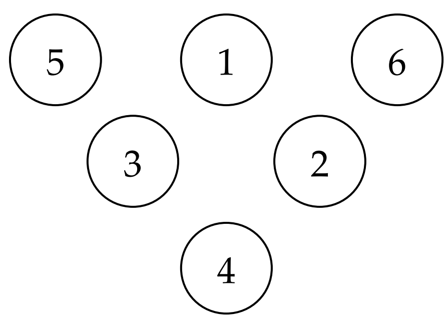




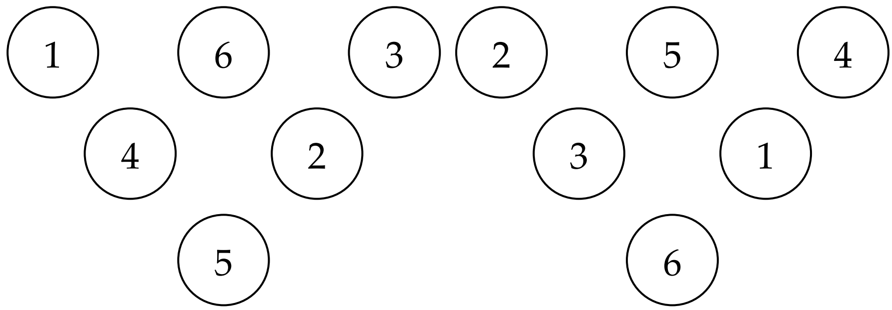
Enligt förutsättningarna i andra delen av uppgiften:

Kulorna måste nu vara fördelade enligt 1, 2, 3, 4, 5 och 6 i de sex olika skålarna. För att få den lägsta, lika stora, summan längs alla sidor måste skålarna med 1, 2 och 3 kulor placeras i hörnen. Då är det deras värde som räknas dubbelt och det resulterar i en totalsumma av 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 27 vilken kan fördelas så att summan av varje sida blir 9, enligt bilden till vänster nedan. Om det istället är skålarna med 4, 5 och 6 kulor som placeras i hörnen blir totalsumman 6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 och summan av varje sida 12, enligt bilden till höger.





Det finns ytterligare två lösningar på problemet och det är när skålarna med 1, 3 och 5, udda tal, placeras i hörnen, se bilden till vänster och när skålarna med 2, 4 och 6 kulor placeras i hörnen, se bilden till höger. Dessa förslag innebär en totalsumma på 30 respektive 33 vilket ger sidor med summan 10 respektive 11.



Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

Med de två sekvenserna ovan, valda från olika möten med Axel och Hampus, vill jag främst visa komplexiteten i hur förmågor framträder och därmed de svårigheter som lärare ställs inför i möten med elever som har fallenhet för matematik. Eleverna förvånar och fascinerar oss på ett sätt som gör det viktigt att, som lärare och observatör, vara väl förberedd för mötet och flexibel i den aktuella situationen för att eleverna ska ha möjlighet att använda sin potential. Jag vill även visa de möjligheter som finns till utveckling av matematiska förmågor och etablerande av sociomatematiska normer i till synes enkla aktiviteter. I diskussionen av uppgiften ovan finns möjlighet för en lärare att fråga efter fler lösningar: ”*Går det att lösa detta på ett annat sätt?*” något som förbisågs av mig vid det första tillfället. Det är lätt att som lärare eller observatör fastna i fascinationen över elevernas förmågor och deras snabbhet, i att identifiera dem snarare än att stödja dem. Stödjande frågor, som den ovan, kan öka elevernas möjlighet att reflektera över lösningarnas variation, argumentera för olika lösningsförslag samt se annorlunda och mer sofistikerade lösningar, d.v.s. skapa och etablera sociomatematiska normer som påverkar deras möjligheter att utveckla förmåga till logiskt resonerande, flexibilitet i tänkandet och att generalisera ett matematiskt resonemang. Det finns också möjlighet att kommentera lösningar som goda och acceptabla: ”*Ni har haft de små och de stora i ytterkanterna och de udda och de jämna*” och att bekräfta att lösningen är eller inte är annorlunda: ”*Då blir det samma som ni hade innan fast man ser den från olika håll och det räknas då som samma lösning*”. Det finns möjlighet att locka fram matematisk kunskap: ”*Jämna och udda*” vilket kan bekräftas: ”*Bra!*” och kunskapen kan därmed accepteras både av den som givit svaret men också av övriga elever. Allt etablerande av sociomatematiska normer har sin grund i interaktionen mellan lärare och elev samt elever emellan och underlättas av följdfrågor och bekräftelser.

Vid första tillfället prövar eleverna olika strategier. Medan Axel direkt tar sig an kulorna och börjar placera dessa i skålarna tar Hampus fram papper och penna och börjar rita av skålarna. Han hinner dock inte långt förrän hans nyfikenhet och intresse för vad Axel gör tar över. Båda eleverna visar god uppfattningsförmåga, de fångar strukturen i problemet och är direkt med på vad som behöver göras. Axel är snabb, både vad gäller huvudräkning och att hitta strukturer men han är inte heller rädd för att prova sig fram. Hampus är lite försiktigare och funderar gärna en stund själv vilket är svårt när Axel driver på. Hampus visar förmåga att formalisera det matematiska materialet då han snabbt ser ett mönster av relationer mellan de olika objekten i triangeln och därmed vet var han ska placera de tre resterande kulorna.

Vid andra tillfället får eleverna möjlighet att gå vidare och försöka finna fler lösningar. De visar då förmåga att se och operera med formella strukturer av relationer och samband. Framförallt Hampus som hittar ett system, där han, med hjälp av Axel, hela tiden söker summor som minskar med ett. Hampus visar också flexibilitet i tänkandet då det inte längre är möjligt att finna fler lösningar med samma strategi och det fortfarande efterfrågas fler. Han utgår från ursprungssituationen men varierar var han lägger de tre sista kulorna. Då ser Axel genast det omvända sambandet: att genom flyttning av kulor från mitten ut mot hörnen skapa större summor. Genom hela lösningsprocessen visar de snabbhet i tankeförmåga då de genomför alla lösningarna på mindre än tre minuter. De visar förmåga att formalisera det matematiska materialet och se samband mellan variabler samt en vilja och iver att finna fler lösningar. De visar även förmåga att med säkerhet hantera siffror och räkneoperationer.

Nästa version av uppgiften kräver ett annorlunda angreppssätt och ytterligare förmåga till sekventiellt logiskt resonerande, förmåga att generalisera samt även här en känsla för talens inbördes storleksordning. Efter viss handledning i form av ett tips finner de snabbt en lösning, tillräckligt snabbt för att jag ska tolka fyndet av lösningen som tursam. Hampus ger dock en klar och tydlig förklaring till varför förslaget fungerar: ”*Den högsta ska ha de två lägsta och så höga som möjligt på kanterna*”. Även om förklaringen skulle kunna vara en efteranalys visar han förståelse för uppgiftens karaktär och sambandet mellan de olika mängderna. Axel visar i nästa steg, även han, förståelse för hur talen bör placeras utifrån sin storlek. Detta visar en förmåga att se den generella strukturen i problemet samt ett matematiskt minne då han söker efter samband utifrån att han insett att de tre lägsta talen var placerade i hörnen i den tidigare lösningen. I sökandet efter de avslutande två möjligheterna visar båda eleverna tidigt att de ser ett samband mellan ”*Stor, liten, stor, liten, stor, liten, stor*” eller ”*Vänta, ska vi testa varannan igen*”. De har tidigare haft antingen låga tal eller höga tal i hörnen och söker nu ett mellanting. Axel visar sin matematiska kunskap då han snabbt ser en koppling mellan ”*jämna och udda*” tal i den tredje lösningen och Hampus visar en flexibilitet och förmåga att se ett omvänt förhållande i sitt uttryck: ”*Då kan vi ju bara byta plats på dem sen*”.

Elevernas utveckling av matematiska förmågor i ovanstående uppgift, från första till andra tillfället, framgår till viss del men är svåra att jämföra. Eleverna har, med stöd av följdfrågor och viss handledning, möjlighet att uttrycka betydligt fler matematiska förmågor vid andra tillfället (se ovan). Viss matematisk mognad och utveckling syns dock och det gäller främst förmåga att samarbeta och ta hänsyn till varandras förslag och lösningar. De är mer intresserade av att höra den andres åsikter vid det andra tillfället och försöker även fördela ansvaret jämnare. Mognaden kan till viss del kopplas till att de är äldre och mer socialt utvecklade men det kan även tolkas som ett utvecklande och etablerande av sociomatematiska normer som de kan ha tagit del av i matematikundervisningen. Även jag är tydlig med att påpeka att de ska samarbeta och försöka förklara högt hur de tänker, vilket också kan påverka dem i lösningsförfarandet.

Erica

Vid ett tillfälle, när Erica går i årskurs tre, har hennes lärare tillsammans med kollegan i parallellklassen och mig bestämt att eleverna i de båda klasserna ska få testa på Känguruproblem inför den kommande Kängurutävlingen. Detta blir en annorlunda lektion, som helt skiljer sig från den ordinarie matematikundervisningen i årskurs tre. Den är också inledningen till det samarbete i matematik mellan parallellerna som startade i årskurs fyra och som tidigare beskrivits.

Klasserna delades in i grupper om två till tre elever som gemensamt resonerade och löste tävlingsuppgifterna från ett tidigare tävlingstillfälle. Grupparbetet föregicks av en grundlig instruktion där Ericas lärare tillsammans med mig berättade om tävlingen och om uppgifterna och deras karaktär. Vi löste även några uppgifter gemensamt innan grupparbetet inleddes. Jag valde att lägga en diktafon hos Erica och hennes gruppkamrat Pelle och kunde därmed, emellanåt, även lyssna på de övriga gruppernas resonemang. Det var diskussioner i alla grupper med skiftande ljudvolym och det diskuterades, av det jag kunde höra, enbart matematik. Några grupper behövde stöd och frågade mig eller lärarna om råd. Noterbart var dock att det var betydligt färre händer i luften vid övningen än under en vanlig klassrumslektion. Då ska tilläggas att detta var första gången eleverna mötte Känguruuppgifter. Nedan följer ett utdrag ur Ericas och Pelles diskussioner då de arbetade med 2004 års tävlingsuppgifter (NCM, 2010).

Exempel 1: (Problem 4)

I ett träd satt det skator. Plötsligt flög fem av dem iväg, men tre kom tillbaka. Då sitter det 12 skator i trädet. Hur många skator satt det i trädet från början?

Pelle	[läser uppgiften högt]
Erica	*Då kan vi tänka såhär. Om det satt 12 skator och*
Pelle	*… och så flög 5 iväg*
Erica	*… och tre kom tillbaka*
Pelle	*… då är det 9*
Erica	*Då kan man göra det baklänges. Om tre kom tillbaka då tar man bort tre så är det 9 och så flög 5 iväg, då är det 14.*
Pelle	*Nej det borde bli 12 minus 5 så det ska var 7, nej, det kan det inte för det finns inte med.*
Erica	*Nej, det borde bli 14 för att två har ju ännu inte kommit tillbaka.*
Pelle	*Ja, det blir det.*

Denna uppgift är en av de uppgifter Erica och Pelle återvänder till, då de efter drygt 20 minuter säger att de är klara, och uppmanas att kontrollera sina svar. Då följer nedanstående konversation:

Erica	*… och nästa med skatorna är ju lätt. Det är ju 14 skator minus 5 är 9 skator plus 3*
Pelle	*Det blir 12*
Erica	*Ja, 12 skator och då blir det ju rätt.*
Pelle	*Men då ska vi ju skriva 12 istället för 14*
Erica	*Nej, jag tänker ju såhär, vi har skrivit 14 och så flög 5 iväg och 3 kom tillbaka, då blir det 12 och man skulle ju ha 12 skator och då blir det ju rätt och då ska vi skriva 14, vi hade rätt.*

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:
Om x = antalet skator i trädet från början kan vi teckna följande ekvation $x - 5 + 3 = 12$. Ekvationen löses exempelvis genom att först subtrahera med 3 på båda sidor följt av att addera med 5 på båda sidor vilket ger $x - 5 = 9$ och slutligen $x = 14$.

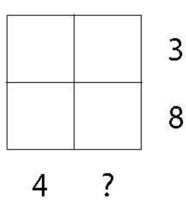
Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

Även om vi i Ericas första mening ”*Då kan vi tänka såhär*” ser att hon försöker få med Pelle i resonemanget fortsätter hon sin egen tankebana oberoende av vad Pelle säger. Hon känner till den sociala norm som säger att i grupparbete ska man hjälpas åt, en social norm, och hon försöker anpassa sig efter detta normsystem, men hennes vilja att förstå och lösa uppgiften tar över. Detta visar i likhet med klassrumsobservationerna ovan att sociala och sociomatematiska normer ständigt är i samspel och påverkar varandra. Ibland, vilket vi sett exempel på, kan denna påverkan vara positiv men lika ofta är de styrande sociala normerna till nackdel för skapandet och etablerandet av sociomatematiska normer och därmed utveckling av matematiska förmågor. Erica gör dock två goda försök att förklara sina tankegångar för Pelle under den första delen av uppgiftsdialogen. Det tyder på en sociomatematisk norm som är viktig för Erica, att ge en acceptabel förklaring som gör att Pelle förstår. Genom att variera resonemanget och förklara på olika sätt förmedlar hon också till Pelle att de kan lösa uppgifterna på olika sätt och komma fram till samma svar, vilket är en tydlig sociomatematisk norm. Hon gör ytterligare ett försök att förklara då de kontrollerar sina svar och märker att Pelle fortfarande inte är med på resonemanget. Inte vid något av dessa tillfällen repeterar hon sin lösning utan använder olika ordval och olika sätt att resonera sig fram till svaret.

Erica visar i uppgiften prov på förmåga att snabbt tolka en problemformulering samt förmåga till reversibelt tänkande, vilket hon tydligt förklarar ”*då kan man göra det baklänges*” då hon utgår från slutvärdet för att få fram begynnelsevärdet. Hon visar även förmåga till flexibilitet i sitt resonemang då hon inser att Pelle fortfarande inte förstått hur hon tänker. Hon förklarar därför sin lösning på ytterligare ett sätt, där hon formulerar slutresultatet i ord istället för i matematiska termer ”*det borde bli 14 för att två har ännu inte kommit tillbaka*”. Hon förklarar även denna gång på ett mycket övertygande sätt som visar att hon är helt säker på sitt resonemang.

Exempel 2: (Problem 5)

I rutnätet ska det stå ett tal i varje ruta. Om du lägger samman talen i den övre raden blir summan 3. I den nedre raden är summan 8. Summan av talen i den vänstra kolumnen är 4. Vilken är summan i den högra kolumnen?



Erica	[läser uppgiften högt]
Pelle	*Om vi lägger samman talen i den övre raden blir summan 3.*
Erica	*Summan av talen i den vänstra kolumnen är 4.*

Kort tystnad.

Erica	*Det kan kanske vara så att det ska bli lika mycket på båda sidor. Kanske ska det bli 11 på båda sidor. Där är det ju 11.*
Pelle	*Då skulle det bli 7*
Erica	*Ska vi ta 7 då, för då är det lika på båda sidor?*
Pelle	*Ja*

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:

a	b	3
c	d	8
4	?	

Vi döper de okända talen i rutorna till a, b, c och d och sedan summerar vi de vågräta raderna får vi följande:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ c+d=8 \end{cases}$$

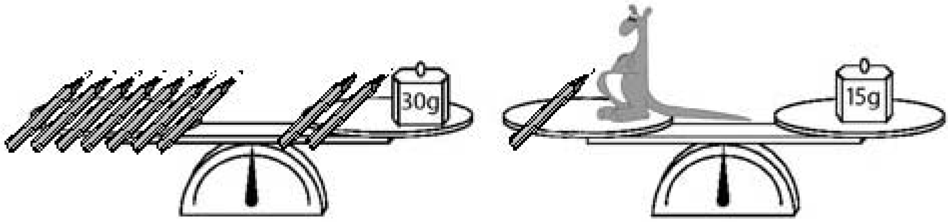
Detta innebär att a + b + c + d = 11. Vi ser att a + c = 4 och därmed är den sökta summan b + d = 11 – 4 = 7.

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

I denna uppgift är Erica inte lika övertygad om sitt matematiska resonemang. Hon håller dock fast vid att det bör vara lika stor summa ”*på båda sidor*” och skulle troligen haft förmågan att förklara varför om någon ifrågasatt hennes resonemang. Det hade troligen också hjälpt henne i hennes egen förståelse. Den sociala normen, att de bör samarbeta, framträder fortfarande tydligt i Ericas dialoger.

Exempel 3: (Problem 8)

Hur många gram väger kängurun?



Pelle [läser uppgiften högt}

Erica *Ok, den väger 15 g minus en penna.*

Kort tystnad, någon skriver.

Pelle *Där är det 7 pennor är lika med 32 gram.*

Erica *Nej, men vänta. Det är ju 30 gram. Om vi gör såhär, Pelle kolla här: om vi tar bort 2 pennor där och 2 pennor där, då har vi 5 pennor som väger lika mycket som 30 gram. Förstår du hur jag tänker?*

Pelle *Mm, 5 då blir det…*

Erica *5 delat på 30 är 6.*

Pelle *Väger en penna 6, nej,*

Erica *Jo*

Pelle *Nej, för om 2 pennor läggs där så blir det 42 gram där.*

Erica *Ja, och 7 gånger 6 är 42.*

Pelle *OK, en penna väger 6 gram och då väger Kängurun 9 gram.*

Erica *Ja, bra.*

Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:
Känguruns vikt = x och Pennans vikt = y. Då gäller följande samband

$$\begin{cases} 7y = 2y + 30 \\ y + x = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5y = 30 \\ x + y = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x + y = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 9 \end{cases}$$

Kängurun väger därmed 9 gram.

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

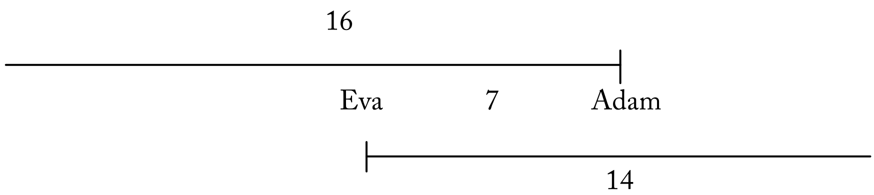
Uttrycket ”*Nej, men vänta*” kan tolkas som uttryck för en generell social norm. Erica inser att gruppövningen ska ske i samspel med kamraten och att det är hennes (och Pelles) uppgift att förklara sina tankegångar för varandra. Men i detta fall kan Ericas agerande också tolkas som uttryck för en sociomatematisk norm: Erica hör att Pelle inte har tolkat det matematiska materialet på ett korrekt sätt och att han därmed inte har hittat en lämplig lösningsstrategi, som hon själv tydligt ser, och hon ger då ett alternativt förslag till lösning. Hon förklarar metodiskt: ”*Om vi tar bort 2 pennor där och 2 pennor där, då har vi 5 pennor som väger lika mycket som 30 gram*” och hon kontrollerar också att Pelle förstår: ”*Förstår du hur jag tänker?*”. Hon försöker, med andra ord, förklara lösningen för Pelle på ett sociomatematiskt godtagbart sätt, trots att hon för länge sedan själv är övertygad om att lösningen är korrekt. När han kommer fram till rätt svar ger hon honom beröm: ”*Ja. Bra!*”.

Erica har snabbt format en strategi för att lösa uppgiften. Uttrycket: ”*Ok, den väger 15 gram minus en penna*” visar att hon har förmåga att identifiera vad som är relevant information i en problemformulering (i detta fall en bild). Hon visar också sin förmåga till logiskt, sekventiellt tänkande då hon utifrån premisserna inser att hon, för att dra slutsatsen om känguruns vikt, måste finna ett delmål, nämligen vad en penna väger. Då Pelle försöker sig på ett liknande resonemang inser Erica hans misstag och uttrycker sin oenighet med orden ”*Nej, men vänta*”. Hennes resonemang: ”*Om vi tar bort 2 pennor där och 2 pennor där, då har vi 5 pennor som väger lika mycket som 30 gram*” kan jämföras med ekvationen ovan $(7y = 2y + 30)$. Erica löser uppgiften genom att subtrahera med 2y på båda sidor och sedan dividera med fem på båda sidor. Hon har ännu inte mött ekvationer men hon visar i sitt resonemang förmågan att strukturera sin förklaring i enlighet med det formaliserade uttrycket ovan.

Exempel 4: (Problem 15)

Alla barn i Adams och Evas klass har ställt upp sig på ett led efter varandra. Bakom Adam står 16 barn. Ett av dem är Eva. Framför Eva står 14 barn. Ett av dem är Adam. Mellan Adam och Eva står det 7 barn. Hur många barn står uppställda i ledet?

Pelle	[läser uppgiften högt]
Erica	*Då kan vi skriva Eva och Adam såhär* [Erica ritar en skiss]. *Här är 7 barn och bakom Adam står det 16 barn och så ska vi se, framför Eva står 14 barn.*



Pelle *Hur kan det gå?*

Erica *Då måste man lägga ihop dessa.*

Pelle *Men om det är 16 barn bakom, då måste, vi ska se här, bakom Adam står 16 barn, ett av dem är Eva, framför Eva står 14 barn, ett av dem är Adam. Mellan Adam och Eva står det 7 barn. Hur många barn står uppställda i ledet?*

Erica *Undrar om det inte går att lägga ihop de här och sedan ta bort 7. Tror du det Pelle, om man lägger ihop de här, då blir det 30 och sedan drar bort 7. Men det är inte säkert att det blir rätt.*

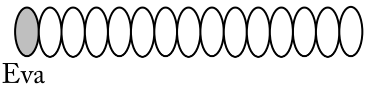
Pelle *Kan det inte vara 30 barn.*

Erica *Nej, jag tror att det är 23 barn.*

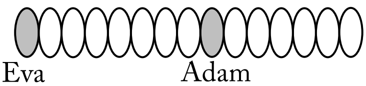
Ett alternativt lösningsförslag till stöd åt läsaren:
I de lösningförslag som presenteras på NCM:s hemsida står det i denna uppgift: ”Framför Eva står 14 barn. Framför Adam står det 6 barn (14 – 7 – 1 = 6). Hela ledet består av 16 barn bakom Adam, Adam själv och 6 barn framför Adam.”

Nedan återges det relativt korta lösningsförslag som NCM presenterade med stöd av en illustration:

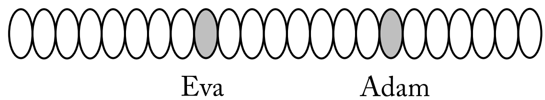
”Framför Eva står 14 barn.”



”Framför Adam står det 6 barn.”



”Hela ledet består av 16 barn bakom Adam, Adam själv och 6 barn framför Adam.”



Social och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningen:

Erica är, precis som vid lösning av exempel två, inte helt säker på sitt resonemang, i detta fall kan det bero på osäkerheten om hur Adam och Eva ska hanteras i beräkningen. Även om hon snabbt presenterar sitt förslag: ”*Då kan man lägga ihop dessa*” och troligen redan här har strategin klar, vill hon gärna ha stöd för sina tankar och uttrycker också detta: ”*Tror du det Pelle*”. Frågan från Erica kan tolkas som uttryck för sociala normer, dels att hon inte bör vara för självsäker, dels att elever i grupparbete bör ta hänsyn till varandra. Trots att Erica tidigare insett att Pelle inte har samma matematiska säkerhet som hon själv försöker hon dämpa sin egen roll och få Pelle aktiv i resonemanget. Hon försöker förklara för Pelle hur hon tänker: ”*Om man lägger ihop de här, då blir det 30 och sedan drar bort 7*”, men uttrycker också en osäkerhetskänsla: ”*Men det är inte säkert att det blir rätt*”. Här framträder en sociomatematisk norm: att hon vid osäkerhet ändå bör förklara sina tankegångar på ett tydligt och acceptabelt sätt. Efter bara några sekunders betänketid låter hon dock mer övertygad då hon i nästa mening argumenterar mot Pelles svar och slutligen bestämmer sig för vad hon vill svara: ”*Nej, jag tror att det är 23 barn*”. Erica är tydlig med att Pelles förslag inte är acceptabelt men ställer inte någon följdfråga till honom om hur han har tänkt. Eftersom elevernas kunskaper och säkerhet i ämnet skiljer sig åt får inte Erica något stöd eller någon utmaning i sitt resonemang och utvecklar därmed inte sina tankegångar ytterligare.

Ericas lösningsförslag skiljer sig från det som NCM presenterar. Hon utgår från hela ledet som hon menar består av 16 barn bakom Adam och 14 barn framför Eva vilket ger 30 barn. Hon är medveten om att hon räknat de 7 barn som står mellan Adam och Eva dubbla gånger och drar bort dessa. Hon är snabbt inne på detta resonemang då hon direkt, efter att hon ritat sin skiss, säger ”*Då måste man lägga ihop dessa*”. Om vi jämför de två lösningsförslagen, Ericas och NCM:s, ser vi att Erica använder sig av en kortare lösningsväg där hon ser den generella strukturen i problemet och presenterar en elegantare lösning. Precis som vid lösningen av övriga uppgifter ser vi en vilja och ett driv hos Erica att lösa uppgiften. Även om hon låter Pelle resonera och argumentera märks det att hon själv är helt inne i sina egna tankegångar.

Sammanfattning och slutsatser av gruppövningar

I redovisningarna ovan förekommer två olika former av gruppövningar. I Ericas fall arbetar eleverna i stort sett självständigt med problem utan möjlighet till stöd från lärare eller observatör. I Axels fall får eleverna vid andra tillfället stöd i form av viss handledning och uppföljande frågor som leder till att eleverna presenterar fler lösningar till problemet och uttrycker fler matematiska förmågor än vid det första tillfället. Vi kan anta att, Erica, hade haft större möjlighet till utveckling av matematiska förmågor om hon i problemlösningsdiskussionerna haft tillgång till en elev med samma matematiska intresse och fallenhet eller till en lärare eller observatör. I Axels och Hampus lösningsprocess kan vi se att de har nytta av varandras argumentation och att de gemensamt driver processen framåt men att de också är behjälpta av viss handledning och framförallt följdfrågor för att berika uppgiften.

I övningarna ovan ser vi lärares och observatörers viktiga, men svåra, roll för utveckling av matematiska förmågor. Aktiviteterna visar att det som en vuxen: lärare, observatör och förälder kan bjuda i samspel med elever med intresse och fallenhet för matematik är av avgörande betydelse för deras utveckling av matematiska förmågor och matematisk kunskap, givet att den vuxne är väl förberedd, flexibel och nyfiken, men även beredd att ge återkoppling, beröm och stimulans.

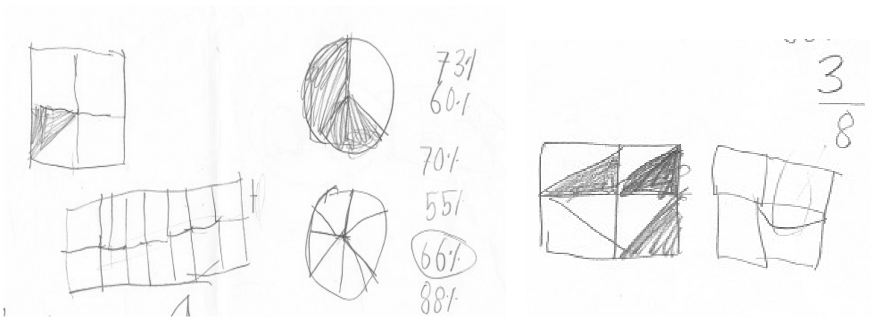
Interventioner med Axel och Erica

I detta avsnitt redovisas några av de matematiska problem som Axel och Erica arbetat med då jag träffat dem i enskilda intervjuer eller tillsammans med deras respektive mentor/speciallärare. Problemen är valda så att de representerar Axels och Ericas sätt att lösa matematiska problem och samtidigt fångar de karaktäristiska dragen i de individuella uttrycken för deras matematiska förmågor.

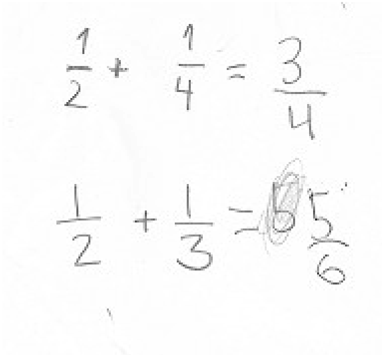
Matematiska diskussioner mellan Axel och hans mentor

Axel är en intensiv och, som tidigare beskrivits, en nyfiken pojke som hela tiden utmanar och ställer frågor. Han älskar att organisera lekar och tävlingar och tar själv gärna rollen som ansvarig eller domare. Tidigare, under förskoleklass och årskurs ett, riktades dessa tävlingar mest till vuxna medan hans idéer numera, till viss del, även riktas till jämnåriga kamrater.

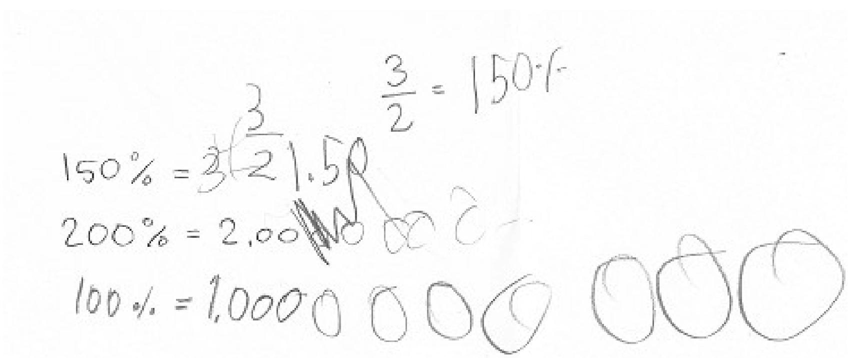
Vid en träff mellan Axel och hans mentor, där även jag deltog, diskuterar vi, efter önskemål från Axel, bråktal. Axel har precis börjat i årskurs två och varken Axels lärare eller mentor har tidigare diskuterat bråk med Axel. Direkt när vi träffas tar Axel initiativet och undrar om han får testa oss och se vem som är snabbast. Han ritar en cirkel och markerar 2/3 (se figur nedan). Han skriver olika alternativ i procent och ber oss bestämma vilket som är rätt. Jag svarar då 2/3 istället för 66 % som han skrivit. Axels kommentar ”*Ja, så kan man ju också skriva det men jag brukar använda procent*”. Han visar även andra figurer där han markerar vissa områden och skriver med lätthet hur stor andel som han markerat både i procent och i bråk.



Han får uppgiften 1/2 +1/4 av oss och funderar några sekunder och säger ”*det var svårt*” varpå han direkt skriver 3/4. Då säger jag ”*Det var ju inte svårt för dig. Då får vi testa en till*”. Jag skriver 1/2 + 1/3 och Axel ritar lite och funderar ”*det blir ju mindre än ett*” men han kan inte riktigt bestämma sig utan säger att ”*det är svårt*” varpå han skriver en 5:a men inget mer. Mentorn lägger då fram bråkstavar vilka Axel först inte riktigt vill se. Axel plockar fram 1/2 och 1/3 med lite påtryckning från oss. Han hittar en 1:a och därefter ser han snabbt att det saknas 1/6 mellan dessa. Då undrar jag igen hur man kan skriva summan av 1/2 och 1/3 och han säger då, fem sjättedelar, samtidigt som han skriver 5/6 på sitt papper.



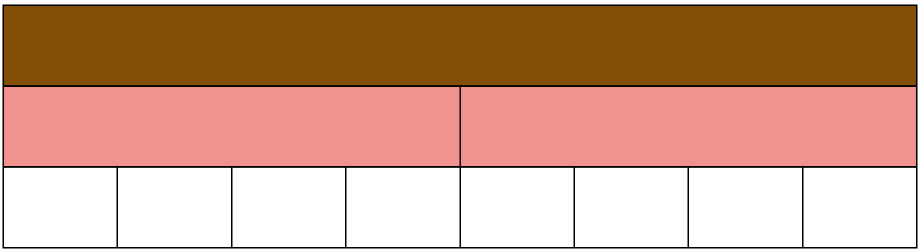
Mentorn frågar sedan om han kan skriva 3/2 på ett annat sätt. Axel svarar direkt ”*hundrafemtio procent*” och skriver samtidigt 150 % varpå mentorn frågar om Axel kan skriva det i decimalform. Axel, som nu har börjat rita nya bilder på sitt papper, verkar inte lyssna riktigt på mentorn. Mentorn undrar då vad 100 % är i decimalform. ”Det är svårt” säger Axel och nu förklarar mentorn för mig vad ”*det är svårt*” brukar betyda. Det är samma sak som ”*jag har inte riktigt lust*”. Axel förbereder istället tester till oss. Han vill som vanligt veta vem av oss som är bäst i matte. Han börjar skriva multiplikationstal 17·17 men mentorn stoppar honom och säger att han lovat att vara koncentrerad hos mentorn. Axel förstår och skriver direkt 1,0000 efter 100 % samt 1.50 efter 150 %.



I diskussionen med mentorn efteråt får jag veta varför han valde att ta upp även decimaltal i denna övning. Han hade fått information från Axels lärare att Axel möjligen inte hade decimaltal helt klara för sig. Det tror däremot mentorn att han har. Det handlar mer om Axels vilja. Vid deras förra träff hade de, på Axels initiativ, pratat om elefanter. Axel hade berättat om elefanterna men också nämnt att de kan väga 3,5 ton. I samband med detta hade mentorn frågat hur många ton Axel trodde att mentorn vägde och Axel hade direkt svarat ”*Sådär en 0,08 ton*”.

Matematiska diskussioner med Axel

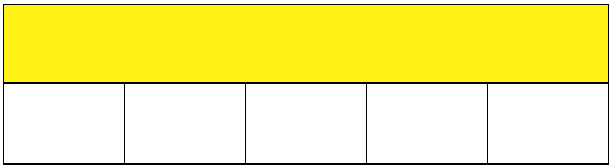
Några månader senare hade jag en enskild träff med Axel där vi arbetade med Cuisenairestavar (färgstavar). Mycket av arbetet handlade om relationer och bråktal vilka Axel nu behärskar problemfritt. Men i slutet ville jag även att Axel skulle svara med decimaltal. Nedan följer några utdrag av vår diskussion.



Eva	*Om den bruna är värd 8 vad är den rosa värd då?*
Axel	*Fyra*
Eva	*Och den vita*
Axel	*Ett*
Eva	*Men om den bruna är värd 10 vad är den rosa värd då?*
Axel	*Fem*
Eva	*Och den vita*
Axel	*Ett*
Eva	*Nej, ett, två, tre, fyra.*
Axel	*Oj, då 1,5*
Eva	*Räkna*
Axel	*1,5 och sedan 3 och 4,5 oj då, 1,25.*
Eva	*Där satt den. Nu får du börja tänka lite, det är inte busenkelt längre. Om vi säger att den bruna är värd 14*
Axel	*Då är den värd 7 och den där värd 3,5.*
Eva	*Hur tänker du då?*
Axel	*Det blir ju 3,5 och så hälften. Det är 1,25*
Eva	*Tänk efter nu. Vad är 1,25 och 1,25*

Axel *Oj, då det blir ju 1,75.*

Axel börjar bli hungrig och går ut för att äta mellanmål. När han kommer tillbaka har jag lagt ut följande matta:



Eva *Om den gula är värd 1 vad är en vit värd då?*

Axel *0,2*

Eva *Om den gula är värd en halv vad är den vita då?*

Axel *0,1*

Eva *Det gick ju jättebra. Märks att du fått lite energi i kroppen. Du måste ha varit väldigt hungrig.*

Axel *Ja, det var jag.*

Eva *Jag har nu lagt ut en ljusgrön och tre vita. Om den gröna är värd 1, vad är den vita värd då?*

Axel *0.333333 och så hur många treor som helst.*

Eva *Bra*

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningarna:

Träffen mellan Axel och hans mentor visar värdet av att utmana elever med intresse och fallenhet för matematik på deras nivå. Axel hade själv önskat att få arbeta med bråk och visade att han hade motivation att göra det även om hans kunskaper om procent ibland tog överhand. Efter viss påtryckning använde han sig av konkret material, färgstavar, och fann med hjälp av dessa lösningen till ett problem. Att han var tveksam till att använda materialet kan tolkas som en social norm: att sådant material endast används när en elev inte klarar uppgiften eller mer generellt av elever som har svårigheter i ämnet. Axel har svårt att erkänna att han inte omedelbart klarar en uppgift och vill ogärna ha tips som han ser som fusk. Möjligen ser han även användande av konkret material som fusk. Även här kan vi se att etablerade sociala normer kan hämma utvecklingen av matematiskt produktiva sociomatematiska normer. En etablerad social norm både bland vuxna och elever är att konkret material används framförallt av yngre elever och främst de som har svårigheter med ämnet.

Mentorn tolkade Axels uttryck ”*det är svårt*” som att Axel inte fann uppgiften tillräckligt intressant eller utmanande. Av mina intervjuer och observationen framgår att mentorns tolkning är den mest troliga. Uttrycket signalerar även ett visst mått av lättja vilken blivit mer tydlig hos Axel med stigande ålder.

Ett annat framträdande mönster i Axels arbete är hans svårighet att koncentrera sig på en sak i taget och, framför allt, att koncentrera sig på sådant som han upplever som för enkelt eller ointressant. Situationen då Axels lärare uppfattat att Axels kunskaper och förståelse för decimaltal var ringa eller svaga tolkar jag, med hänvisning till diskussionerna och Axels svar ovan, som att Axel inte funnit uppgifterna eller aktiviteterna som erbjudits honom inom området decimaltal som utmanande eller intressanta att arbeta med. Lärarens roll som kontrollant av elevernas kunskap, en strävan efter att markera avklarade kapitel eller områden kan ibland strida mot möjligheten att utmana och förvänta sig mer av eleverna.

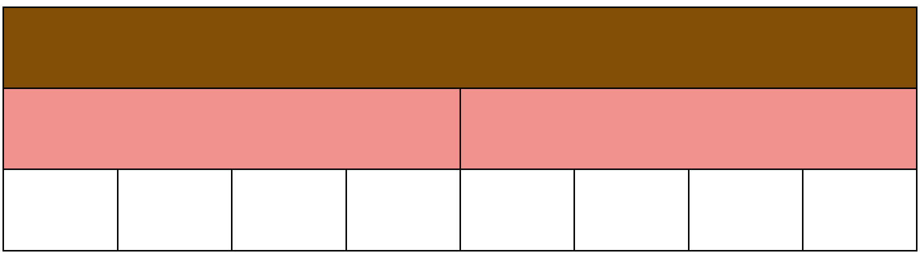
Ibland är det uppenbart att Axel har flera olika problem, uppgifter eller aktiviteter i tankarna samtidigt och att han då kan upplevas som frånvarande eller ointresserad. Min upplevelse och tolkning av de diskussioner och intervjuer som jag genomfört med Axel är att han sorterar bland och prioriterar vissa tankar. Han ger svar efter eget intresse och i enlighet med hur han vill framstå i situationen (jfr. Axels svar 850 + 150 i den tidigare redovisade klassrumsobservationen). När Axel väl koncentrerar sig för ett ögonblick är hans svar oftast övertygande och tydliga som i fallet med omvandling av bråket 3/2 till decimalform.

I första delen av min diskussion med Axel om bråk och decimaltal, med stöd av färgstavar, ser vi hur Axel rusar på och svarar snabbt utan att först tänka efter. Det är ett vanligt beteende hos Axel som kan bero på att det mesta i matematik hittills varit relativt enkelt för honom och att han är van att kunna svaren direkt och därmed van att leverera snabbt. Han är också en tävlingsmänniska och vill gärna prestera. Här finns en underliggande norm, vilken enkätstudien (Pettersson, 2008) bland lärare bekräftar, som anger att det är bra att svara fort och rätt (jfr. Björklund Boistrup, 2010). Ju snabbare man är desto duktigare är man. Detta märks i olika situationer, i våra enskilda träffar, då både Axel och Hampus varit med men även i klassrummet eller på rasten.

Ibland inser Axel sitt misstag och rättar sig själv och känner sig dum att han svarat fel. Men ibland tycks han tänka på något annat direkt efter det att han svarat och har då redan släppt min fråga. När jag påpekar att svaret inte stämmer ger han snabbt rätt svar. Vi ser också en skillnad mellan första övningen, då Axel är hungrig och därmed okoncentrerad, och andra övningen där han fått ny energi.

Matematiska diskussioner med Erica

Övningarna med Axel ovan genomfördes också med Erica, som vid tillfället gick i årskurs tre. De visar en mer eftertänksam elev som funderar innan hon svarar. Erica har inte tidigare sysslat med vare sig bråk eller decimaltal men kan med viss handledning utveckla sitt kunnande.



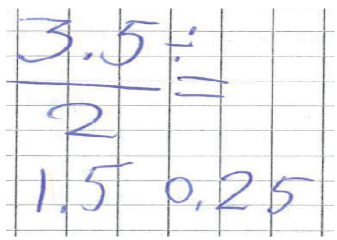
Eva	*Om den bruna är värd 8, hur mycket är de rosa värda då?*
Erica	*Fyra*
Eva	*Och de vita?*
Erica	*Ett.*
Eva	*Men om jag säger att den bruna är värd 10?*
Erica	*Då är den rosa värd 5 och den vita blir ju ojämn.*
Eva	*Ja, det blir det, men vet du vad det blir?*
Erica	*Nej*
Eva	*Tänk efter lite, ungefär vad är den värd?*
Erica	*Mellan 1 och 2.*
Eva	*Vilka tal finns mellan 1 och 2?*
Erica	*Det bli ju, om man tar hälften av 5 så blir det 2,5 och så hälften av det, det blir ett komma två komma fem.*
Eva	*Bra, man kan säga 1,25 men du var jätteduktig som listade ut det. Har du jobbat med decimaltal som sådana tal kallas tidigare.*

Erica *Nej.*

Eva *Jag tror att vi tar en uppgift till. Om den bruna är värd 14?*

Erica *Då är den rosa värd 7 och sedan blir det 3,5 på två och då kanske….*

Erica skriver på sitt papper:



Erica *Det blir 1,5 och sedan 0,25.*

Eva *Vad kan det bli om man lägger ihop 1,5 och 0,25, vad kan det bli?*

Erica *Jag tror att det kan vara 1,75.*

Eva *Bra, du lär dig fort.*

Eva *Nu lägger jag det såhär. Om den gröna är värd 3..*

Erica *Då är de vita 1, det var lätt.*

Eva *Men om den gröna är värd 1?*

Erica skrattar lite.

Erica *Då är det noll komma trettio någonting… det blir ju bara längre hela tiden*

Eva *Ja, det blir det, när tycker du att vi ska sluta?*

Erica *Nej, det går inte det blir treor hela tiden.*

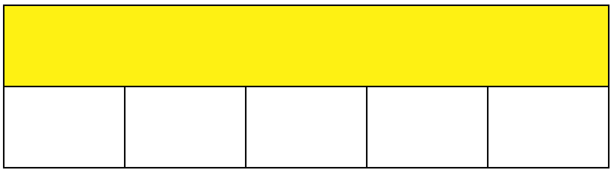
Eva *Det finns ett annat sätt att skriva hur mycket en sådan vit är värd. Det kallas för bråk, har du hört talas om det.*

Erica *Nej, det tror jag inte.*

Eva [Skriver 1/3]

Erica *Ja, det har jag nog sett.*

Eva *Nu lägger jag ut något annat.*



Eva *Om den gula är värd 1, hur mycket är de små värda då?*

Erica *0,2.*

Eva *Det gick snabbt. Du kan en hel del decimaltal även om du inte jobbat med det.*

Erica *Jag tänker den som 100 istället, då är det lättare.*

Matematiska diskussioner mellan Erica och hennes speciallärare

Vid en träff i början av årskurs fyra mellan Erica och hennes speciallärare är jag observatör. Nedanstående dialog är ett utdrag från denna träff. Läraren börjar med att gå igenom vilka sidor Erica ska arbeta med under den kommande veckan. Sidorna finns i en ny bok i serien Mattestegen och trots att Erica ligger en bra bit före sina klasskamrater är det mycket mekaniskt räknande hon ska ta sig igenom. Efter en stund kommer Erica till en uppgift som läraren gärna vill att Erica arbetar med under träffen. Hon kallar det en specialuppgift:

Uppgift:

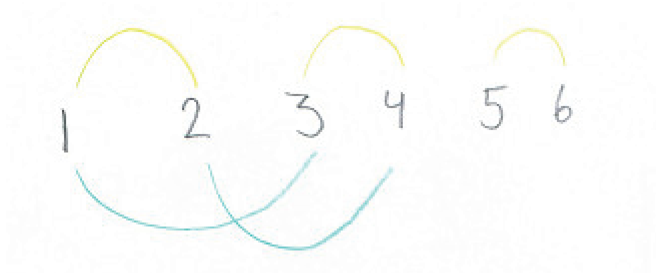
I en turnering i fotboll deltog sex lag. Varje lag spelade en match mot alla andra lag. De två bästa lagen möttes sedan i en final. Hur många matcher spelades under turneringen?

Läraren *Jag har tagit fram papper och färgpennor som du kan använda.*

Erica *Jag kan kalla dem 1 och 2 och så.*

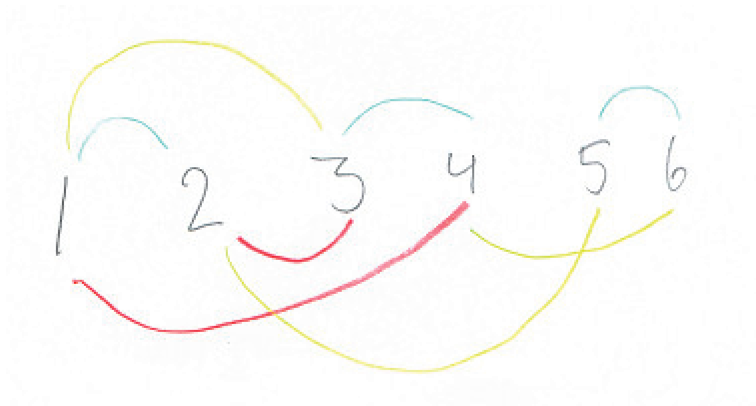
Läraren *Ja, det blir ju bra. Sedan kan du väl använda färgpennorna.*

Erica arbetar tyst och börjar dra linjer mellan sina siffror, 1 till 2 och 3 till 4 och 5 till 6 med grön, 1 till 3 och 2 till 4 med blå sedan stannar hon upp.



Erica *Nej, jag får nog börja om.*

Hon drar 1 till 2, 3 till 4 och 5 till 6 med blå, 1 till 3, 2 till 5 och 4 till 6 med grön och sedan 1 till 4 och 2 till 3 med röd men stannar sedan upp.



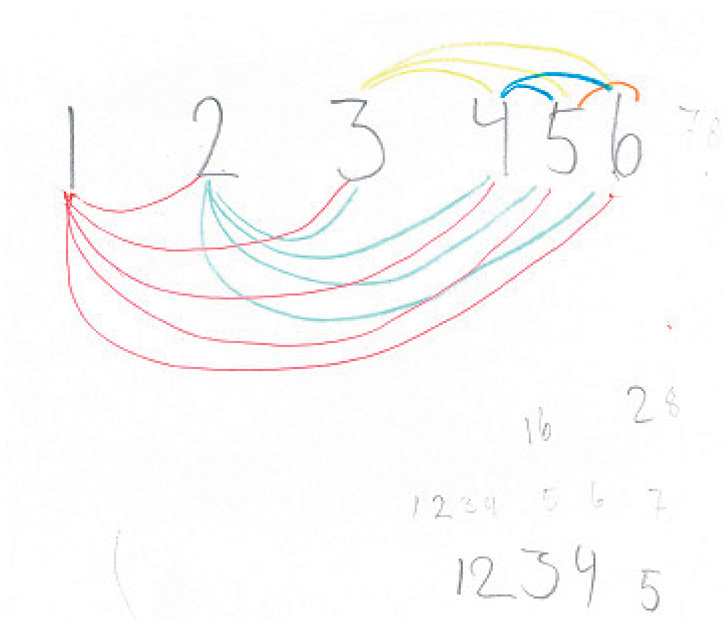
Läraren *Om du börjar med 1:an, vilka kan de möta?*

Erica *Alla de andra*

Läraren *Rita det med en färg*

Erica *ja, ja*

Erica ritar på och skriver sedan 5, 4, 3, 2, 1 nedanför.



Läraren *Hur många matcher blir det då?*

Erica *16*

Läraren *Ja, för det är en final.*

Erica *Ja*

Läraren börjar bläddra framåt i boken och jag kan inte låta bli att fråga Erica:

Eva *Får jag ställa en fråga?*

Läraren *Javisst.*

Eva *Om du istället hade 8 lag, hur många matcher hade det blivit då?*

Erica skriver en 7:a över 5:an.

Erica *Då blir det ju 2 mer här och här.*

Hon fortsätter att skriva tal över de andra och kompletterar sedan med 2 och 1 på slutet.

Erica *28*

Eva *Bra Erica, du såg systemet och så var det den sista matchen.*

Erica *Ja, just det 29*

Eva *Då kan du räkna ut matcherna även om det är 100 lag.*

Erica	*Ja*

Läraren är nu framme vid ett avsnitt med additionsuppställningar, liggande och stående. Erica visar att hon är helt säker på dessa operationer. Sedan följer fler mekaniska räkneoperationer och Erica börjar se uttråkad ut. Läraren säger då att de ska avsluta med ännu en specialuppgift som hon vill att Erica löser så hon inte ska känna sig osäker när hon ska arbeta själv.

Uppgift:

Sex personer kom till en fest. Alla hälsade på varandra genom att ta i hand en gång. Hur många handslag blev det sammanlagt?

Läraren vänder på pappret och ber Erica rita upp vad som händer. Erica skriver under fundering 1 till 6 men säger sedan:

Erica	*Men det måste väl bli samma som innan.*
Läraren	*Nja…*
Eva	*Vad blir det, Erica?*
Erica	*15*
Läraren	*Vad skilde då från förra uppgiften?*
Erica	*Sista matchen*
Läraren	*Bra*

Sociala och sociomatematiska normer samt matematiska förmågor som framträder i övningarna:

Uppgifter av kombinatorisk karaktär likt de ovan (handslag och matcher i turnering) är vanliga i läromedel för grundskolans senare del. Ofta finns de med som extra utmaningar eller kluringar. Det är sällan uppgifternas generella lösning diskuteras eller presenteras vare sig i läromedlet eller av läraren. I övningen ovan var också Ericas speciallärare nöjd när Erica kommit fram till rätt svar. Att det räcker med att komma fram till rätt svar, synes vara en vanligt förekommande social praxis i matematikundervisningen (Cobb & Yackel, 1996, s. 179-180). En sådan klassrumspraktik står i tydlig konflikt till att utveckla och befästa en sociomatematisk norm som innebär att elever bör förklara sina lösningsförslag samt argumentera för dem.

Problemen fanns i det extra läromedel som Erica skulle arbeta med under veckan och specialläraren var orolig att Erica skulle stöta på svårigheter i dessa extrauppgifter och ville därför att de gemensamt gick igenom dem. Från lärarens sida skedde detta troligen i ren omtanke; hon ville inte att Erica skulle känna sig osäker då hon senare i veckan skulle arbeta själv med uppgifterna. En social norm styr läraren: trots att Erica visat fallenhet och särskild förmåga för matematik och trots att läraren fått i extra uppdrag att stimulera och stödja Erica med utmanande uppgifter finns en rädsla hos läraren att uppgifterna ska bli för svåra och att Erica därmed ska känna obehag. Normen som styr många lärare och som tydligt märks vid observationer i klassrum är att lärarna vill att alla elever ska ha förstått ett problem och dess lösning innan de fortsätter. Nivån på problemen blir då ofta låg vilket inte utmanar elever med fallenhet.

Speciallärares huvudsakliga arbetsuppgifter är och har länge varit att stödja elever som har svårigheter i matematik. Från detta arbete tar de med sig normer, både sociala och sociomatematiska, vilka tydligt framträder i diskussionen mellan Erica och läraren. Läraren vill gärna att Erica ska arbeta med konkret material för att underlätta lösandet av uppgiften. Detta kan, som påpekats ovan, vara en vana från arbetet med elever som har svårigheter i matematik men det kan också vara läraren själv som ser lösningen lättare genom att använda konkret material, i detta fall färgpennor. Då Erica ska lösa uppgiften märks det att hon är mer koncentrerad på hur hon ska använda färgpennorna på rätt sätt än på själva uppgiften. I Ericas första två försök att lösa uppgiften letar hon efter möjliga matchkombinationer som kan ske parallellt och använder här olika färger för de olika matcherna. Detta är en möjlig väg att lösa problemet med antalet matcher. Istället för att fråga Erica hur hon tänker och stödja henne i denna lösningsprocess föreslår läraren en annan metod ”*Om du börjar med ettan, vilka kan de möta?*”. Denna lösningsmetod kan ses som en effektivare väg att nå svaret på uppgiften och även att nå en generell lösningsmetod på liknande problem. Erica svarar direkt ”*alla andra*” och ser samtidigt en ny lösningsmetod. Här visar Erica flexibilitet i sitt matematiska tänkande då hon direkt ser en ny lösningsväg. Läraren är fortfarande noga med att Erica ska använda sig av färgpennorna och Erica lyder som den ordentliga flicka hon är och visar lösningen både grafiskt med färger och skriver dessutom upp antalet nedanför. Då läraren avbröt Erica i hennes lösningsprocess var det för att ge Erica ett tips in på den ”rätta vägen”. Av vår diskussion efteråt förstod jag att läraren inte riktigt insett hur Erica arbetade med problemet utan ville hjälpa henne att hitta ”en effektiv” ingång till lösningen. När Erica har kommit fram till svaret på uppgiften, 16 matcher, är övningen slut och läraren tänker gå vidare. Vid ett senare tillfälle tar jag upp diskussionen om denna och liknande uppgifter med Erica. Hon visar då, precis som i inledningen av diskussionen ovan, en förståelse för den talföljd som uppstår vid lösningen av uppgiften. Erica visar att hon beräknar summan av en längre talföljd genom att para ihop talen två och två. Med viss handledning av mig beräknar hon sedan medelvärdet av talen och på detta sätt når vi den formella formeln för beräkning av summa av en aritmetisk talföljd. I episoden ovan syns också, i ett exempel prov på, hur Erica tillämpar matematiskt minne då hon kommer till exemplet med handslag. Hon känner igen strukturen på problemet och kan använda sig av strategin i den tidigare lösta uppgiften med antal matcher.

Sammanfattning och slutsatser av interventionen med Axel och Erica

Om vi jämför Axels och Ericas möjligheter till stimulerande och utmanande aktiviteter tillsammans med sina respektive stödpersoner ser vi skillnader i uppläggning och genomförande. Ovanstående episoder, Axel och mentorn och Erica och specialläraren, speglar det extra stöd eleverna har. Axel har möjlighet att ta upp frågor och funderingar och använder sig av denna möjlighet under den extra timme per vecka som mentorn är tillgänglig. Han utmanas med berikande aktiviteter och mentorn, gymnasielärare med matematisk kompetens, har möjlighet att förklara lösningar och samband och ställa uppföljande frågor. Ericas enskilda stöd av specialläraren, som hittills enbart arbetat med elever med svårigheter, utgör snarast en form av acceleration. Läraren går igenom stoffet som Erica ska arbeta med under veckan och tar, på eget initiativ, upp specialuppgifter som hon tror kan orsaka problem för Erica. Genomgången av specialuppgifterna kan tolkas som ett uttryck för att läraren vill ha bekräftelse på att Erica kan lösa uppgifterna nöjaktigt på egen hand snarare än uttryck för en vilja att lära henne mer och en önskan om att utmana hennes matematiska intresse.

Skillnader och likheter i skolans bemötande av Axel och Erica

I både Axels och Ericas fall har skolan generellt haft en positiv inställning till att stödja och stimulera eleverna i deras matematikutveckling. Till skillnad från flera av de övriga fallstudieeleverna har skolan, i Axels och Ericas fall, tagit ansvar och till viss del prioriterat resurser till de båda eleverna. Här finns dock skillnader i hur stödet utformats och genomförts vilket kan vara av avgörande betydelse för elevernas utveckling. Både Axels och Ericas föräldrar har varit aktiva i kontakten med skolan gällande sina barns behov av stimulans och deras påverkan kan tillsammans med elevernas medverkan i fallstudien också påverkat hur skolan hanterat situationen.

Axels och Ericas skolsituation innan fallstudien startade

Axels skola hade tidigt tagit föräldrarnas och lärarens signaler på allvar och erbjudit Axel att arbeta tillsammans med eleverna i årskurs två under matematiklektionerna. Även om inte erbjudandet resulterade i något som Axel och hans föräldrar upplevde som positivt hade skolan visat viss handlingskraft. Hos Erica uppstod problemen något senare. Det var först i årskurs två som föräldrarna märkte att matematiklektionerna inte erbjöd Erica den utmaning och stimulans som hon var i behov av. Matematikundervisningen bestod av enskilt arbete i läromedel där läraren försökte hålla eleverna inom samma område och därmed fanns begräsningar i hur långt eleverna fick arbeta. Även om Erica under årskurs två, efter föräldrarnas påtryckningar, erbjöds arbete i extraböcker, vilka till största delen bestod av fler uppgifter av samma slag som de hon tidigare arbetat med, upplevde hon skolan som tråkig och klagade ofta på huvudvärk.

Det var Axels lärare som kontaktade mig då hon kände sig osäker dels om hur hon skulle bemöta Axels frågor dels om hur skolan skulle agera i situationen. I Ericas fall var det föräldrarna som tog kontakt med mig då de upplevde att skolan inte tog deras oro över Ericas skolsituation på allvar.

Axels och Ericas skolsituation under fallstudiens gång

I Axels fall hade skolan, främst lärarna, själva insett problematiken och sökt hjälp. Här fanns en vilja att finna en acceptabel och långsiktig lösning för Axels behov av stimulans. Rektorn var också positiv och menade i en intervju att det för honom var lika självklart att satsa på elever i behov av särskilt stöd på grund av sina förmågor som elever i behov av särskilt stöd på grund av sina svårigheter. Det medförde att förslaget om en mentor mottogs positivt av alla parter. Hos Erica fanns inte samma insikt om att Erica var i behov av särskilt stöd för sina förmågor, detta trots föräldrarnas påtryckningar. Läraren var väl medveten om att Erica var målmedveten, arbetade snabbt framåt i läromedlet och troligen var i behov av mer stöd, men hon kände sig osäker över hur stödet kunde utformas. I både Axels och Ericas fall var dock lärarna och rektorerna positiva till att eleverna deltog i fallstudien.

Kort tid efter mitt första besök hos Erica och hennes lärare fick jag information om att läraren tillsammans med rektor tagit beslut om att Erica vid ett tillfälle per vecka skulle erbjudas stöd av en av skolans speciallärare. Avseende erbjudande om enskilt stöd till eleverna liknar Axels och Ericas situationer varandra. Båda eleverna erbjuds en timme per vecka tillsammans med en stödperson. I Axels fall utsågs en extern person vilket medförde en extra kostnad för skolan medan det i Ericas fall omfördelades resurser inom skolans ordinarie personal. Stödpersonernas utbildning, matematikkompetens och erfarenheter skiljde sig åt liksom hur det extra stödet utformades och genomfördes. I båda fallen var tanken att den extra timmen skulle ge eleverna berikning i form av diskussioner och problemlösning, aktiviteter som ordinarie lärare inte kunde erbjuda. I Axels fall genomfördes förändringen och samarbetet har, enligt föräldrar och lärare, fungerat väl under största delen av tiden. Det har dock inte funnits någon vikarie att tillgå då mentorn varit sjuk eller haft förhinder på annat sätt. Fram till och med årskurs tre har Axel kontinuerligt haft stöd bortsett från de tillfällen mentorn haft förhinder.

I Ericas fall bestod stödet från början mest av genomgång av kommande veckas arbete. Läraren gick igenom de övningar och uppgifter Erica skulle arbeta med och försäkrade sig om att hon uppfattat allt korrekt och inte kände sig osäker. Aktiviteten som erbjöds hade snarast karaktären av acceleration snarare än berikning men samarbetet mellan elev och lärare fungerade väl och Erica föreföll, enligt föräldrar och lärare, nöjd med lösningen. Skillnaderna i stimulans beror inte enbart på formen för aktiviteterna, berikning och acceleration, utan även på stödpersonernas matematiska kompetens och pedagogiska erfarenhet.

I årskurs fyra ändrades förutsättningarna för Erica då hon även erbjöds en timme problemlösning i veckan tillsammans med nio andra elever. Spetsgruppens aktiviteter upplevdes mycket positiva av Erica och hennes föräldrar och hon fick nu också den berikning som hon tidigare saknat. Erica fick i Spetsgruppen möjlighet att samarbeta med andra elever med intresse och fallenhet, något som Axel hittills inte haft möjlighet till frånsett de få gånger jag sammanfört Axel och Hampus.

Under vårterminen i årskurs fyra blev det återigen förändringar för Erica och hennes kamrater i Spetsgruppen. Specialläraren behövdes för andra arbetsuppgifter på skolan och en högstadielärare från en grannskola kallades in för att ta över både Spetsgruppens arbete och Ericas enskilda stöd, som i årskurs fyra bestod av 20 minuter per vecka. Till att börja med var situationen turbulent för Erica men ganska snart visade det sig att förändringen var positiv. Läraren började testa elevernas kunskaper och i Ericas fall framkom att hon arbetade med uppgifter och aktiviteter som inte motsvarade hennes kunskaper och förmågor vilket även gällde extrauppgifterna. Hon borde, enligt den nya läraren, hoppa över tre nivåer i den extra bok som hon fått för att få någon form av utmaning. Extramaterialet hade enligt honom bara innehållit fler uppgifter av det slag hon mött i den ordinarie läroboken och därmed vare sig stimulerat henne eller utvecklat hennes förmågor. I ett brev från Ericas mamma, där hon berättar om förändringarna ovan, berömmer hon också den nya lärarens arbete och skriver: ”*Han har sett henne, och undervisat henne*”.

Axels och Ericas skolsituation idag

När detta skrivs, och fallstudien inom ramen för avhandlingen går mot sitt slut, går Axel i årskurs fyra och Erica i årskurs fem. Axel har under årskurs fyra inte haft något extra stöd i form av tid med mentorn. Han arbetar tillsammans med klassen i ett läromedel som är avsett för årskurs sex. I en aktuell intervju med Axel säger han att han fortfarande tycker att matematik är roligt och intressant men att räkna i boken är ”*asatråkigt*” eller som han sedan tillägger ”*i alla fall alldeles för lätt*”. Något som både Axel och hans föräldrar ser som positivt är att kommunen genom ett Skolverksprojekt fått möjlighet att starta en kvällsaktivitet för elever med intresse och fallenhet för matematik. Inom projektet anordnas problemlösningskvällar, riktade till högstadieelever, där Axel har möjlighet att delta. Kvällarna avslutas med gemensam pizza för alla deltagare och ledare. Det är Axels tidigare mentor som i samarbete med regionens Spetsutbildning på gymnasienivå tagit initiativet till aktiviteten. Enligt lärarna i kvällsaktiviteten har Axel inga problem att följa aktiviteterna, varken matematiskt kunskapsmässiga eller sociala, trots att alla övriga deltagare är högstadieelever med fallenhet för matematik. Men lärarna berättar vidare att Axel ibland kan bli lite trött mot slutet av kvällens tretimmarspass och att det då alltid finns möjlighet att spela spel eller aktivera sig på annat sätt.

För Ericas del innebar den nya extraläraren en positiv förändring och Erica har sedan dess känt en helt annan motivation för skolarbetet i matematik. Det som istället varit negativt för Ericas del är hennes sociala situation som under höstterminen i årskurs fem varit tung med en hel del mobbning från flickorna i klassen. Det har påverkat Erica till den grad att hon tillsammans med föräldrarna beslöt att inför vårterminen byta skola, ett byte hon inte ångrar då hon efter fyra veckor, enligt mamma, är en helt ny flicka. Matematikundervisningen fungerar också utmärkt i den nya skolan, men mamma menar att Erica saknar sin extralärare och han saknar henne. Extraläraren tog direkt kontakt med Ericas nya lärare och beskrev Ericas matematikkunskaper och vilken nivå som var lämplig för Erica. Läraren i den nya skolan är positiv till att Erica arbetar med uppgifter i ett läromedel för årskurs åtta och läraren stöttar henne i arbetet som nu kan tolkas som acceleration.

Resultat och diskussion av fallstudierna

I kapitlet nedan sammanfattas resultaten från fallstudierna ovan. Övriga fallstudier, som endast kort redovisats ovan: av Hampus, David, Ellen, Sixten, Gustav, Erik och Tor, kompletterar tidigare redovisade resultat. Presentationen utgår från de tre forskningsfrågorna: Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor? Vilket bemötande får elever som visar intresse och fallenhet för matematik i skolan? Vad innebär detta bemötande för de studerade elevernas utveckling i matematik?

Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor?

Elevernas personlighet

Av de elva fallstudieeleverna utmärkte sig de flesta redan innan skolstart. Föräldrarna var oftast medvetna om att de hade ett barn som krävde extra utmaningar för att stilla sin kunskapstörst och stödinsatser för att utvecklas vidare. Trots detta skiljer sig elevernas personlighet och karaktärsdrag åt, vilket framgår både av föräldrarnas berättelser och av de intervjuer med och observationer av eleverna som genomförts i studien. Sara t.ex. utmärkte sig inte på något speciellt sätt, framförallt inte i matematik, förrän i årskurs sex i grundskolan, medan däremot Axel i likhet med Sixten mycket tidigt visade särskild fallenhet för ämnet. Sixtens mamma berättar:

> *”När han var runt tre år sa han, ”mamma jag ska skriva alfabetet baklänges och upp och ned”, så gjorde han det. Han relaterade till tyngdlöshet genom att beskriva det som "Karlsson på taket utan propeller". Han lärde sig principerna för multiplikation under en tandborstningssession. En annan gång frågade han mig hur lång tid det tog att åka till stugan. Tja 16 minuter svarade jag. Direkt svarade han då; jaha 960 sekunder. Kan det stämma, frågade jag? Mamma, 10 minuter 600 sekunder, 5 minuter 300 sekunder och en minut till.”*

Trots elevernas olikheter finns gemensamma egenskaper som framträder hos flertalet av fallstudieeleverna. De mest utmärkande är nyfikenhet, motivation och förmåga att arbeta koncentrerat under en längre tid samt en stark vilja att lära sig mer. Även om egenskaperna är tydliga hos fallstudieeleverna, finns skillnader i hur dessa uttrycks. Några elever visar sin nyfikenhet oavbrutet, högt och utan hänsyn till övriga elever medan andra är mer försynta och bidrar diskret med sina funderingar. Även förmågan att koncentrera sig visar sig på olika sätt, vissa elever blir så upptagna och fokuserade vid en pågående aktivitet att det är svårt att få kontakt med dem, medan andra tydligt visar att de kan arbeta med flera saker samtidigt.

Mötet med Sixten, åtta år, var på många sätt likt mötet med Axel. Sixten var mycket intresserad av min diktafon och ville veta allt om den. Han berättade om sitt stora intresse, rymden, och hur dragningskraften påverkar oss människor här på Jorden. Han hade, likt Axel, många frågor till mig och hade svårt att koncentrera sig på mina frågor. Frågan om Lisas och Kalles åldrar, som jag ställde till Axel vid vårt första möte, ställde jag även till Sixten. Då jag ställde frågan var han upptagen med att spela in information om sig själv och sin familj på diktafonen. Efter någon minuts avvaktan på ett svar gick jag vidare och sa att vi istället kunde titta på ett sifferpussel. Då sa Sixten "*sex och tolv, ja det kan vi göra*". Sex och tolv var svaret på frågan som jag ställt tidigare och som trots intresset för och aktiviteten med diktafonen hade funnits i Sixtens tankar. Detta visar, som i andra situationer, att han och flertalet av de övriga eleverna bara behöver en kort stunds koncentration för att ge svar på en ställd fråga.

Skillnader finns även i elevernas intresse för övriga ämnen. Axel som bedöms vara generellt begåvad visade tidigt intresse för flera olika områden och han är fortfarande bred i sitt intresse. Johan har, främst under gymnasietiden utvecklat intresse för flera områden. Flertalet av övriga elever har visat starkt intresse för och särskilda förmågor i matematik men bedöms vara normalbegåvade i övriga ämnen. Ingen av eleverna bedöms ha svagheter i något övrigt ämne.

Eleverna skiljer sig även åt vad gäller fritidsintressen. Vissa av eleverna har flera olika fritidsintressen, exempelvis idrott, teater eller musik, medan andra inte ägnar sig åt någon kollektiv fritidsaktivitet. Flertalet av eleverna säger sig ha goda vänner och kamrater som de umgås med på fritiden medan andra menar att de umgås med kamrater i skolan men inte på fritiden då de hellre är ensamma eller med familjen. I perioder har vissa av fallstudieeleverna och deras föräldrar berättat om problem som eleverna haft med sociala kontakter och att de fått utstå mobbning. Sammanfattningsvis kan vi dock konstatera att eleverna, likt andra elever i en åldersgrupp, varierar avsevärt vad gäller personliga karaktärsdrag.

Elevernas matematiska förmågor

Samtliga fallstudieelever visar i observationer, individuellt, i grupp eller i klassrumsaktiviteter, särskilda matematiska förmågor. Hos vissa av dem framträder matematiska förmågor mycket tidigt i livet. I Axels fall var det främst iver att behärska ett kunskapsområde och ett matematiskt sinnelag som framträdde då han outtröttligt ställer frågor som i exemplet där han vill lära sig den digitala klockan. Han synes strukturera informationen han får av sin mamma och generaliserar den, då han under ett antal timmar med hjälp av svaren lär sig ange klockslag generellt. Han visar också att han är förtrogen med de hela talen, deras betydelse samt omvandlingen mellan minuter och timmar.

När det gäller Ericas förklaring av additionen 7 + 5 är det ingen uppräkning hon använder sig av, vilket är vanligt för barn i hennes ålder. Hon visar istället förtrogenhet med talens värde och förmåga att operera med siffror. I slutfasen generaliserar hon operationen då hon utgår från ett tidigare löst problem för att få fram lösningen på nästa uppgift.

Vissa av eleverna i studien har egna metoder för att utföra svåra beräkningar, framförallt Johan, Axel och Sixten, medan andra använder algoritmer och beräknar på mer traditionellt sätt, som exempelvis Sara, Erica och David. Även förmågan att presentera lösningar och förklara dem skiftar bland eleverna. Sara är den elev som utmärker sig bland fallstudieeleverna både genom sina tydligt presenterade lösningar men också för förmågan att på ett kortfattat, effektivt och konkret sätt förklara hur hon kommit fram till lösningen. Även Erica visar förmåga att förklara hur hon tänker och visar också en tydlig vilja att försöka få andra, gruppmedlemmar eller kamrater i parövningar, att förstå hur hon menar. Andra elever, som Johan, Axel, Hampus och Ellen kan ibland tycka att förklaringar är onödiga då lösningen för dem framstår som självklar. Hos Johan och Sara som tillsammans med Tor är de något äldre eleverna i studien, är även förmåga till logiskt resonerande tillsammans med flexibilitet och reversibilitet i matematiska resonemang utmärkande. Hos både de yngre och äldre eleverna framträder tydligt förmågan att generalisera lösningsstrategier och beräkningsmetoder och framförallt att använda tidigare kunskaper i nya problemsituationer.

Alla fallstudieeleverna uttrycker, i olika omfattning och i olika grad, matematiska förmågor så som de definierats i studien. Men eleverna har, som vi sett ovan, olika sätt att uttrycka dessa förmågor och de har också styrkor och svagheter som gör att de löser problem på skilda sätt. Bland de yngre eleverna syns framförallt förmåga att operera med siffror, förmåga att urskilja problemets kärna d.v.s. att i en problemformulering på ett konstruktivt sätt identifiera och behandla relevant information och de visar alla tydlig motivation eller som Krutetskii uttrycker det *ett matematiskt sinnelag*.

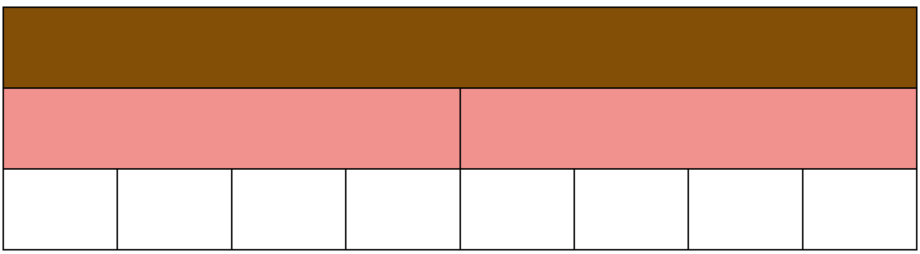
Slutsatsen av fallstudierna är att barnens matematiska förmågor i många fall kan upptäckas i tidig ålder genom barnens frågor och i diskussioner med dem, men utveckling sker i olika takt för olika individer: vissa elever visar tidigt intresse för ämnet medan det hos andra framträder först senare i livet. Då matematiska förmågor utvecklas i matematiska aktiviteter är det också i sådana aktiviteter som möjlighet finns att upptäcka elevens fallenhet för ämnet. Eftersom de personliga uttrycken för matematiska förmågor, likt personligheten, varierar elever emellan bör också aktiviteterna som erbjuds eleverna vara av varierande slag.

Vilket bemötande får elever som visar intresse och fallenhet för matematik i skolan?

Som vi sett ovan hade Erica och Axel, i likhet med övriga fallstudieelever och de flesta sexåringar i Sverige, förväntningar på skolstarten, förväntningar att få lära sig mer, något nytt och att få visa vad de redan kunde. Då dessa förväntningar resulterade i arbete och aktiviteter som eleverna behärskat sedan flera år tillbaka kom en motreaktion. De tröttnade, blev ledsna eller visade på annat sätt att de inte trivdes i skolan. Sixtens mamma berättar: ”*Sixten var tvungen att räkna sådant han räknade som 4-åring*” och menar vidare att förväntningarna då vändes i besvikelse. Erica har under olika perioder valt att dölja sitt intresse och sina förmågor, dels i läsning dels i matematik, för att undgå mobbning. Skolsituationen var emellanåt outhärdlig och resulterade i huvudvärk och trötthet. Axel visade tidigt sitt missnöje med skolan och krävde, genom ständiga frågor, lärarnas uppmärksamhet och mer stimulans. Samtliga elever har på olika sätt stött på problem i skolan och har då själva eller via föräldrarna sökt stöd för sitt behov av extra stimulans.

När elever på olika sätt uttrycker sina matematiska förmågor bemöts det på varierat sätt i undervisningen. Erica får positiva reaktioner då hon väljer att lösa ett problem på ett annorlunda sätt. Läraren bemöter elevernas lösningar med orden: ”*Det är detta jag tycker är lite roligt, att man kan lösa en uppgift på olika sätt och ändå komma fram till samma svar*”. Axels lärare anser istället att Axels lösningar och förklaringar är för svåra för övriga elever att förstå och väljer att ändra hans lösning för att underlätta för övriga elever. Sixtens mamma berättar om ett tillfälle då Sixten i årskurs ett lämnat in en matematikläxa: ”*Han fick höra att han gjorde fel när han under en matteläxa helt på eget bevåg räknade med negativa tal*”. Läxan bestod i att presentera en räknesaga med ”lilla plus”, vilket avser tal från ett till tio, något som Sixten sedan flera år tillbaka behärskade. Han utmanade därför sig själv genom att istället beskriva en räknesaga som resulterade i ett negativt resultat. Både presentation och lösning var korrekt men läraren ansåg inte att förslaget hörde hemma i årskurs ett. Sixten fick istället göra om räknesagan enligt de instruktioner läraren gett och hon menade vidare att negativa tal var något han fick vänta med ett antal år till. Samtliga beskrivningar exemplifierar vikten av lärarens agerande för elevernas välbefinnande och för deras möjligheter att uttrycka sina matematiska förmågor.

Övningen med Axel och Hampus, där de skulle fördela 21 kulor i sex skålar, visar hur viktig lärarens eller observatörens roll är i en matematisk diskussion med eleverna. Läraren eller observatören ställer följdfrågor som utmanar eleverna att gå vidare i sitt resonemang och utveckla sina matematiska förmågor. Ytterligare ett exempel som visar vikten av att lärare, trots egen osäkerhet, vågar anta de utmaningar som diskussionen med eleverna erbjuder i syfte att utmana dem och ge förutsättningar för deras utveckling, är en klassrumsaktivitet hos fallstudieeleven David i början av årskurs tre. Presentationen nedan beskriver elevernas första möte med Cuisenairestavar (färgstavar). Lektionen inleds med parövningar där eleverna får bekanta sig med materialet. Efter en studs aktiviteter i par samlas klassen i en ring på golvet. Läraren berättar att de nu ska ”*väva mattor*” av stavarna. Efter förklaring av begreppet väva mattor genomför de gemensamt, med tillhörande diskussioner, ett antal enklare övningar. Läraren lägger sedan ut en matta bestående av en brun stav, två rosa stavar och åtta vita stavar enligt bilden nedan.



Hon frågar vad den lilla vita är värd om den bruna är värd åtta? Många händer i luften och en elev svarar: ”*Ett såklart!*”. Läraren säger då: ”*Bra, men om den bruna är värd tio vad är den lilla vita värd då*?”. Det blir en stunds tystnad där även läraren ger mig lite oroliga blickar. Därefter säger David, fallstudieeleven: ”*Då är den* [pekar på den rosa] *värd fem och sedan är det fyra stycken på fem, då blir det ett komma två komma fem*”. ”*Bra, mycket bra!* [säger fröken och ser lättad ut] *Det kan man säga som ett komma tjugofem*”. En annan elev som hittills varit tyst säger nu med mycket energi i rösten: ”*Det var roligt och klurigt, kan vi inte bestämma ett annat tal?*”. ”*Jovisst bestäm du!*” säger läraren, ser lite orolig ut och söker ögonkontakt med mig varpå eleven säger: ”*Om den bruna är värd 14 vad är den vita värd då?*”. Liten stunds tystnad och en elev provar med två men undersöker och kommer fram till att det måste vara fel. En annan elev säger ”*Jag tror att jag vet, ett komma fem komma tjugofem*”. Läraren titta nu på mig och söker stöd varpå jag säger: ”*Bra, vad duktig du är, man kan säga detta på ett annat sätt precis som i förra uppgiften när David sa ett komma två komma fem. Vad blir detta om vi bara skall ha ett kommatecken?*”. David svarar: ”*Det blir ett komma sjuttiofem*”.

Efter lektionen, då läraren och jag får möjlighet att diskutera, berättar hon att hon blev osäker på om hon gjort det för svårt både för eleverna och för sig själv då hon blandade in decimaltal men att hon samtidigt tyckte att det var roligt att eleverna följde henne och ville fortsätta med fler uppgifter och sa: ”*Friskt vågat, hälften vunnet*” var hennes slutkommentar.

Lärarens agerade i exemplet visar tillsammans med övrig empiri i studien att lärarens matematiska kompetens är viktig för att utmana och stimulera elever, framförallt elever med särskilda förmågor i matematik. Lika viktig är lärarens vilja och mod att gå utanför givna ramar för att locka fram elevernas intresse.

Flertalet av fallstudieelevernas undervisning i matematik består till största delen av enskilt arbete i läromedel. Det gör det svårt för lärare och observatörer att upptäcka och utveckla elevernas matematiska förmågor. Viss del enskilt arbete är nödvändigt för att eleverna ska få möjlighet att träna sig i matematiska metoder, algoritmer och beräkningar. Resultatet av fallstudierna visar dock att ett varierat utbud av undervisningsmetoder, där eleverna utmanas till matematiska diskussioner genom undersökande aktiviteter, problemlösning och laborativa övningar varvat med enskilt arbete i läromedel, ger störst möjlighet för eleverna att uttrycka och utveckla matematiska förmågor. Fallstudierna visar också att lärares och observatörers medverkan i matematiska diskussioner är viktig och deras agerade avgörande för hur långt eleverna utmanas att gå i sina matematiska resonemang och tankar.

Skolans bemötande av elevernas extra behov av stimulans skiljer sig åt i de olika fallen. I hälften av fallen har skolan agerat på ett positivt sätt och bemött elevernas, föräldrarnas och i vissa fall lärarens krav på extra resurser eller extra stöd för elevens matematiska utveckling. Stödet har erbjudits i form av en mentor som eleven får möjlighet att träffa en gång i veckan eller i form av att läraren själv arbetar med eleven eller en grupp elever som har intresse och fallenhet för matematik t.ex. en gång i veckan. Men stöd kan även innebära att eleven får arbeta med annat läromedel eller extra problem under ordinarie lektionstid. Stödet skiljer sig alltså åt både vad gäller utformning och innehåll och varierar i form av accelererande och berikande övningar. De accelererande stödinsatserna överväger, om vi till dessa räknar fortsatt arbete framåt i läromedel där handledning ges av lärare eller mentor, framför de berikande stödinsatser där lärare eller mentor diskuterar problem som inte är direkt knutna till läromedlet eller till det innehåll som normalt ingår i ordinarie matematikkurs. Stödet skiftar dock under studiens gång mellan olika lärare och skolor och en blandning av accelererande och berikande stöd är vanlig i vissa miljöer.

I runt hälften av fallen har mycket litet eller inget stöd givits för elevens behov av stimulans. I vissa fall har extra stöd satts in i samband med studiens genomförande för att senare avbrytas av skolledningen med hänvisning till rådande ekonomisk situation.

Johans och Saras val av gymnasieutbildning gav olika möjligheter för deras fortsatta matematiska utveckling. Saras profilskola hade, med sin specialinriktning, större möjligheter att erbjuda berikningskurser än ett vanligt gymnasieprogram, och att ge eleverna möjlighet att läsa i snabbare takt samt att ge dem extra stöd i form av utökad tid med lärare och handledare vilka också har erfarenhet av arbete med elever med särskilda matematiska förmågor. Skillnaderna framgår tydligt av de två fallstudierna där även skillnader i undervisningsmetoder och lärarens agerade för elevernas utveckling beskrivits. Även dessa studier visar vikten av undersökande aktiviteter och lärarens betydelse för elevernas möjligheter att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor.

Slutsatsen av fallstudierna är att bemötandet av elever med särskilda matematiska förmågor varierar med lärarnas matematiska kompetens och deras kunskaper om och tidigare erfarenheter av elever med särbegåvning, samt med skolans resurser och ledningens prioriteringar. I flera av fallen tycks de ekonomiska övervägandena ha prioritet över elevernas kunskapsutveckling och välbefinnande.

Vad innebär detta bemötande för de studerade elevernas utveckling i matematik?

Som vi sett ovan är lärarens och skolans bemötande av elever med särskilda matematiska förmågor avgörande för deras utveckling i ämnet men även för deras personliga utveckling. I Johans och Saras fall skedde en stor förändring i elevernas syn på sig själva och sin matematikkompetens i och med deras deltagande i studien. Eleverna hade, innan studien inleddes, inte fått något nämnvärt stöd eller extra stimulans av skolan. Inte heller under studiens gång gavs uttalat stöd från skolan till eleverna då skolledningen menade att det var upp till läraren att stödja dem inom ramen för den ordinarie undervisningen. Genom fallstudien uppmärksammades eleverna och de fick möjlighet att i intervjuer och enskilda observationer arbeta med berikningsproblem och genom aktiviteterna uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor. Uppmärksamheten och det relativt begränsade stöd som studiens genomförande innebar för eleverna gjorde, enligt dem själva, föräldrar och lärare, en väsentlig skillnad för deras insikt om sin egen kompetens, möjligheter att uttrycka sina matematiska förmågor och i Johans fall en nystart för hans intresse. Fallen visar att det i vissa situationer endast krävs en liten insats för att stimulera elevernas intresse och främja deras utveckling.

I andra exempel, som i Sixtens och Davids fall, har stöd givits i form av en mentor eller extra tid med klassläraren för att sedan dras in av ekonomiska eller personella skäl. I båda fallen har eleverna uttryckt sin glädje över att få arbeta extra med matematik, få möjlighet att ställa frågor och utmanas av en person som har tid och intresse för dem. Glädjen hos eleverna av att bli sedda och uppmärksammade har de gemensamt med flertalet av övriga fallstudieelever som på olika sätt fått stöd i skolan eller i studien. Föräldrarna uttrycker också hur viktigt detta extra stöd har varit för elevernas harmoniska utveckling och trivsel i skolan. Sixten och David har båda reagerat negativt då stödet plötsligt uteblivit och har då uttryckt sin besvikelse över skolans agerande. Föräldrarna har i båda fallen tagit hand om situationen och antingen själva agerat mentorer eller anlitat privata mentorer. I båda fallen har föräldrarna varit drivande och också haft kompetens att stödja sina barn. I inledningen av studien med Axel kan vi också se ett resultat av elevens besvikelse och misstro mot skolans och vuxnas agerande. Axels frågor till mig kan ses som en kontroll av min matematiska kompetens vilken han behövde för att känna tillit till ytterligare en inblandad person. När han förvissat sig om att jag uppfyllde hans kriterier ville han också försäkra sig om att han fick behålla kontakten med mig och gjorde detta skriftligt.

Bara i två av de fallstudier som genomförts har eleverna gjort en tidigare skolstart och i inget av fallen har elever flyttat en eller fler årskurser uppåt. I flera övriga fall har detta varit uppe till diskussion men i de flesta fall har elever och föräldrar avråtts från att göra dessa förändringar. I ett av de två fall där elever börjat skolan tidigare, David, avråddes han också att fortsätta den påbörjade skolgången och resultatet blev att han gick om förskoleklass tillsammans med jämnåriga och började därmed årskurs ett i traditionell ålder. I fallstudien med tvillingarna Gustav och Erik har föräldrarna valt att låta pojkarna gå i brittisk skola vilket medfört att de börjat skolan tidigare än vad som är normalt för svenska elever. I de flesta fall där tidigare skolstart varit uppe till diskussion har elever och föräldrar avråtts på grund av sociala skäl, skäl som att eleven inte kan knyta skorna, inte kan umgås med andra barn på ett normalt sätt, har svårt att sköta sin hygien m.m. Även om alla är överens om att barnet skulle klara ett undervisningsstoff riktat till äldre barn är det dessa skäl, att barnet inte är tillräckligt moget känslomässigt eller socialt, som får föräldrarna att avvakta med skolstart eller tidigare övergång till högre stadier. Nästan aldrig tas hänsyn till de negativa konsekvenserna av att barnet går kvar i klassen med jämnåriga d.v.s. elevens intellektuella utvecklingsbehov bagatelliseras.

Slutsatsen av fallstudierna är att lärarens, skolans och omgivningens bemötande har stor betydelse för elevernas fortsatta utveckling av sitt matematiska intresse och sina matematiska förmågor. Lärares agerande i matematiska aktiviteter är helt avgörande för elevens förståelse av vad som är en korrekt lösning av ett matematiskt problem, acceptabel förklaring eller en annorlunda eller elegant lösning till problemet. Likaså är lärarens stöd och instruktioner viktiga för elevens fortsatta agerade i matematiska aktiviteter och viktiga för elevens självkänsla. Skolans prioritering av verksamheten och agerande i enskilda fall är även dessa i vissa fall helt avgörande för elevens möjligheter att utvecklas efter sina förutsättningar.

Resultat från enkätstudier

Inom ramen för denna avhandling har två större enkätstudier genomförts, en riktad till grundskolelärare i tre kommuner i södra Sverige, en riktad till matematikutvecklare i totalt 229 av landets kommuner. Den första enkätstudien, riktad till grundskolelärare, genomfördes hösten 2005 och våren 2006 i Karlskrona, Sölvesborg och Växjö. I samtliga tre städer genomfördes undersökningen i samband med föreläsningar om elever med fallenhet för matematik. Syftet med enkätstudien var att få en inblick i hur matematikundervisningen bedrivs och hur lärare resonerar om situationen för elever med fallenhet för ämnet. Totalt deltog 180 lärare i enkätstudien vilket utgjorde i genomsnitt 80 % av de deltagande lärarna vid föreläsningarna. Resultaten har tidigare presenterats i en licentiatavhandling (Pettersson, 2008) och valda delar, med intresse för denna studie, återges sammanfattningsvis nedan.

Enkätstudien riktad till matematikutvecklare genomfördes hösten 2008 i samband med matematikutvecklarnas regionala konferenser på fem orter i Sverige. Sammanlagt deltog 340 matematikutvecklare från totalt 248 kommuner i konferenserna (Tengstrand, 2010) och av dessa svarade 284 matematikutvecklare från totalt 229 kommuner på enkäten. Syftet med studien var att få en bild av det stöd och den organisation som formellt och generellt finns i Sverige när det gäller att bemöta elever med särskilda förmågor i matematik. Resultaten av enkäten presenteras och analyseras i sin helhet nedan.

Resultat och analyser av de båda enkätstudierna återkommer jag även till i slutdiskussionen.

Hur ser undervisningen i matematik ut och hur tas elever med matematisk fallenhet om hand?

Vi har ovan sett hur matematikundervisningen i de olika fallstudieelevernas klasser bedrivs. För de flesta av eleverna bestod den ordinarie undervisningen uteslutande av hastighetsindividualisering med hjälp av läromedel. Nedan följer en något bredare bild av hur undervisningen bedrivs och hur lärare anser att de bemöter elever med särskilda förmågor i matematik. Den ska inte ses som en heltäckande bild av undervisningssituationen i Sverige eller av hur lärare bemöter elever med fallenhet, men den kan tillsammans med tidigare presenterade generella studier av matematikundervisningen samt ovan presenterade fallstudier ge en bred bild av situationen för elever med särskilda matematiska förmågor.

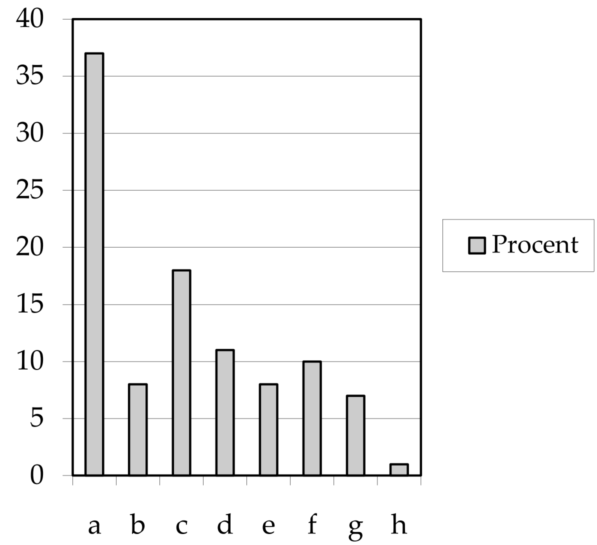
Undervisningsmodellens betydelse för elever med fallenhet för matematik

Lärarna som har svarat på enkäten beskriver sin undervisning som dominerad av tyst räkning i böcker. Gemensamma genomgångar och diskussioner upptar en mindre del av tiden. Detsamma gäller laborativ matematik, i grupp eller enskilt, vilket är något man sysslar med under de tidigare årskurserna men även där i liten utsträckning. Redovisningen nedan anger lärarnas genomsnittliga svar angivet i procent av total lektionstid.

Årskurs F - 9

Vilken undervisningsmodell passar bäst in på dig och din klass?

a) Tyst matematik med hjälp av läroböcker
b) Tyst matematik på annat sätt
c) Genomgång med alla elever
d) Elever sitter i grupper och arbetar med uppgifter i läroboken
e) Grupparbete med speciella gemensamma uppgifter
f) Laborativ matematik i grupp
g) Laborativ matematik enskilt
h) Övrigt



Totalt har 177 lärare svarat på frågan.

Tabell 4. Resultat av enkätstudie – undervisningsmodell

Lärarna försöker hjälpa eleverna där de befinner sig genom individuell handledning, och de känner sig oftast otillräckliga. Det är läromedlet som styr undervisningen och som har till uppgift att stimulera alla elever oavsett nivå, resultat som styrks av andra undersökningar och forskningsresultat (Bentley, 2003; Bjerneby-Häll, 2006; Johansson, 2006; Skolinspektionen, 2009; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001a).

Som tidigare presenterats i forskningsöversikten är det främst **en** undervisningsmodell som dominerar svensk matematikundervisning, detta trots att läroplanen föreskriver att skolan skall främja elevens harmoniska utveckling med hjälp av ett varierat och balanserat innehåll och arbetssätt (Skolverket, 2006). Modellen visar sig även gälla i denna studie, men av de intervjuer och skriftliga svar som lärarna lämnat på frågan om de skulle vilja ändra något i sin matematikundervisning framkom att det fanns en stor vilja till förändring från lärarnas sida.

> *"Jag vill i fortsättningen hålla ihop klassen i matteboken för att kunna hålla samlingar som är relevanta för alla."*

> *"Framförallt släppa taget om matteboken och införa mer grupp och parmatte. Överhuvudtaget mer laborativ och tänkande matte."*

> *"Jag vill lära mig mer om laborationer och hur man visualiserar olika moment för att tydliggöra undervisningen."*

> *"Vill faktiskt ha mer helklassundervisning oavsett var eleverna är i böckerna. T.ex. en vecka per månad där jag koncentrerar mig på något visst moment."*

Men det framkommer även att en förändring inte alltid är så lätt.

> *"Tyvärr är eleverna "inkörda på matteboken" och har svårt att släppa taget för andra uppgifter."*

Frågan är vem det är som gjort dem "*inkörda på matteboken*"? Av lärarnas kommentarer ovan ser vi att det finns ambitioner att vilja förändra undervisningen men många känner inte att det finns utrymme för förändring.

> *"Det är så mycket annat man ska hinna med: gemensamma konferenser, individuella utvecklingsplaner för eleverna, samtal med föräldrar. Det är så mycket annat än just undervisningen."*

Vissa lärare menar att skolledningen inte uppmuntrar lärarna att arbeta tillsammans med ämnesutveckling och att det har blivit en etablerad kultur att lärare planerar sin undervisning självständigt, framförallt i matematik. Detta styrks av studier inom området (Bjerneby-Häll, 2006; Emanuelsson, 2001, s. 83; Skolverket, 2005a, s. 60; Wallby, Carlsson & Nyström, 2001b, s. 104) samtidigt som man i olika studier och rapporter lyfter fram vikten av att lärare får möjlighet till mentorskap, samarbete med kollegor och praktik för att utveckla sin lärarskicklighet (Glenn, 2000; Hattie, 2009: NCTM, 2000; Robertsson, 2009; Wistedt & Sundström, 2011). På vissa skolor finns temaarbete under perioder. Då ansvarar flera ämnen gemensamt för undervisningen. Tyvärr är matematikämnet sällan involverat i dessa temaperioder.

Undervisningsmodellen är viktig för alla elever och minst lika viktig för elever med fallenhet och förmåga. Nedan skall vi se att myten "Duktiga elever klarar sig själva" tyvärr lever i svenska klassrum, inte för att lärare tycker att det skall vara så, eller för att forskningen tyder på att det skulle vara rätt, utan för att resurserna i skolan inte räcker till för alla elever.

Hur upptäcker lärare elever med fallenhet för matematik?

Närmare 90 % av lärarna i studien svarade att de i sin klass har eller har i tidigare klasser haft elever som visar förmågor i matematik. Vad är det då som gör att lärarna identifierar dessa elever? En vanlig uppfattning är att dessa elever utgör en speciell grupp med liknande egenskaper. Som nämnts finns en omfattande forskning som motsäger den uppfattningen och som även bedömer att elever med fallenhet för matematik är fler än många lärare föreställer sig.

> Elever med fallenhet för matematik är ingen exklusiv grupp, de är inte ens att betrakta som en grupp (Mönks, Heller & Passow, 2000). De är precis lika olika sinsemellan som andra. Vissa är brett begåvande, andra har fallenhet för något speciellt område. De har olika bakgrund och olika intressen och de är sannolikt fler än vi idag föreställer oss. (Wistedt, 2007)

Lärarnas svårigheter att diagnostisera matematisk förmåga framgår av deras svar på frågan om hur de upptäcker dessa elever. Svaren är fokuserade på elever som är snabba, aktiva, nyfikna och självständiga, elever som ligger långt fram i boken och har bra resultat på prov och diagnoser.

> Det är brist på kunskap om variationen i uttryck för matematisk förmåga som gör att vi lätt uppfattar dessa elever som en särskild grupp, begränsad till antal och homogen i sin karaktär. (Wistedt, 2007)

Här nedan följer några av lärarnas kommentarer:

Årskurs F – 3

> *”De räknar i böckerna som ”räknemaskiner”. De är snabbast i alla problemlösningsuppgifter. De blir automatiskt gruppledare i alla mattegrupper. De älskar att räkna och ser en glädje att komma på lösningar. Oftast kan de inte rita eller redovisa hur de har tänkt ”jag bara vet det” är oftast svaret.”*

> *”Snabba, både i huvudet och med pennan. Ser annorlunda lösningar och kan förklara hur de tänker.”*

Årskurs 4 – 6

> *”Eleven arbetar självständigt och går framåt snabbt.”*

> *”De klarar alla moment inom matematik, både muntligt och skriftligt, oftast gör de det snabbt. En del har varit duktiga på att visa och hjälpa andra.”*

Årskurs 7 – 9

> *”Lyckas bra på prov. Snabbt klara med uppgifter och visar att de förstår det de gör. Aktiva vid genomgångar, pigga på att ”diskutera matte”, vetgiriga.”*
>
> *”Hur de uttrycker sig muntligt. Hur snabbt de löser olika problem som är nya för dem. De säger att det är lätt.”*

Detta beskriver den bild av förmåga i matematik som de flesta lärare i studien har. Men som vi sett i Krutetskiis (1976), Sheffields (2003) och Bargers (1998) beskrivningar av matematisk förmåga är inte snabbhet en förmåga som lyfts fram. Snabbhet kan vara fruktbar men är inte nödvändig vid matematiskt arbete.

I kommentarerna finner vi följande motstridiga citat ”*Ser annorlunda lösningar och kan förklara hur de tänker*” och ”*Oftast kan de inte rita eller redovisa hur de har tänkt ”jag bara vet det” är oftast svaret*”. Dessa kommentarer stärker bilden av att elever med särskilda förmågor i matematik är olika och att de också visar sina förmågor på olika sätt. Kommentarer som ”*Aktiva vid genomgångar, pigga på att ”diskutera matte”, vetgiriga*” samt ”*Hur de uttrycker sig muntligt*” är även dessa värda att analysera. Om vi ser tillbaka, dels på fallstudierna, dels på de svar som lärarna givit i enkätstudien på frågan om undervisningsupplägg, ser vi att de allra flesta elever aldrig får möjligheten att ”*diskutera matematik*” och därigenom visa sina förmågor i ämnet.

Om muntlig kommunikation är ett sätt för lärare att upptäcka elever med förmåga och fallenhet för matematik har vi inte de bästa förutsättningarna med den undervisning som dominerar i svenska skolor. Kommentaren ”*De klarar alla moment inom matematik, både muntligt och skriftligt, oftast gör de det snabbt*” tar dels upp aspekten att eleverna klarar allt och har generella förmågor inom matematik dels att de gör allt snabbt. Detta är två av de vanligaste kommentarerna från lärare på frågan hur de upptäcker, och därmed ser på, elever med fallenhet och förmåga i matematik: de behärskar allt, har inga brister och är snabba.

Några svar innehåller annan information, däribland beskrivningar av eleverna som uttråkade och understimulerade. Dessa elever är svårare att upptäcka och skilja från dem som har matematiksvårigheter. Bland nedanstående kommentarer lyfts även fram förmågor som logiskt tänkande och fallenhet för problemlösning.

Årskurs F – 3

”I en förskoleklass diskuterar man gemensamt för att delge varandra och väcka varandras förmågor. Här märker man tidigt fallenhet för logiskt tänkande. Oftast är det kopplat till ett gott självförtroende, en tro på sig själv, att våga, inte vara rädd för något rätt eller fel. Att alla svar är rätt. Här är pedagogernas roll och sätt jätteviktigt.”

”De tänker matte hela tiden, oberoende av vad vi pratar om, ställer ofta följdfrågor.”

”Hittar på egna ma-problem i vardagen.”

Årskurs 4 – 6

”Att de visar sig ”pojke” i gruppen. Inget han försökte dölja. Han var mycket förstående att han hade en förmåga.”

”De är vakna och kräver mer uppgifter. Dock finns det de som är snabba men inte har förståelse. Det är lätt att skilja agnarna från vetet. De enbart snabba klarar inte problemlösning.”

”De löser uppgifter väldigt snabbt men verkar allmänt uttråkade av matematik. Vid genomgångar på nytt moment kan de redan. Tyvärr är det sällan de själva säger att det är för lätt och ber om svårare utmaningar.”

Årskurs 7 – 9

”Ibland upplever eleverna det som tråkigt för det är för lätt.”

”Tråkigt i boken – kan allt! Duktiga muntligt och klarar av att lösa svårare abstrakta problem. Där jag arbetade tidigare (annan kommun) hade eleven möjlighet att ta gymnasiekurser i 9:an.”

I den första kommentaren ovan finns formuleringen ”*Oftast är det kopplat till ett gott självförtroende, en tro på sig själv, att våga, inte vara rädd för något rätt eller fel*” vilket lyfter fram lärarens viktiga roll. För att läraren skall se elevernas förmågor behöver de få visa dessa i en aktivitet. Det gäller för läraren att få eleverna att känna sig trygga och harmoniska och därmed våga visa sina förmågor. Kommentaren ”*Att de visar sig ”pojke” i gruppen. Inget han försökte dölja. Han var mycket förstående att han hade en förmåga*” visar på samma form av självförtroende men innehåller även en genusaspekt. Lärarna har en mycket viktig roll i det att arbeta med elevernas självförtroende och att se möjligheter i lärandet istället för svårigheter hos eleverna. Trots detta krävs medvetenhet om att det kan finnas elever med särskilda förmågor i matematik som av någon anledning inte vågar visa dessa tillsammans med andra elever eller av någon anledning inte vill visa sina förmågor. Generella attityder till ämnet kan också påverka elevernas vilja att visa sina förmågor. Det är inte alltid förknippat med något positivt att vara duktig i matematik. Det finns en risk att eleven genom att visa sina särskilda förmågor upplevs som en ”tönt” eller ”nörd” av klasskamraterna (Leyden, 2002; Sheffield, 2005).

De två kommentarerna ”*De tänker matte hela tiden, oberoende av vad vi pratar om, ställer ofta följdfrågor*” och ”*Hittar på egna ma-problem i vardagen*” visar på ett matematiskt sinnelag. Detta är en av de aspekter som Krutetskii tar upp som en viktig del i strukturen av matematisk förmåga.

Vi har slutligen de två kommentarerna ”*De är vakna och kräver mer uppgifter*” och ”*Tyvärr är det sällan de själva säger att det är för lätt och ber om svårare utmaningar*” som än en gång visar på en motstridighet i hur dessa elever upplevs och uttrycker sig och därmed på svårigheten att placera dem i en homogen grupp. Här handlar det även om hur läraren skall bemöta elever med särskilda förmågor i matematik vilket för oss över till nästa fråga.

Hur bemöter lärare elever med fallenhet och förmåga i matematik?

När det gäller hur lärare bemöter de elever som har fallenhet för och förmågor i matematik så är svaren från lärarna i enkätundersökningen ganska samstämmiga. Antingen får eleverna fortsätta framåt i boken (svarsalternativ a) alternativt flytta upp och arbeta med en årskurs över (svarsalternativ d) eller så får de räkna fler svårare uppgifter inom samma område (svarsalternativ c). De två första alternativen kan ses som en acceleration och det tredje kan i bästa fall innebära en form av berikning. Dessa möjligheter utgör tillsammans närmare 80 % av svaren och de är jämnt fördelade mellan det vi tolkar som acceleration kontra någon form av berikning.

Årskurs F - 9

Vad gör du för att stimulera dessa elever?

a) De får fortsätta att räkna framåt och jag hjälper dem så mycket jag hinner.

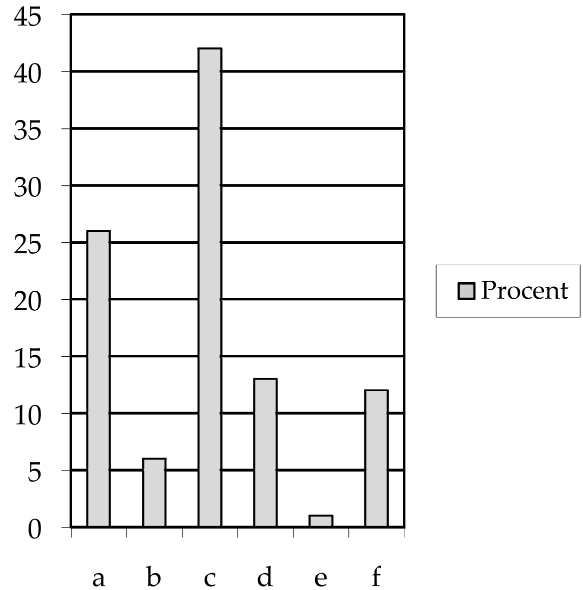
b) De får arbeta med fler liknande uppgifter inom samma område.

c) De får arbeta med fler svårare uppgifter inom samma område.

d) De får gå upp och arbeta tillsammans med årskursen över för att få fler utmaningar.

e) Vi har en speciallärare som tar hand om dessa elever och ger dem stimulans.

f) Övrigt



Totalt har 149 lärare svarat på frågan. Lärarna har fått ange valfritt antal alternativ.

Tabell 5. Resultat av enkätstudie – stöd och stimulans till elever

I intervjuer med lärarna beskriver de hur otillräckliga de känner sig. De berättar vidare att stimulering av elever med särskilda förmågor i matematik inte är ett område som prioriteras av skolledningen utan prioriteringar görs av målet att få alla elever godkända. Har man som lärare tid över får man gärna följa eller stimulera elever med fallenhet för matematik.

I en studie (Wistedt, 2008) som lärare och lärarstuderande genomfört i samband med en kurs i stöd och utveckling av matematisk förmåga inom projektet ”Pedagogik för elever med fallenhet och förmåga för matematik” vid dåvarande Växjö universitet (idag Linnéuniversitetet) intervjuades skolledare, totalt 75 rektorer i landet, om sin syn på elever med fallenhet för matematik och hur skolan bemöter dessa elever.

> Drygt hälften (44) sade sig veta att det finns elever med fallenhet för matematik i skolans klasser, men någon handlingsplan eller specialresurs för dessa fanns inte. (*ibid*)

Intervjuarnas kommentarer till samtalen med rektorerna visar också att många blev överraskade över frågeställningen:

> *”Det är ju litet ovant för rektorerna att hantera elever som har särskild fallenhet för ett ämne istället för svårigheter att nå betyget godkänt.”*
>
> Flera av de intervjuade uppfattade också frågan som känslig och politiskt inkorrekt: *”Från politiskt håll har rektorn inte fått några påtryckningar om att satsa på de begåvade eleverna. Pengarna används till att se till att så många som möjligt når upp till godkänt.”*
>
> Men rektorerna var ändå överlag positiva till satsningen på elever med fallenhet för matematik, här i två typiska exempel: *”Rektor ser dock detta som en viktig fråga som kommit i skymundan i Sverige”* och *”Rektorn tyckte det var intressant att prata om dessa elever. Det pratas alldeles för litet om dem eftersom vi först måste se till att alla når målen.”* (*ibid*)

Frågan är alltså om det i skolan finns resurser att möta alla elever på deras nivå och att utveckla hela deras förmåga så som det står i läroplanen:

- Undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. (Skolverket, 2006, s. 4)
- Läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga. (*ibid*, s. 12)

När man beslutade om en gemensam bottenskola, vilket tidigare beskrivits, fanns rädslan att de begåvade eleverna skulle möta för lite motstånd och på så sätt riskera att utveckla ”tröghet, lättja och skolleda” (Axelsson, 2007). Är detta vad som hänt i vår svenska grundskola: för lite stimulans och för stort fokus på att alla skall nå godkänt?

På frågan om det finns någon speciallärare på skolan som har till uppgift att stimulera och stödja elever med särskilda förmågor i matematik så är svaret näst intill enhälligt. Endast en tillfrågad lärare svarade att det vid något tillfälle på skolan funnits denna möjlighet. I diskussioner med lärarna efteråt säger flera att de skulle önska att denna resurs fanns, men det känns i nuläget som ett ouppnåeligt mål.

Vilka handlingsplaner och resurser har Sverige för att bemöta och ta hand om elever med fallenhet för matematik?

För att få en bild av vad som görs nationellt för elever som visar fallenhet för matematik och vilket stöd som finns, för lärare, rektorer och föräldrar, i form av formella handlingsplaner när det gäller bemötande och stöd och stimulans till elever med fallenhet för matematik har en enkätstudie riktad till landets matematikutvecklare genomförts. Resultat från studien redovisas och analyseras nedan.

Enkätstudiens genomförande

Vid regionala konferenser med matematikutvecklare hösten 2008 hölls en föreläsning om ”Elever med särskilda förmågor och fallenhet i matematik”. I anslutning till denna föreläsning delades en enkät med två frågor ut till matematikutvecklarna (se bilaga 4). De ombads, förutom att svara på frågorna, att skriva vilken skola och/eller kommun de representerade samt vilken nivå (grundskola F-6, grundskola 7-9 samt gymnasieskola). Frågorna löd:

Fråga 1:

Finns det, som du känner till, någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

Fråga 2:

Finns det, som du känner till, någon speciell person/speciella resurser för att ta hand om elever som visar särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

Tabellen nedan visar antalet matematikutvecklare som deltog i respektive regional konferens samt hur många kommuner som var representerade, antal matematikutvecklare som svarade på enkäten och antalet kommuner som de representerade. Stockholms stad, Göteborg och Malmö är indelade i mindre områden som i detta fall likställs med kommuner (NCM, 2011; Tengstrand, 2010).

Region (totalt antal kommuner i regionen)	Totalt antal deltagare vid konferenser hösten 2008	Antal kommuner representerade hösten 2008	Deltagare som svarade på enkäten	Antal kommuner som svarade på enkäten
Göteborg	89	63	72	60
Karlstad (54)	61	44	54	43
Stockholm (60)	51	42	39	37
Sundsvall (54)	41	30	37	29
Växjö (93)	98	69	82	60
Sverige (325)	340	248	284	229

Tabell 6. Matematikutvecklarkonferenser 2008

Den genomsnittliga svarsfrekvensen bland matematikutvecklarna på konferenserna var 84 % medan svarsfrekvensen när det gäller representerade kommuner var 92 %. Detta tolkar jag som att deltagare från samma kommun i vissa fall svarat gemensamt i ett dokument. Detta stöds även av deltagarnas svar på frågan om vilket åldersintervall de arbetar som lärare, då de ibland anger både F-6 och 7-9. Bland de svarande finns även skolledare och speciallärare, vilka i en del fall även skrivit ut sin roll. Det goda deltagarantalet, vad gäller både antal matematikutvecklare som deltog i studien och antal kommuner som de representerade, gör att resultatet är intressant och relativt tillförlitligt.

Fråga 1

På första frågan ”Finns det, som du känner till, någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?” svarade totalt 18 av de 284 tillfrågade matematikutvecklarna *Ja*. Övervägande delen av dessa svar kom från matematikutvecklare i årskurs 7-9. Inget av svaren kom från gymnasielärare.

Enligt enkäten skulle det alltså i 18 kommuner (ca 7 % av deltagande kommuner) eller områden inom en storkommun (fyra av svaren kom från samma storkommun), finnas handlingsplaner till stöd för elever med särskilda förmågor i matematik.

Ett år efter enkätstudiens genomförande gjordes en uppföljning via e-post (se bilaga 5) till de matematikutvecklare som svarat Ja på frågan om handlingsplan. Av de 18 matematikutvecklare som fick uppföljningsbrev och i vissa fall påminnelsebrev inkom slutligen 15 svar. Bland dessa fanns inget som innehöll en skriftlig handlingsplan. Svaren varierade "*Just nu finns det ingen handlingsplan eller annat material i min kommun*" och "*Jag var kanske lite väl optimistisk när jag svarade att vi hade en handlingsplan från skolans sida. Vid närmare efterforskning är det ett privat initiativ som har tagits av en matematiklärare och hennes man som är mycket matematikintresserad*". Andra beskriver möjligheter för elever att läsa A-kursen på gymnasiet "*Vi har ingen skriftlig handlingsplan men om vi har elever som är duktiga/intresserade av matematik kan de redan i nian, läsa matte A*". I svaren angavs även fördjupningsgrupper, nivågrupper och profilklasser som en del av skolans eller kommunens arbete

> *"Tyvärr har vi inte någon handlingsplan som finns skriftigt. Anledningen att jag svarade så är att vi på vår skola har profilklasser där de får utmaningar och individualisering. Vi har profilklasser i ma/no samt ma/idrott. Detta är på högstadiet år 7-9."*

> *"Matematikintresserade (och naturligtvis många begåvade) elever söker eller uppmuntras söka/delta i 1 h extra matematikundervisning/vecka. Där undervisar vi enbart via problemlösning enligt en "modellen" från boken rika matematiska problem. Eleverna går i olika klasser men på inriktningslektionerna får eleverna möjlighet att träffa likasinnade."*

Endast ett svar innehöll en skriftlig formulering som enligt uppgiftslämnaren ingick i skolans lokala plan under punkten samverkan: "*Förutsättningar ska skapas för att elever i grundskolan ska ges möjlighet att läsa gymnasieskolans matte A och B. Rektor ansvarar*". Samtliga ovanstående svar är av samma karaktär som de svar matematikutvecklarna lämnade på den andra frågan som redovisas nedan.

I samband med de uppföljande frågorna till matematikutvecklarna framkom att ett projekt, finansierat av Skolverket inom ramen för den s.k. "Matematiksatsningen 2008-2010", pågick i en kommun som inte deltog i enkätstudien. I projektets visionsformulering sägs att skolan ska vara: "*En skola för alla, som är utmanande och stimulerande även för elever med fallenhet för matematik*" och målet för projektet är att "*få elever att söka till naturvetenskapliga och tekniska utbildningar (eller spetsutbildningen i matematik),* *skapa en matematiktävling för varje stadium; F-3, 4-6 och 7-9 samt att kommunen heltidsanställer en matematiksamordnare*". Vidare fanns fler mål formulerade som deltagarna ansåg var viktiga att arbeta vidare med: "*Fördjupning i hur man arbetar med dessa elever i andra länder, fortsatt fördjupning i hur vi stimulerar dessa elever, konkretisera forskning och teori kring dessa elever, förfina metoder i hur vi identifierar dessa elever samt arbeta med en levande handlingsplan*". En tid senare kom även ett förslag till handlingsplan för elever med fallenhet för matematik i årskurs F-9 (se bilaga 6). Om detta förslag är beslutat i kommunen är okänt.

Fråga 2

På den andra frågan "Finns det, som du känner till, någon speciell person/speciella resurser för att ta hand om elever som visar särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?" svarade 64 av de 284 tillfrågade matematikutvecklarna JA. Dessa 64 matematikutvecklare var fördelade över 54 olika kommuner och majoriteten av dem tillhörde grundskolans årskurs 7-9. De hade alla, i olika omfattning, angett på vilket sätt de bemöter elever som visar särskilda förmågor i matematik och vilka personer eller speciella resurser som fanns att tillgå.

Nästan två tredjedelar av de 64 positiva svaren från matematikutvecklarna handlar om olika former av möjligheter för högstadieelever att läsa gymnasiekurser. Detta kan ske inom klassens ram med den ordinarie läraren, i form av extra stöd från en gymnasielärare på orten eller genom att eleverna väljer att läsa dessa kurser i sitt individuella val i årskurs nio. Nedan följer några utsagor som är representativa för gruppen av svar:

> *"Elever i år 6-9 har möjlighet att läsa A-kursen på gymnasiet. Kontaktlärare för varje rektorsområde finns bland mattelärarna på gymnasiet."*
>
> *"Vi har och har haft elever som deltar på lektioner med gymnasieklasser. Det finns ingen handlingsplan men jag som matematikutvecklare har träffat gymnasielärarna och pratat om detta."*
>
> *"Elever i år 8 har möjlighet att läsa in matematik t.o.m. kurs A eller B på gymnasienivå. Detta är ett samarbete mellan gymnasiet och högstadiet och eleverna arbetar med detta förutom på ordinarie lektioner, även 2 timmar varje torsdag eftermiddag på gymnasiet."*
>
> *"Vi erbjuder 100 min Elevens val Matematik i år 9 där eleverna kan läsa A-kursen och kan tenta av A-kursen på våren i nian."*

Ytterligare tre svar handlar om elevers möjligheter att arbeta med gymnasiekurser men här avser svaren övergripande aktiviteter, gemensamma för många skolor i kommunen, där elever i grundskolans senare år, under organiserade former, har möjlighet att tillsammans delta i undervisning och andra aktiviteter vid gymnasieskolan.

> *"En gymnasielärare tar hand om de elever det gäller från hela kommunen. De börjar med att läsa gymnasiekurser i grundskolan och hamnar sedan i samma klass på gymnasiet."*

Av de återstående 24 svaren är det fem som beskriver profilklasser med inriktning mot matematik eller att deras skolor har nivågruppering eller matematikgrupper i olika former.

> *"Vi har profilklasser i matematik, no och idrott i samarbete med gymnasiet och möjligheter att flytta elever till undervisning i högre årskurser vid behov av större utmaning."*

> *"F-5 Anonym1skolan har en "Mattepatrull" för dessa elever. Anonym2skolan har matteprofil (år 6-9)."*

I sju svar framhåller uppgiftslämnaren att deras skola arbetar med att stödja elever som har särskilda förmågor men att detta görs i den ordinarie verksamheten, via klassläraren i dennes tjänst eller via skolans speciallärare då dessa har tid över.

> *"Vi har mattelärare som gör det i tjänsten."*

> *"Några lärare deltar i Kängurutävlingen och vågar utmana elevernas tänkande i vardagsarbetet. Jag känner till att en lärare i år 7-9 deltar i högstadietävlingen Pythagoras Quest."*

> *"Speciallärare som jobbar enskilt med de här eleverna. Matematikutvecklare som ger olika förslag till olika uppgifter. Några mattelärare som verkligen vill inspirera sina elever."*

Fyra matematikutvecklare menar att det är de själva som står för extra stöd och stimulans till elever med fallenhet och av tre svar framkommer att det finns mentorer av olika slag som arbetar några timmar i veckan eller några timmar per termin med att utmana elever med intresse för matematik. Dessa mentorer kan vara pensionerade lärare eller verksamma gymnasielärare.

> *"Det finns möjlighet för elever med särskild fallenhet att möta en mentor som kommer till de skolor där barnen går."*

> *"Alla elever har möjlighet att söka vår matematikinriktning. Där träffas eleverna 1 gång/vecka i en problembaserad undervisning. Det är jag personligen som driver detta på vår skola."*

Två svar beskriver samarbete mellan gymnasiekolan och högskolan där gymnasieelever har möjlighet att läsa högskolekurser eller att i mötesform få extra stöd via högskolans personal. Ett svar beskriver att elever med fallenhet testas för att avgöra om en individuell lösning är befogad: ”*Först får eleverna göra ett nationellt prov (gammalt) och utifrån resultatet diskuteras åtgärder mellan lärarna och eleven. Exempel på lösningar: Räkna gymnasiets bok, regelbundna matematiska samtal, gör nationella kursprov på gymnasieskolan eller fördjupningsgrupp.*” Slutligen visar två svar att det finns lärare som arbetar ideellt med att stimulera dessa elever ”*Lärare (bland annat min fru) jobbar extra (utöver ordinarie lektionstid) med sådana elever. Ingen extra ekonomi för detta.*”

Vissa svar, där matematikutvecklaren svarat nej på frågan, innehåller frågor om vad de som matematikutvecklare eller som lärare kan göra för att stödja och stimulera dessa elever. I svaren synes en viss uppgivenhet då vissa menar att de ekonomiska resurserna inte finns för att göra något extra överhuvudtaget.

> *”Jag har nu 2 mycket duktiga elever i år 7 som räknat år 9:s bok i år 6 (med annan lärare). Jag har förstått att de inte kan hålla samma fart som övriga i gruppen. Använder Matte direkt. De 2 får göra diagnosen först, räkna rött kapitel och sen gå över till boken de hade i 6:an, mattestegen och räkna det avsnitt som handlar om det vi håller på med. Vet dock inte hur jag ska göra i fortsättningen. Vill gärna ha hjälp.”*
>
> *”Vi har funderat på att starta en matteklubb, en fritidsaktivitet för barn som behöver extra stimulans i matematik. En elev från gymnasiet + en högskolelärare har visat intresse för att leda gruppen. Tror du att det skulle vara genomförbart? Skulle eleverna våga/vilja komma till oss.”*
>
> *”Kontakta matematikutvecklare Anonym som ibland får jobba mycket i motvind.”*

Sammanfattande resultat och analys

Enligt svaren från matematikutvecklarna i enkätstudien och de uppföljande breven med frågor fanns inte vid någon kommun en formell handlingsplan för elever med särskilda förmågor i matematik. Studien, som är gjord hösten 2008 är emellertid inte heltäckande då vissa kommuner inte fanns representerade och då viss utveckling kan ha skett sedan studien avslutades. Projektet som nämns ovan, där lärargruppen helt nyligen formulerat en handlingsplan för kommunen, är ett sådant exempel. Trots detta kan vi säga att formella handlingsplaner är sällsynta i Sverige om de ens finns. I många andra länder som Australien, Korea, Storbritannien, Tyskland, USA m.fl. finns sedan länge särskilda läroplaner, handlingsplaner eller beskrivningar av undervisning för begåvade elever (för en översikt se Heller, Mönks, Sternberg & Subotnik, 2000; NACE, 2010). I dessa länder är det också vanligt att det finns statligt stöd för de insatser i form av mentorskap, speciella undervisningsgrupper och extra utmaningar som krävs för att elever med fallenhet för akademiska ämnen, som t.ex. matematik, ska ha möjlighet att utvecklas.

Vi ser att det, enligt matematikutvecklarna, förekommer någon form av stimulerande aktiviteter och stödjande processer i ca en femtedel av de deltagande kommunerna. Dock är det endast i ett fåtal fall av dessa som kommunen har en gemensam satsning som rör flera skolor och i dessa fall är det uteslutande elever från de senare åren av grundskolan som har möjlighet att läsa gymnasiekurser eller delta i aktiviteter anordnade av gymnasieskolan. Enligt svaren finns inga övergripande aktiviteter för yngre elever i kommunerna. Totalt finns elva svar där det anges aktiviteter för yngre elever. I dessa fall är det, enligt svaren, oftast matematikutvecklaren själv eller en speciallärare som ansvarar för att stödja och stimulera yngre elever med fallenhet.

> *”Jag själv arbetar som mattepedagog på skolan och koncentrerar mig i första hand på de elever som har svårt att nå målen i matematik. Några tillfällen/vecka arbetar jag dock med elever som behöver särskilda utmaningar. Vid ett tillfälle/vecka arbetar jag med en elev som jag bedömer har särskild förmåga i matematik.”*

I några få exempel anges att skolan erbjuder särskild undervisning eller olika former av nivågruppering.

> *”5:orna på Anonymskolan får välja en särskild undervisningsgrupp där de får större utmaningar och fördjupning inom det område de arbetar med i klassen.”*

> *”Matematikundervisningen är nivåanpassad.”*

Om vi, generaliserar resultaten ovan (utan hänsyn tagen till att studien inte är heltäckande) betyder det att ca 5 % av Sveriges kommuner ger någon form av stöd till yngre elever med fallenhet för matematik. Detta stöd kan innebära att skolan, som ovan, har särskild matematikundervisning för elever som har intresse och fallenhet för matematik (jfr. fallstudieeleven Erica) eller annan form av nivågruppering. Stödet kan också innebära att en speciallärare eller mentor ägnar någon timme per vecka åt en elev som är i behov av extra utmaningar (jfr. fallstudieeleverna Axel och Erica).

Analys av svaren har även skett utifrån aspekterna acceleration och berikning. Definitionen av acceleration och berikning, som beskrivits ovan, har använts för att tolka matematikutvecklarnas svar. Arbetet har varit komplext då svaren i vissa fall innehållit varierande information, i vissa fall knapphändig. Samtliga svar har placerats i grupperna acceleration (A), acceleration och berikning (A + B), berikning (B) och övriga (Ö). Fördelningen ses i tabell 5 nedan och exempel på svar som respresenterar de olika grupperna följer därefter.

Grupper	(A)	A + B	B	Ö
Antal	28	16	7	13

Tabell 7. Accelererande och berikande stöd – svar från matematikutvecklare.

Exempel på svar, som representerar grupp (A), där de extra resurser eller stöd som anges förväntas ge övervägande accelererande effekter.

> *"Vi har och har haft elever som deltar på lektioner med gymnasieklasser. Det finns ingen handlingsplan men jag som matematikutvecklare har träffat gymnasielärarna och pratat om detta. Vi har också en elev i år 5 på vårt ro som jobbar med uppgifter långt över "sin" nivå. Där stöttar jag läraren med uppgifter och synpunkter."*

> *"Vi har haft elever som i slutet av grundskolan arbetat med A-kursen och tenterats av gymnasielärare. Ingen handledning av eleverna har skett från gymnasiet utan det har blivit en hel del ensamarbete."*

Exempel på svar, som representerar grupp (A + B), där de extra resurser eller stöd som anges förväntas ge både accelererande och berikande effekter.

> *"Jag själv har arbetat med detta i 5-6 år. Årskurs 9 läser MaB ev. Ma B/C. Arbetar mycket med praktiska och teoretiska problem. Deltar i alla möjliga tävlingar. Startade en kommun tävling."*

> *"Under elevens val i 9:an finns begränsade möjligheter för duktiga elever att få extra stimulans."*

Exempel på svar, som representerar grupp (B), där de extra resurser eller stöd som anges förväntas ge övervägande berikande effekter.

> *"Några lärare deltar i Kängurutävlingen och vågar utmana elevernas tänkande i vardagsarbetet. Jag känner till att en lärare i år 7-9 deltar i högstadietävlingen Pythagoras Quest."*

> *"5:orna på Anonymskolan får välja en särskild undervisningsgrupp där de får större utmaningar och fördjupning inom det område de arbetar med i klassen."*

Exempel på svar, som representerar grupp (Ö), där de extra resurser eller stöd som anges inte kunnat hänföras till accelererande eller berikande effekter.

> *"En lärare har tid att jobba som mentor i sin tjänst."*

> *"Vi har mattelärare som gör det i tjänsten."*

Resultatet visar att extra stöd som erbjuds elever med särskilda förmågor i matematik förekommer sparsamt, till största delen utformat som accelerationsaktiviteter främst till elever i senare åren i grundskolan. Stödet innebär, enligt många av svaren, endast en förmedling av kontakter mellan elev och gymnasielärare eller tillhandhållande av nya läromedel för en högre årskurs. I få av fallen innebär det extra undervisning eller handledning. Detta styrker slutsatserna från den tidigare enkätstudien där resultatet visade att lärare i stor utsträckning ser elevers snabbhet och deras förmåga till självständigt arbete som tecken på matematisk förmåga.

En utveckling som har skett och som är synbar i de två enkätstudierna rör speciallärares och mentorers medverkan i att stödja och stimulera elever med fallenhet för matematik. I den första studien, genomförd vid årsskiftet 2005/2006, svarade en lärare av 180 att det, på deras skola, fanns en speciallärare som arbetade med elever med matematiska förmågor. I enkätstudien till matematikutvecklare, genomförd hösten 2008, svarade tio av 284 att det på deras skola eller i kommunen fanns speciallärare, mentorer eller matematikutvecklaren själv som i sin tjänst hade möjlighet att stödja och stimulera elever med fallenhet för matematik. Vi kan alltså se en viss ökning i användande av speciella personer och roller/tjänster för att arbeta med dessa elever.

I några av de svar där matematikutvecklaren svarat nej på frågan om stöd och resurser till elever med matematiska förmågor framgick att diskussioner har inletts om vad skolan eller kommunen bör göra för dessa elever och här frågar matematikutvecklarna även efter råd. Det visar på en förståelse för att dessa elever inte klarar sig själva och även på en vilja att engagera sig för dessa elevers situation i skolan.

Diskussion

Kapitlet ger en sammanfattning och diskussion av studien som helhet. Först diskuteras metoden med fokus på elevgruppens sammansättning samt val av analysmetoder. Därefter diskuteras resultaten utgående från studiens syfte och de tre forskningsfrågorna. Avslutningsvis vill jag visa på några implikationer för fortsatt forskning om och utveckling av studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor.

Metoddiskussion

Studiens övergripande syfte var att beskriva och belysa studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor. Det är en begränsad studie som har ambitionen att ge en djup men inte heltäckande bild av studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor. Av den teoretiska bakgrunden framgår att det krävs matematiska aktiviteter för att upptäcka och utveckla matematiska förmågor samt att elevernas sociala miljö och omgivningens stöd har betydelse för utveckling av specifika förmågor. Jag behövde därmed följa ett antal elever detaljerat under en längre tid. Fallstudien blev naturligt mitt val av metodisk ansats, en metod som lämpar sig när det som ska studeras är ett komplext fenomen. Metoden innebär emellertid att materialet blir begränsat och för att validera dessa resultat har två större enkätstudier genomförts.

Urvalet har, som nämnts, inte varit av statistisk eller slumpmässig art. Johan och Sara upptäcktes av mig i aktiviteter arrangerade av mig. Övriga elever har kommit till min kännedom genom engagerade lärare eller föräldrar. Naturligtvis finns ett stort antal elever som inte kommit med i studien: elever som inte har engagerande lärare eller föräldrar, elever som har engagerade lärare eller föräldrar men som inte kommit till min kännedom och slutligen elever som har engagerade lärare och föräldrar som kommit till min kännedom men som på grund av studiens begränsningar inte kommit med. Inte heller elever som är nöjda med sin skolsituation och inte är i behov av förändrat stöd eller stimulans har varit aktuella för studien.

Fördelningen av individer som upptäckts av mig som observatör (2), upptäcks och anmälts via lärare (4) och upptäckts och anmälts via föräldrar (4) är ett resultat av studiens utveckling efter pilotprojektet, fallstudier med Johan och Sara och publiceringen av licentiatavhandlingen och den uppmärksamhet den rönte. Troligen finns betydligt fler elever som inte har engagerade föräldrar och lärare och som just därför har särskilt stort behov av stöd och stimulans men som inte blivit aktuella för studien. Fler interventioner med elever i helklass, likt pilotprojektet, hade varit intressanta att genomföra och möjligen resulterat i ytterligare elever som upptäckts via observatör. Tyvärr har inte fler sådana studier varit möjliga då tid och resurser istället lagts på de elever som kommit till min kännedom genom lärare och föräldrar.

Som tidigare nämnts var inte studiens omfattning, vad gäller antal medverkande elever, planerat på förhand. Eleverna som följts i fallstudier har, via föräldrar eller lärare, erbjudit sin medverkan. Betydligt fler anmälde intresse. Vi har alltså inte behövt leta efter fler elever med intresse och fallenhet för matematik eller elever i behov av stöd och stimulans för sina förmågor. Däremot har ett urval behövt göras, där det främsta kriteriet har varit elevens matematiska förmågor, vilka utretts i samtal med föräldrar och lärare samt i observationer av eleven i klassrumsmiljö eller då denne löser matematiska problem. Urvalet har rest svåra frågor, inte minst etiska. Att se hur elever med vilja och energi och med stort intresse och fallenhet för matematik inte ges möjlighet att uttrycka sina förmågor i undervisningen eller sitt engagemang för ämnet är svårt. Att möta föräldrar som gett upp hoppet om skolans stöd och istället vänder sig till privata vänner och bekanta för att få hjälp, eller att träffa lärare som brinner för sitt yrke och som önskar ge alla elever individuellt stöd men som av olika anledningar inte har möjlighet till detta är också svårt. Begränsningar av studien empiri borde kanske skett i större omfattning då detta arbete tagit mycket tid och kraft. Bristen på tidig och strategiskt genomtänkt begränsning av antal elever och omfattning av empiri har dock resulterat i ett rikt material där möjlighet finns till ytterligare studier och analyser av elevernas matematiska förmågor och av det bemötande från skola, lärare och samhälle som ges dessa elever i deras vardag.

I studien har vi sett att de deltagande skolorna, då de informerats om den pågående studien, i ett flertal fall varit positiva i sitt bemötande av elevens extra behov av stöd och stimulans. Rektorer och lärare har skapat resurser för eleverna i större utsträckning än vad enkätstudierna visar, både vad gäller organisatoriska åtgärder och pedagogiska. Men vi ser också hur dessa resurser i vissa fall senare dras in, vilket kan vara ett tecken på att skola och personal är intresserade och villiga att förändra men när stöd från skolledning, kommun eller stat uteblir, återfaller man i gamla rutiner.

Fallstudierna med Johan och Sara under deras senare del av grundskolan, fokuserar matematiska förmågor, hur de upptäcks och uttrycks i olika matematiska aktiviteter. Krutetskiis struktur för matematisk förmåga har här använts för att analysera elevernas lösningar av de givan problemen samt av de matematiska förmågor som kommer till uttryck i dessa lösningar. I fallstudierna av Johan och Sara under deras gymnasietid samt i fallstudierna av övriga, yngre elever, används Krutetskiis ramverk i analyser av elevernas matematiska uttryck med fokus på utvecklingen av matematiska förmågor och elevernas möjligheter att uttrycka dessa i klassrumsundervisning där olika sociala och sociomatematiska normer etableras. Krutetskiis struktur och definition av matematisk förmåga har varit ett stödjande och nödvändigt verktyg för att analysera elevernas lösningsförslag och inlägg i matematiska diskussioner klassrummet. Teorierna är, i Krutetskiis presentation och exempel, konkreta och strukturerade. Trots detta har det ibland varit svårt att tolka elevers matematiska uttryck som uttryck för matematisk förmåga. Detta beror främst på att matematisk förmåga är ett komplext fenomen – en struktur av olika förmågor som kan kompensera varandra inom vida gränser. Denna komplexitet i uttryck för förmåga har varit tydlig i studien.

Att de normer som reglerar aktiviteter av olika slag, i klassrum, grupprum eller i enskilda samtal mellan lärare/observatör och elev, har stor betydelse för utveckling av matematiska förmågor har framgått under studiens gång. En modell för hur sådan normbildning kan studeras (Cobbs & Yackel 1996) har prövats i min studie i syfte att tydliggöra hur interaktionen mellan den sociala och sociomatematiska normbildningen stöder eller hämmar elevernas utveckling av matematiska förmågor. Studien som presenterats här visar att samspelet, ibland konflikten, mellan social och sociomatematisk normbildning påverkar elevernas möjligheter att uttrycka och utveckla matematiska förmågor, ett resultat som kan ha stor praktisk relevans. En större medvetenhet hos lärare om de normer som reglerar undervisningen, sociala såväl som sociomatematiska, och hur dessa normer förhåller sig till lärarens egna föreställningar om hur matematik bäst lärs och om lärarens roll och betydelse för elevernas matematiska förkovran, skulle komma alla elever tillgodo, inte bara de elever som har utpräglad fallenhet för matematikämnet.

Sammanfattning och diskussion av studiens resultat

Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor?

Elevernas personlighet och matematiska förmågor

Resultatet av studien visar att elevernas personlighet varierar liksom sätten att uttrycka matematiska förmågor. Svaren från den första enkätstudien visar samtidigt att lärarna inte alltid ser denna variation av uttryck då de oftast svarar att elever med särskilda matematiska förmågor utmärker sig genom att arbeta snabbt, tänka snabbt och hinna mer än andra. De är oftast aktiva och självständiga på lektionerna och skriver bra på proven. Mönks m.fl. (2000) menar att eleverna är olika i sin personlighet och att det inte går att se begåvade elever som en homogen grupp. Jag vill påstå att detta i högsta grad gäller för eleverna i denna studie och att de är långt mer olika både till personlighet och i sätt att uttrycka matematiska förmågor än vad både jag föreställt mig och vad svaren i den första enkätstudien visar. Resultaten av fallstudierna visar dock, precis som tidigare forskning, att det finns gemensamma drag hos eleverna och deras omgivning. Nyfikenheten är den egenskap som är mest framträdande, vilket framgår både av föräldrarnas berättelser om sina barn och i mina intervjuer och observationer av eleverna. Nyfikenheten är också den egenskap som flertalet av de forskare som sysslar med begåvade barn lyfter fram som utmärkande drag (Bloom, 1985; Silverman, 1993; Mönks & Ypenburg, 2009). Silverman relaterar detta intellektuella drag till viljan att förstå. I studien framgår att det är viljan att förstå som driver och motiverar eleverna att fortsätta fråga och vara nyfikna, i många fall trots att de känner sig motarbetade. Men här finns även elever som visar lättja vilket kan vara en följd av att de mött för få utmaningar under sina tidigare studier, resultat som överensstämmer med tidigare forskning.

Flera av barnen utmärkte sig tidigt och analyser av episoder där föräldrarna i intervjuer berättar om sina barns matematikintresse visar att föräldrarna redan tidigt i barnets utveckling upptäckt några av de förmågor och egenskaper som kännetecknar utpräglad matematisk förmåga (Barger, 1998; Krutetskii, 1976; Sheffield, 2003). Främst är det ivern att behärska kunskapsområdet och ett matematiskt sinnelag, d.v.s. generella matematiska förmågor som tidigt framträder. Men även här finns variation. Flickorna, Sara och Erica, visade inte samma iver att utveckla sitt matematiska intresse. Att vissa elever inte utmärker sig förrän senare i livet (i internationell litteratur kallade ”late bloomers”), kan ha sin grund i att undervisningen inte gjort det möjligt för dem att uttrycka och utveckla matematiska förmågor. De gör vad som krävs av dem och klarar detta på ett utmärkt sätt, men om ingen ytterligare stimulering ges sker ingen utveckling även om individen har fallenhet för ämnet.

Sara och Erica har även i övrigt liknande personlighet: de är lugna och strukturerade och uppmärksammas därför inte. Det kan ligga nära till hands att lägga ett könsperspektiv på dessa resultat men då bör nämnas att Ellen skiljer sig markant från Sara och Erica när det gäller personlighet. Hon har större likhet med vissa av pojkarna i studien genom sin intensiva framtoning. Även bland pojkarna skiljer sig personligheterna åt. Några är lugna, behärskade och framstår som betydligt äldre än de är medan andra är frågvisa, pådrivande och ibland något stökiga. Ett lugnt och behärskat beteende kan vara ett resultat av elevens vilja att framstå som normal. Elever tvingas ibland göra ett val mellan att visa sina förmågor, och då möjligen framstå som udda, eller hålla tillbaka sitt intresse och sin fallenhet och därigenom framstå som normal. Resultaten stärks av andra, mer omfattande studier av begåvade individer av vilka det tydligt framgår att det inte alltid är socialt accepterat att visa sina färdigheter och förmågor, att det t.o.m. kan leda till att individer utesluts ur den sociala gemenskapen. (se exempelvis Csikszentmihalyi, Rathunde & Whalen, 1997; Leyden, 2002; Persson, 2005; 2007; 2010).

Personlighetsdrag tycks slå igenom i hur eleverna uttrycker sina förmågor: där Johan är kortfattad och löser allt muntligt medan Sara både skriver sina förklaringar och berättar om sina tankegångar på ett informativt sätt. Liknande förhållande mellan personlighetsdrag och sätt att uttrycka sina matematiska förmågor finns genomgående hos fallstudieeleverna. Flertalet av eleverna klarar svåra beräkningar men de gör det på olika sätt: vissa använder algoritmer och traditionella metoder medan andra använder egna metoder och oftast utför beräkningarna i huvudet.

Vissa könsskillnader tycks, som nämnts, finnas i elevernas sätt att uttrycka matematiska förmågor: pojkarna utför oftast beräkningar i huvudet och har svårare att förklara hur de tänker medan flickorna är prydligare och förklarar strukturerat och oftast mer traditionellt. Mönstret som framträder är dock inte genomgående. Som nämnts skiljer sig Ellen från de övriga två flickorna; hon ger mer osammanhängande förklaringar och hoppar ofta över steg som hon anser självklara. Hon är inte road av att snabbt ta sig framåt i boken, vilket övriga flickor tycktes känna viss tillfredsställelse med, utan uppskattar svårare problem och kreativa aktiviteter. Samma variation finns bland pojkarna där ett fåtal har förmåga att förklara sina tankesteg. Vissa roas av tävlingsmoment, att lösa många uppgifter och lägga böcker och kurser bakom sig medan flertalet önskar utmaningar i form av svårare problem. Då elevunderlaget är begränsat är det inte möjligt att dra några slutsatser om könsmönster. Intressant är dock att se att det finns variation även inom denna aktuella grupp elever.

Som framgår av resultaten av fallstudierna uttrycker samtliga elever ett flertal av de matematiska förmågor så som de definierats i studien (Krutetskii, 1976). Utmärkande är elevernas förmåga att *formalisera* ett matematiskt material vilket innebär att de ser och tolkar den formella strukturen i en problemformulering och att de har förmåga att fånga helheten utan att bortse från delarna. Detta kan jämföras med normalbegåvade eller svaga elever som oftast fokuserar på detaljer och försöker lista ut ett passande räknesätt och som därmed har svårt att se problemet i sin helhet. Andra förmågor som är framträdande i studien, men som skiftar i omfattning och uttryckssätt mellan olika elever, är förmåga att operera med siffror och symboler, flexibilitet i tänkandet och förmåga att generalisera. Eleverna i studien visar även ett flertal av de karaktärsdrag som forskare inom området, exempelvis Sheffield (2003), Sriraman (2008a) och Barger (1998) beskrivit. Ett karaktärsdrag som, enligt Sheffield (2003), finns hos matematiskt lovande elever är uthållighet vid lösning av matematiskt svåra problem. Detta karaktärsdrag är framträdande hos flertalet av fallstudieeleverna i problemlösningssituationer främst tillsammans med mig.

Några av eleverna, framförallt de yngre, fascinerar och förvånar mig vid varje tillfälle vi träffas. Det kan vara genom deras beteende både avseende personliga egenskaper som energi, nyfikenhet men också genom deras logiska resonemang, förmåga att dra slutsatser, se mönster och finna egna lösningsstrategier. De utvecklas också under studiens gång, en utveckling som har sin grund i att de fått positiv uppmärksamhet för sin fallenhet, fått stimulans i form av utmanande problem och frågeställningar där svaren inte är självklara för dem och där de fått möjlighet att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor. Vissa problem har varit för svåra och till och med överskridit elevernas kompetens, men med stöd av mentor eller observatör har de löst problemet och stärkt sitt självförtroende. Tyvärr finns även fall där stöd uteblivit och där jag fått information om att eleven tröttnat och tappat intresset. Som beskrivits ovan är matematiska förmågor utvecklingsbara, i olika utsträckning och i olika riktningar för olika elever (Krutetskii, 1976; Häggblom, 2000). Pedagogiskt stöd är emellertid en förutsättning för gynnsam utveckling av förmågorna.

Att barn måste anpassa sig till gruppen och helst tycka om och kunna utföra samma aktiviteter vid lika ålder har, i den aktuella studien, visat sig viktigt för lärare främst lärare till de yngre eleverna (jfr. Mönks & Ypenburg, 2009, s. 25). Lärare till mer än hälften av eleverna i studien har i olika situationer påpekat att de har förståelse för att eleven har särskilda förmågor i matematik men att det också är viktigt att eleven får möjlighet att utveckla sociala och praktiska förmågor. Av min studie framgår att elevernas sociala problem till största delen har sin grund i brist på stimulans och för dem lämpliga utmaningar. Två studier, Persson (2007) och Stamm (2006), visar även dessa att de begåvade individerna som deltog i respektive studie inte hade någon bristande social förmåga eller kompetens. Av Perssons studie (*ibid*, s. 26) framgår att eleverna är empatiska, ansvarsfulla och självständiga medborgare. Begåvade elever kan däremot upplevas som besvärliga och stökiga, något som bekräftas av lärare och föräldrar i den här aktuella studien: de ifrågasätter, gör inte som de blir tillsagda och drömmer sig ibland bort, vilket leder till merarbete för lärare och föräldrar.

Andra drag som varit framträdande i den aktuella studien är bland annat elevernas minnesförmåga, i första hand deras förmåga att minnas strukturer och strategier vid problemlösning men också ren faktakunskap, ibland även av nonsenskaraktär. Motsatsen finns, då eleverna är olika, och vissa minns bara sådant som intresserar dem och tar inte in annan kunskap, framför allt inte sådan som de anser meningslös. Elevernas sociala umgänge och fritidsaktiviteter varierar likt deras personlighet: vissa umgås gärna med äldre och helst med vuxna medan andra har jämnåriga kamrater och gärna deltar i gemensamma fritidssysselsättningar. Av Blooms studie (1985) framgick att tre fjärdedelar av matematikerna var förstfödda i sin familj, ett resultat som stärks av andra studier där begåvade barn och framstående vuxna i oproportionellt hög grad är just förstfödda (Winner, 1999). I studien som presenteras här är resultatet än mer utmärkande, även om underlaget är begränsat. Alla fallstudieelever utom en är förstfödda i sina respektive familjer.

Begåvningsmodell – Triadiska interdependensen

I Mönks (1992, s. 194) triadiska modell finns tre inre faktorer, höga intellektuella förmågor, kreativitet och motivation, som tillsammans med tre omvärldsfaktorer, skola, familj och vänner, ligger till grund för begåvning. I studien har ingen formell identifiering genomförts och därmed inga tester för att avgöra elevernas intelligens. Det är istället elevernas matematiska förmågor, som i studien får motsvara Mönks höga intellektuella förmågor. I modellen avser motivation ”att någon har viljan och kraften att slutföra en bestämd uppgift". Definitionen kan, domänspecifikt för matematik, jämföras med det Sheffield (2003) uttrycker som uthållighet i problemlösningssituationer, vilket flera av eleverna i studien visar att de har trots sin, ibland, ringa ålder. Kreativitet innebär enligt Mönks "att man har förmågan att på ett originellt och uppfinningsrikt sätt hitta lösningar på problem". Liknande beskrivningar, fokuserande matematisk kreativitet, ger Sriraman (2008b, s. 4), Krutetskii (1976, s. 77) och Sheffield (2009, s. 88). Eleverna i studien uttrycker matematisk kreativitet främst i problemlösningssituationer då de inte har någon på förhand given metod för lösningen eller i situationer med öppna problem då de oftast finner flera olika lösningar till problemet.

Skolan tillsammans med familj och vänner är tre viktiga omvärldsfaktorer för elevernas utveckling av matematiska förmågor. Omvärldsfaktorerna är i ständigt samspel med de inre personliga egenskaperna och nödvändiga för elevernas möjligheter att utvecklas enligt sina förutsättningar. Samtliga elever i fallstudierna kommer från hem där föräldrarna stöttar deras intresse och månar om att barnen ska få en bra uppväxt (jfr. Csikszentmihalyi m.fl., 1997). Föräldrarna har i flertalet av fallen en akademisk utbildning men det gäller inte alla. Samtliga är dock medvetna om utbildningens betydelse och de inser alla att deras barn är i behov av särskild stimulans vilket kräver extra resurser. De upplever också emellanåt hur resurskrävande det är att fullt ut stödja barnen i deras, ibland outtröttliga, behov av stöd och stimulans.

I Blooms berömda och banbrytande studie (Bloom, 1985) lyfts föräldraengagemanget fram som avgörande för en positiv utveckling av exceptionell förmåga. Perssons (2007; 2010) studier visar dock att endast hälften av deltagarna i studien upplevde sig ha stöd hemifrån och övriga uppgav att de kunde hånas för sin förmåga eller till och med förbjudas att visa den offentligt. Inte i något av de fall som jag kommit i kontakt med har föräldrar eller närstående visat sådana tendenser, vilket naturligtvis också är beroende av urvalet. Bland skolans personal finns emellertid, i vissa fall, svaga tendenser av detta då lärarna ibland, tillsynes av omtanke, försöker hjälpa eleverna att uppträda så som de uppfattar vara normalt. De negativa attityderna kan yttra sig på olika sätt. När läraren inte följer upp en lösning som han eller hon anser vara alltför krånglig eller främmande för övriga elever visar läraren samtidigt att en sådan lösning inte är att föredra. När läraren inte låter en elev syssla med områden som övriga elever i klassen ännu inte behärskar och som de inte heller kan förväntas behärska, kan det från lärarens sida vara ett försök att skydda eleven från övriga elevers kommentarer. Men samtidigt etablerar lärarna, genom dessa handlingar, normer för vad som är normala eller accepterade prestationer och vad som kan ses som annorlunda eller socialt avvikande. Lärares uttalanden, att eleverna har svagheter inom andra områden, kan även dessa ses som sätt att få särbegåvade elever att framstå som mer "normala". Med detta agerande visar emellertid lärarna samtidigt en rädsla för det som är udda eller går utanför de åldersgivna ramarna. Trots att föräldrarna, i de fall som studerats här, samtliga är positivt inställda till sina barns förmågor framgår tydligt att barnen och föräldrarna är beroende av det stöd och de resurser skolan kan ge. Föräldrarna kan till viss del själva stötta sina barn i deras utveckling men genom att de ofta har ett heltidsarbete, syskon i familjen och ett hem att sköta finns inte alltid tillräckligt med tid och i vissa fall inte heller tillräckligt med kompetens för detta. Skolan har i uppdrag att vara en skola för alla. Styrdokumenten föreskriver att ”Undervisningen ska anpassas till varje elevs förutsättningar och behov” (Skolverket, 2006, s. 4) samt att ”Läraren skall organisera och genomföra arbetet så att eleven utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga” (*ibid*, s. 12). Dessa konkreta formuleringar i kursplanen är i verkligheten svåra att realisera och lärare har inte alltid möjlighet att leva upp till kraven. De är dock förutsättningar för att exempelvis elever med intresse och fallenhet för matematik ska ha möjlighet att utveckla sina förmågor. När skolan inte lever upp till kraven, vilket vi ser tydliga exempel på i några av fallstudierna, förskjuts ansvaret till föräldrarna. I de fall kompetensen finns, engagerar sig föräldrarna som extra resurs, i andra fall försöker de anlita en privat mentor som kan arbeta med barnen antingen i skolans verksamhet eller på barnens fritid. Förskjutningen av ansvar från skola till föräldrar kan emellertid leda till en segregerad skola där elever som har föräldrar med kulturella och ekonomiska resurser får möjlighet att utvecklas, andra inte. Statliga satsningar under de senaste åren riktade till elever med intresse och fallenhet för matematik kan ses som en positiv utveckling. Emellertid riktas dessa satsningar endast till gymnasieelever, så kallade Spetsutbildningar. Som framgår av denna studie är en sådan utveckling problematisk då redan mycket unga elever är i behov av stöd och stimulans för att inte tappa intresse eller känna utanförskap. Om barn till mindre välbeställda föräldrar ska få möjlighet att utvecklas efter sina förutsättningar krävs att skolan axlar sitt ansvar.

Föräldrarnas engagemang ses emellanåt med irritation från skolans eller lärarens sida. Det uppfattas som elitistiskt, och lärare menar att föräldrarna är pådrivande snarare än stödjande. Synsättet har diskuterats i tidigare forskning där exempelvis Edfeldt (1992) menar att det i Sverige ses som odemokratiskt inte bara att vara begåvad utan att vara begåvad och dessutom kräva extra resurser (jfr. Wistedt & Sundström, 2011). Flera föräldrar till elever i studien har fått kommentarer om sitt sätt att driva på och kräva extra resurser till sina barn. Lärare och skolledning har även, i intervjuer med mig, kommenterat föräldrarnas agerande på ett negativt sätt. För föräldrar är denna misstro ett dilemma då de oftast endast vill sina barns bästa. Det är i det sammanhanget viktigt att påpeka att det i Sverige saknas föräldraföreningar eller annat stöd till familjer med begåvade barn, stöd som finns i många andra Europeiska länder (se t.ex. NACE, 2010).

Vilket bemötande i skolan får de elever som visar intresse och fallenhet för matematik?

Fallstudieeleverna har inte behövt anstränga sig under de tidigare åren i grundskolan. Vissa har själva protesterat på olika sätt mot bristen på stimulans, vissa har genom föräldrarna framfört sina klagomål medan andra har funnit sig i situationen och gjort det de själva ansett vara viktigast. För elever som inte behövt anstränga sig under de tidigare skolåren - som aldrig gjort en läxa och som alltid förstått vid första genomgången - kan resultatet bli bristande arbetsvanor och dålig studieteknik som oftast framträder under de senare åren i grundskolan eller i gymnasiet (Engström, 2006; Stamm, 2009). Detta syntes tydligt i Johans fall då jag träffade honom i årskurs sju och han helt hade tappat intresset för skolmatematiken och hans lättja hade fått gott om utrymme. En liknande tendens, i sviktande intresse och viss lättja, fanns hos Axel vid träffen med honom i årskurs fyra. Han tyckte fortfarande att matematik var roligt men skolmatematiken, att räkna i sexans bok, var ”*asatråkigt*”.

I hälften av de fallstudier som beskrivits i denna studie är det föräldrarna som tagit kontakt med mig i sin oro över skolans bristande möjligheter att stödja och stimulera barnens förmågor. I övriga fallstudier är det lärare som identifierat elevernas förmågor eller jag själv, genom interventioner och observationer. Enligt den schweiziska forskningsstudie som presenterats tidigare (Stamm, 2006) identifierade lärarna ungefär hälften av de begåvade eleverna, den andra hälften identifierades genom de tester som ingick i studien. Det är alltså möjligt för lärare att identifiera elever med särskilda förmågor redan tidigt i grundskolan men identifieringen är oftast inte heltäckande och beroende av lärarnas kompetens och skolans resurser. Det som, enligt den schweiziska studien, är helt avgörande för eventuella långtidseffekter av en tidigt identifierad förmåga är om barnen själva tagit initiativ till att lära sig att t.ex. läsa och räkna (*ibid*, 2006). Det innebär återigen att det är viktigt att det, förutom fallenhet och utmanande aktiviteter, finns intresse och motivation hos eleverna själva att utveckla sina färdigheter inom området

Elevernas möjligheter att uttrycka sina matematiska förmågor

Den matematiska aktivitetens karaktär, dess syfte, innehåll och utformning har stor betydelse för elevernas möjligheter att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor, lika viktigt för elevernas utveckling är lärarens eller observatörens agerande i aktiviteten (Krutetskii, 1976; Yackel & Cobb, 1996). Genom ett undersökande, flexibelt och positivt agerande kan läraren eller observatören etablera och förankra sociala och sociomatematiska normer som gör att elevens vilja och intresse för fortsatt arbete inom ämnet främjas samt att elevens självförtroende ökar (Cobb & Yackel, 1996; Yackel & Cobb, 1996; jfr. Kilpatrick m.fl., 2001). Följdfrågor från lärare och observatör som stimulerar eleverna att senare ställa liknande frågor till sig själva stödjer den matematiska utvecklingen hos eleverna (Björklund Boistrup, 2010; Emanuelsson, 2001; Mason, 2000; Sheffield, 2009). Att lärarens, mentorns eller observatörens agerande har stor betydelse framgår av studie, i synnerhet av de gruppaktiviteter som jag själv genomförde med t.ex. Axel och Hampus vid två separata tillfällen där eleverna vid det senare tillfället, med stöd av fördjupande frågor förde resonemanget vidare.

Att som lärare våga utmana eleverna och sig själv med frågor och aktiviteter där svaret eller lösningen inte är självklar eller där problemen inte följer boken eller kursplanen, kan kännas svårt och utmanande men är viktigt för att eleverna ska utveckla matematisk kreativitet (Sheffield, 2009). Att som lärare visa eleverna att problemlösning innebär sökande efter olika lösningsvägar är också viktigt (Lampert, 1990). Saras gymnasielärare har höga förväntningar på sina elever och använder en del provokation för att locka fram intresse och motivation hos eleverna. Detta innebär även att hon själv utmanas av eleverna och hon menar att dessa utmaningar är viktiga och utvecklar lektionen. Om Johan blivit utmanad eller fått berikningsproblem inom olika tillämpningsområden, eller helt enkelt haft större förväntningar på sig från lärares sida, kunde hans intresse för matematik eventuellt hållit i sig även under senare delen av gymnasiet.

Den undervisningsmodell som, enligt statliga rapporter, dominerar svensk matematikundervisning (Skolverket, 2003a; 2004a; 2008a): enskilt arbete i läromedel visar sig också dominera i de enkätsvar som redovisats i denna studie. En sådan undervisningsmodell utmanar inte elever med fallenhet och förmåga i matematik vilket bekräftas av eleverna i studien men också av brev och telefonsamtal som sänts till medlemmar i projektgruppen. Engström (2006) visar att det inte räcker med att vi upptäcker och identifierar begåvade elever: det väsentliga är att finna en undervisningsmodell som utmanar och utvecklar deras förmågor.

Som beskrivits i ovan presenterade ramverk för organisation av matematikundervisning bör fokus i matematikundervisningen snarare vara lärprocesser än produkter av ett lärande. I studien som presenterats här framträder skillnader mellan elevernas enskilda arbete i läromedel, vilket oftast är produktstyrt, och det kreativa arbete som uppstår när eleverna, genom lärares eller observatörens frågor, inte bara ställs inför andra typer av problem än de som normalt finns i läromedel utan även uppmanas att tänka igenom och förklara sina resonemang. I elevernas formuleringar under lösningsprocessen uttrycks matematiska förmågor som kan vara svåra för lärare att tolka och följa upp om lösningen enbart är en skriftlig produkt. En undervisning med fokus på processer behöver inte betyda enskild undervisning mellan lärare och elev. I undersökande aktiviteter där elever ombeds förklara sina tankegångar inför klasskamrater eller i grupp- och pardiskussioner, där innehållet exempelvis utgörs av problemlösning, finns större möjligheter för lärare att fokusera processer. Resultat från exempelvis Björklund Boistrups (2010) studie, Cobbs och Yackels studier (1996) samt ovan redovisade observationer visar sådana möjligheter. Lärarens agerade i övningarna, dels genom tydlig förmedling av syftet med aktiviteten, dels genom respons och följdfrågor, är avgörande för elevernas möjligheter att uttrycka och utveckla matematiska förmågor. Lampert (1990) menar att det är viktigt för läraren att skapa en undervisningssituation som uppmuntrar eleverna att diskutera, som bjuder in till medvetna gissningar och där läraren inte har svaret på alla frågor. På samma sätt menar Mason (2000) att de viktigaste frågorna från läraren är de som visar lärarens genuina intresse för elevens kunskap medan Emanuelsson (2001) även kan se ett mervärde i sådana frågor då de också ger läraren information om elevens kunskapsnivå och om hur läraren bör agera för att hjälpa eleven vidare på rätt nivå. Min studie bekräftar dessa resultat.

Av den här aktuella studien – av genomförda observationer i klassrum, grupprum och enskilda möten mellan elever och lärare, speciallärare, mentorer och observatörer – framgår att den ordinarie undervisningen till stora delar består av förmedling av kunskap antingen genom lärares genomgång eller genom elevers arbete i läromedel. Fokus läggs på produkter (t.ex. korrekta svar, lösningsmodeller, arbetsrutiner) och på nyttoaspekten, vilket skapar ett undervisningsklimat där de sociala normerna får större betydelse än de sociomatematiska som ibland knappt är märkbara. Undervisning där lärare *förmedlar kunskap*, som i TIMMS videostudier (2010) exemplifieras i observationer av undervisning i USA och Tyskland, är en undervisningsform som forskare med fokus på klassrumsundervisning i matematik menar är viktig att frångå. Watson (2007) framhåller att syftet med att undervisa matematik bör vara att möjliggöra för eleverna att agera matematiskt vilket kräver ett interaktivt klassrumsklimat. Sheffield (2009), som menar att utveckling av matematisk kreativitet är det främsta målet för matematikundervisning, påpekar, i likhet med Watson (2007), Mason (2000) och Lampert (1990), att det är lärarens frågor till eleverna som styr denna utveckling.

Sociala och sociomatematiska normer och deras betydelse för utveckling av matematiska förmågor

Som vi sett ovan är den matematiska aktivitetens syfte, innehåll och utformning, tillsammans med lärarens agerande i samband med aktiviteten, viktiga faktorer för elevernas möjligheter att utveckla matematiska förmågor. Både aktivitetens art och lärarens agerande påverkar etablerandet av sociala och sociomatematiska normer i klassrummet. Lärarens respons på elevernas svar och förklaringar och lärarens frågor till eleverna är viktiga för hur eleven tolkar sin kunskap och sina förmågor. I interaktionen skapas, modifieras och etableras sociomatematiska normer som sedan utgör grund för klassrummets matematiska praktik. I de klassrumsobservationer som genomförts i studien och som innehållit någon form av undersökande aktivitet har de sociala normerna i stor utsträckning präglat undervisningen: att eleverna bör räcka upp handen och svara när de får frågan, att läraren är den som fördelar ordet någorlunda jämnt bland deltagarna och att alla elever bör förstå det innehåll som presenteras. Lärares korta positiva respons på rätt svar präglar en klassrumspraktik som avsevärt skiljer sig från en praktik där normen är att eleverna bör få diskutera och argumentera för olika lösningar till ett problem. Vid ett fåtal tillfällen har interaktionen handlat om de matematiska lösningarnas karaktär som annorlunda, effektiva eller acceptabla.

Normer som skapas och etableras i klassrummet, styr elevernas attityder till ämnet och deras egen normbildning. Ibland kan emellertid konflikter uppstå mellan olika normsystem – sociala normer och sociomatematiska. Om en elevs förklaring av ett matematiskt problem inte kan förstås av övriga elever eller om lösning inte är acceptabel då det matematiska innehållet inte ingår i årskursens stoff, kan det uppstå konflikt mellan en social norm, som säger att alla elever ska förstå det som sägs i ett klassrum om de rimligen, enligt förväntningarna som kan ställas på åldersgruppen, har möjlighet att förstå det som sägs, och en sociomatematisk norm som betonar värdet av variation i lösningsförslag och diskussion av alternativa, effektiva och sofistikerade lösningar. Förklaringen till att sådana normkonflikter uppstår kan vara att läraren har bristande matematiska kompetens, d.v.s. läraren har svårt att tolka och redogöra för lösningen så att övriga elever förstår, eller att läraren har svårt att frångå en etablerad social norm, t.ex. den att lärarens uppgift är att skydda elever från att framstå som udda, i jämförelse med andra elever i åldersgruppen. Normen, att individer förväntas passa in i mängden, är en norm som har visat sig missgynna begåvade elever. De negativa konsekvenserna av normalitetsnormen framgår både av min studie och av tidigare genomförda studier med svenska individer (Persson, 2005; 2007; 2010).

Att lärarnas matematiska kompetens är viktig för bemötandet av elever med särskilda matematiska förmågor har framgått av forskningsöversikten. Detta framgår också tydligt i några av de presenterade episoderna i denna studie. Men även då kompetensen brister har lärarna möjlighet att agera på ett positivt sätt för att främja sin egen och elevernas utveckling av och attityder till ämnet. Genom att uttrycka intresse för elevernas lösningsförslag, be dem förklara hur de tänker och tillsammans diskutera lösningen eller, om så krävs, be att få återkomma vid ett senare tillfälle. Även lärare kan behöva betänketid eller diskutera med kollegor. Ett sådant agerande visar dessutom att läraren inte har alla svar och i alla situationer kan agera som facit.

Lärares bemötande, lärares roll och lärares förväntningar på eleverna

Fallstudieeleverna har alla olika personlighet och sätt att uttrycka sina matematiska förmågor, även olika sätt att agera i kontakter med vuxna, vilket blev tydligt vid mitt första möte med dem. Sådana skillnader kan bero på elevernas tidigare erfarenheter och upplevelser av hur de blivit bemötta i kontakter med vuxna. Fallstudierna ger en bild av ytterligheter i elevernas möte med en vuxen. Axel är proaktiv, intensiv och vill gärna testa mina matematiska kunskaper innan han accepterade mig medan Erica är lugn och blyg och jag får dra fram hennes svar på mina frågor. Axels uttalande ”*Du är inte dum du. Nu kan du fråga mig*” kan tolkas som en fråga om förtroende. Jag upplevde att han innan vårt möte hade bestämt sig för att testa personen som kom. Detta kan bero på att han har tappat förtroende för vuxnas matematiska kompetens och engagemang, något som kan ha sin grund i att han inte tidigare fått respons på sina frågor eller inte tyckt sig kunna lita på de svar som givits. Axel visade i slutet av vår träff att han uppskattat mötet genom att skicka med mig en lapp med orden ”*Glöm inte helsa på mig*”. I både Axels och Ericas fall var lärare och skolledning positivt inställda till att eleverna skulle få extra stöd och stimulans. I båda fallen kände lärarna att de saknade den matematiska kompetens och kunskap om eleverna som behövdes för att stödja och stimulera utvecklingen av deras matematiska förmågor. Lärarna och skolledningen engagerade sig dock i elevernas situation och försökte på bästa sätt stödja dem. Utformningen av stödet är inledningsvis likartad, men det finns skillnader som rör lärares, speciallärares och mentorers matematiska kompetens och möjligheter att välja lämpliga matematiska aktiviteter, även skillnader i deras engagemang, intresse för ämnet och förväntningar på eleverna. Dessa skillnader har visat sig ha stor betydelse för elevernas utveckling.

Elevernas möjligheter till extra stöd

Som framgår av resultaten av fallstudierna ger skolorna i hälften av fallen någon form av extra stöd till eleverna. Stödet varierar både vad gäller utformning och omfattning och förändras också under studiens gång. I jämförelse med ett flertal andra länder, där statligt stöd till identifierade elever är obligatoriskt, finns inga sådana självklara rättigheter för svenska elever eller föräldrar till begåvade elever att kräva stöd. Som framgår av enkätstudien som ställdes till matematikutvecklare, finns inga dokumenterade svenska handlingsplaner som anger hur skolan bör bemöta elever med särskilda matematiska förmågor. Resultatet av enkätstudien visar att det stöd som erbjuds elever med intresse och fallenhet för matematik till största delen är utformat som accelerationsaktiviteter, främst till elever i senare delen av grundskolan. Då lärare, vilket framgår av enkätstudien riktad till lärare i grundskolan, i stor utsträckning ser elevers snabbhet och deras förmåga till självständigt arbete som tecken på matematisk förmåga är detta resultat inte förvånande. Som nämnt tidigare är det problematiskt att det stöd som ges nästan uteslutande går till äldre elever, vilket dels framgår av svaren i enkätstudien men också av de satsningar som gjorts under senare år på gymnasiala Spetsutbildningar. I undantagsfall ges stöd från en mentor, något som forskare inom fältet rekommenderar som en av de viktigaste åtgärderna som kan vidtas (Persson, 2007; Silverman, 1993). Endast i tio av de 284 svar som matematikutvecklarna lämnade framkom att det på skolan eller i kommunen fanns en speciallärare, mentor eller matematikutvecklare som i sin tjänst hade möjlighet att stödja och stimulera elever med fallenhet för matematik.

I den ordinarie matematiskundervisningen dominerar, som nämnts, hastighetsindividualisering. Inte i något av de undersökta fallen förekom nivågruppering eller andra former av differentiering innan denna studie inleddes. Nivågruppering, där indelning av eleverna görs med utgångspunkt i deras färdigheter och förmågor, har visat sig ha gynnsam effekt för elever med särskilda förmågor under förutsättning att de får lära sig områden som de annars inte skulle ha kommit i kontakt med. Detta framgår både av internationella studier, Brody (2004) och Koshy (2001), men också av en svensk rapport från Skolverket (2007), som visar att eleverna upplever nivågruppering positivt och eleverna själva menar att de lär sig bäst tillsammans med elever som är på samma kunskapsnivå. En annan form av differentiering är profilskolor eller Spetsutbildningar vilka två av eleverna i studien har erfarenhet av. Elevernas positiva upplevelser och beskrivningar av undervisningen är kopplad till innehållet och utformningen av utbildningen, inte främst möjligheterna att studera tillsammans med elever som delar intresset. Samtidigt säger Sara att det troligen inte hade varit möjligt att bedriva undervisningen på det sätt som gjordes om inte samtliga elever haft intresse och fallenhet för ämnet. Just detta är väsentligt med nivågruppering: att eleverna ges möjlighet att läsa i snabbare takt, där acceleration görs med syfte att skapa utrymme för berikning och fler utmaningar. På samma sätt fick Erica möjlighet att delta i en form av nivågruppering utformad som problemlösning en timme per vecka. Den timmen ledde till en stor förändring i hennes situation i skolan och fick positiva effekter på hennes självförtroende och möjligheter att utveckla matematiska förmågor. Sådan undervisning hade varit svårare att genomföra i hennes ordinarie klass men var fullt möjlig genom samarbete mellan olika klasslärare. Inte i något av de övriga fallen har dock skolan övervägt nivågruppering eller samarbete mellan klasser.

Vad innebär skolans bemötande för eleverna och deras möjligheter att utveckla sina särskilda matematiska förmågor?

Det har i studien visat sig svårt för lärare att skapa och etablera sociomatematiska normer i klassrumspraktiken då dessa normer ofta kommer i konflikt med etablerade sociala normer. Den sociala normen, att det bör vara tyst i ett klassrum där eleverna sysslar med matematik, kan komma i konflikt med den sociomatematiska normen att eleverna ska ges tillfälle att förklara och argumentera för egna och andras lösningar. Särskilt tydlig är konflikten i den traditionella formen för matematikundervisning, där enskilt arbete dominerar lektionerna. Normen att det ska vara tyst när eleverna ägnar sig åt matematik betonar lärande som en individuell process, huvudsakligen förmedlad via läromedlet. Givet en sådan norm framstår livliga diskussioner mellan elever som normbrott. Läraren reduceras till handledare, och läromedlet får den viktiga rollen att förmedla kunskaper, en roll som kan liknas vid den roll som en gång tillskrevs IMU-projekts arbetsmaterial, med den skillnaden att dagens läromedel inte alltid är anpassade till elevernas kunskapsnivå. Resultaten visar emellertid att det är i interaktion elever och lärare emellan som eleverna får kunskap om vad som karaktäriserar matematikämnet och kunskapsbildning i ämnet och att det är i sådana diskussioner som eleven har möjlighet att etablera sociomatematiska normer. En annan social norm som uttrycks i studien är att alla elever bör förstå lärarens eller övriga elevers lösningsförslag. En sådan norm visar sig kunna resultera i att lärare avvisar lösningsförslag eller frågor som läraren anser vara för svåra för övriga elever eller för läraren själv att förstå. Denna typ av normkonflikt tycks främst uppstå då läraren saknar tilltro till deltagarnas kompetens att förstå den föreslagna lösningen, inklusive lärarens bedömning av om den egna matematiska kompetensen är tillräcklig för att läraren ska lyckas reda ut lösningsförslaget. Men resultaten visar också att den sociala normen, att alla bör förstå ett lösningsförslag kan stödja etableringen av sociomatematiska normer, som i de fall där läraren förlitar sig på att deltagarna gemensamt kan reda ut en föreslagen lösning. En sådan öppenhet inför alternativa, ibland överraskande, lösningar samt lärarens mod och kompetens att hantera dessa, är avgörande för elevernas matematiska utveckling. Öppenhet och mod gäller även lärarens val av frågor att ställa till eleverna liksom deras bemötande av elevernas frågor. Utöver en sådan kreativ och utmanande klassrumsundervisning, ofta rekommenderad i matematikdidaktisk forskning, krävs i vissa fall extra stöd och stimulans till elever med särskilda matematiska förmågor t.ex. i form av grupperingar eller enskilda träffar med mentorer där eleverna har möjlighet att ta del av och diskutera ett annat matematiskt innehåll än det som tas upp i klassrumsundervisningen. Så t.ex. ser vi i studien skillnad i de erbjudanden som elever får i en profilskola jämfört med vad som erbjuds i ett traditionellt gymnasieprogram. Sådant stöd, specifikt riktat mot elever med särskild fallenhet för ämnet, finns, som framgår av studien, även för yngre elever. Av enkätstudierna framgår dock att det förekommer mycket sparsamt i vårt land.

Implikationer för fortsatt forskning om studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor

Vi har i studien sett att lärare kan ha svårt att tolka elevernas utsagor och att ge dessa utsagor en matematiskt korrekt formulering. Vissa av dessa svårigheter tycks vara orsakade av lärarens, ibland bristande, matematiska kompetens. En intressant forskningsfråga för framtiden är att studera *på vilka sätt lärarens kompetens har betydelse för benägenheten att ge stöd till elever med särskilda förmågor i matematik*. På vad sätt utmanas lärare av dessa elever och vad behövs av matematisk kompetens för att läraren ska våga och klara av att möta eleverna på ett intresserat och stödjande sätt?

Att detaljgranska vilken kompetens som krävs för att tolka elevernas utsagor, då syftet är att kommunicera med eleven på ett sätt som stödjer utvecklingen av matematiska förmågor, är en forskningsuppgift som skulle kunna gagna alla elevers matematiska utveckling. Fortsatta studier av hur sociala och sociomatematiska normer utvecklas och etableras i klassrumsundervisning och hur dessa normer hämmar eller skapar förutsättningar för utveckling av matematiska förmågor är också en viktig fråga för fortsatt forskning.

Möjlig utveckling av matematikundervisningen för att bemöta elever med särskilda matematiska förmågor

Den aktuella studien visar, likt andra undersökningar, att svensk matematikundervisning i huvudsak präglas av enskilt arbete i läromedel. För att göra det möjligt att bedriva en matematikundervisning som stödjer och stimulerar alla elever i klassrummet behöver lärarna återta ansvaret för undervisningen och ta aktiv del i utvecklingen av elevernas matematiska kompetenser. Studien har visat att ett undersökande arbetssätt, där eleverna får lösa utmanande problem i samspel med lärare och kamrater i en kreativ klassrumsmiljö, stimulerar elever till matematisk utveckling, särskilt de elever som har utpräglad fallenhet för ämnet. Ett sådant arbetssätt kräver dock lärare som har matematisk kompetens, mod och engagemang för elevernas lärande. Det kräver även tid för planering av de matematiska aktiviteterna. I planeringsarbetet är det viktigt att lärare ställer sig frågor som ”Vilket syfte har jag med min undervisning?”, ”Räknar jag med att alla elever löser problemen på unika och kreativa sätt eller ber jag dem memorera de metoder som jag själv använder?” ”Är jag trygg i att uppmuntra eleverna att ställa matematiska frågor där jag inte själv har ett omedelbart svar?”

I interaktionen med eleverna är frågor, utmaningar och viss provokation viktiga redskap. Det är läraren som har möjlighet att styra undervisningen och kommunikationen i klassrummet genom att exempelvis uppmuntra medvetna gissningar, ta elevernas frågor som utgångspunkt för diskussioner, låta eleverna förklara sina resonemang och ifrågasätta sina egna och övriga elevers lösningsförslag. I ett sådant arbetssätt skapas och etableras sociala och sociomatematiska normer som möjliggör för alla elever att uttrycka och utveckla matematiska

Studien som presenterats här visar att det finns möjligheter att inom klassens ram förändra undervisningen så att den bättre stödjer elevernas matematiska utveckling. Den visar också att det därutöver krävs särskilt stöd till elever med utpräglad matematisk fallenhet, i samma mån som sådant stöd krävs för elever som har uttalade svårigheter i ämnet. Av studien har framgått att det finns länder där man har kommit betydligt längre i etableringen av professionellt stöd till elever med utpräglad fallenhet för matematik och andra skolämnen. Här har studien koncentrerats till de svårigheter och möjligheter till stöd och utveckling av matematiska förmågor som föreligger i en svensk kontext, belysta i fallstudier och enkätstudier. Vidare forskning får visa om det också i vårt land finns en mer generell acceptans för och möjlighet att skapa en skola som ger varje barn rätt att utvecklas efter sin förmåga.

Summary

The research problem

Research on giftedness and talent development in school and society constitutes an important and expanding international field of research. However, Swedish research within the field of gifted education is limited and often viewed in the light of the many myths that still prevail in Swedish society concerning highly able students as socially, culturally and intellectually privileged, as belonging to an 'elite' and therefore not in need of any special attention and provision in school. The broader aim of the thesis is to challenge such attitudes towards giftedness by broadening the views of what characterizes highly able students and their study situation in Swedish schools. The study focuses on mathematically talented students and raises the following questions:

- What characterises students with exceptional mathematical abilities?
- How are these students supported in school?
- What consequences does the available support have for the mathematical development of the students who took part in the study?

The students who participated in the study — eleven students with exceptional abilities, ranging in age from 6 to 19 years of age — are characterised based on to their personal traits and general abilities, on their social background and current social situation as well as on their mathematical abilities and how these are expressed in school, at home and in the students' daily lives.

The question of how these students are supported in school concerns the possibilities they have to express their exceptional mathematical abilities in classroom sessions or in private tutoring sessions in the company of a teacher or a special needs teacher but also what special support is offered to these students for the purpose of helping them develop their full potential. Finally the study investigates whether different kinds of support lead to qualitatively different development in the students' attitudes towards mathematics and in their understanding and knowledge of the subject. This latter question is researched by means of longitudinal studies (3 to 6 years) of six students.

Background

The general background of the study provides a historical overview of research on giftedness and talent development, research which is both older and more extensive than research focusing specifically on talent in mathematics. It

provides a broad picture of how giftedness is defined and a discussion of personality traits that are characteristic of gifted individuals. Above all, this general overview provides a background to the understanding of the social situation of gifted individuals and their need for support and encouragement. A multifactor model of talent development is used in the study, taking into account both individual and environmental aspects of talent development.

Many character traits applicable to students with special abilities, irrespective of their area of interest, are also relevant to students with special abilities in mathematics. However, some are specific to this particular subject area. Therefore, an overview of research on gifted education in mathematics is provided. Much of this research focuses on the identification of mathematical talent in school children and it deals to a lesser extent with the nurturing of talent. What opportunities should be made available to the students in school in order to inspire them to work creatively in mathematics so that they may develop their mathematical skills and their understanding of mathematical concepts, methods and processes? Research that addresses these questions is presented. A short historical background is also given to the Swedish discussion of optimal ways of providing for students with varying knowledge and abilities: a discussion concerning organizational measures needed to enable individualization, i.e. the modification of content according to students' prior knowledge and ability to learn.

Theoretical considerations

A clear definition of mathematical ability and a constructive/effective description of its expressions in mathematical activities are fundamental to the characterization of students with mathematical abilities and to the investigation of possible ways in which such abilities can be developed through teaching. The definition of mathematical ability used in this study was introduced by the Russian researcher V.A. Krutetskii, in a 12-year longitudinal study (1955-67) of 200 students. This definition is still widely used in studies of mathematically gifted students. Mathematical ability is described as a structure of several abilities that are inherently linked to, expressed and developed in mathematical activities. These abilities are described as: the ability to *formalize mathematical material* e.g. to separate form from content and to operate with formal structures of relationships, the ability to *generalize mathematical material*, e.g. to distinguish information of key importance from irrelevant information for a given problem, or to grasp commonalities in seemingly diverse situations and contexts, the ability to *operate with symbols*, the ability to *reason mathematically*, e.g. the ability for logical, sequential reasoning, flexibility and reversibility in mathematical thought and to think in curtailed structures, and the *ability to memorize mathematical information* of a general kind such as generalizations, proofs, schemes of argumentation, etc. These abilities are potentials, framed and developed through mathematical activities.

Since mathematical abilities are inherently linked to activities of a certain kind we need to consider the character of the mathematical activities offered to the students. In this study, the analysis focuses on the activities offered to the students and how they may or may not be suited for the purpose of developing the students' mathematical potential. All social activities are regulated by norms. Following the research of Paul Cobb and Erna Yackel we note that some of these norms are applicable to classroom activities regardless of the subject taught, so called general *social norms* i.e. norms that influence the interactions between teacher and students, e.g. how the actors are positioned in the classroom, if and how students are expected to challenge each other, to justify their statements etc. Other norms are specific to particular subjects, in this case the teaching and learning of mathematics, so called *sociomathematical norms*, i.e. norms that regulate what counts as a mathematically acceptable solution to a problem, or what counts as an alternative, elegant, effective or sophisticated solution. A norm-based analytical framework makes it possible to establish how and in what ways certain activities may or may not help the students develop their mathematical potential.

Empirical studies

The study is based on a pilot study and ten case studies of highly able students (ages 6-19). Six of these studies are longitudinal, ranging from three to six years. Furthermore two survey studies were carried out, one among 180 teachers (preschool to Grade 9 in Swedish compulsory school), one directed at 284 mathematics developers in 229 Swedish municipalities.

The first empirical studies were carried out in Spring 2005, the results of which were reported in a licentiate thesis presented in 2008 by the author of this thesis. The current study is a continuation of the licentiate study; its results have been integrated into this thesis which, thus, should be viewed as a whole.

The pilot study

The aim of the pilot study was to investigate the feasibility of identifying mathematically able students (grades 4 to 8) by means of a mathematical activity they would not normally encounter in their ordinary teaching—abstract algebra and the notion of encryption—described to the students as a secret language through which they could communicate without being overheard/seen. One of the students, Johan, was identified in this pilot study. Another student in the same class, Sara, was identified through a mathematics contest, the Kangaroo Contest, in which she scored among the top five in the country. Both of these students were followed through their later years in compulsory school (grades 7-9) and through their studies in upper secondary school.

The case studies

The case studies, which describe the development of the students' mathematical abilities, are based on interviews with the students, their parents and teachers and on observations of classroom activities and mathematical activities arranged by the author of this thesis. Two of the eleven case-study students were twins. This means that a total of ten case studies were carried out ranging from one to six years. Three of the case-study students took part in the licentiate study and were continuously observed for the current study as well. The remaining seven students had all, through their parents and/or teachers, expressed interest in participating in the study. They had all learnt about the study through public media reporting on the project *Gifted Education in* Mathematics (www.giftedmath.se) and/or on the results of the licentiate thesis. A greater number of students were interested in participating in the study than could be accommodated and this necessitated a selection process. The selection was based on observations of the students and on interviews with the students and their teachers and parents, later followed by contacts via e-mail and telephone. The most important criterion was the student's mathematical abilities, but gender, age and geographic location were also considered in order to secure some variation in the data.

In all the case studies individual interviews and mathematical discussions with the students occurred at least once, making a total of 42 individual interviews including mathematical discussions with the case-study students. Documentation of these events was carried out through voice recordings of verbal communication and through field notes concerning the student's body language. In addition the students' written work on the mathematical problems was collected. The study is also based on 39 classroom observations, 22 interviews with parents and 30 with teachers. All data were transcribed immediately after the events took place. An initial analysis of the data was carried out, the purpose of which was to shed light on the possible need for further empirical studies and additional interviews with the individuals involved. Finally, data was sorted based on its relevance to the aims of the study and the research questions. Examples of general interest to the study were selected for further analyses of students' mathematical abilities and how these were expressed and supported in various mathematical activities.

The survey studies

To validate the results of the case studies two survey studies were conducted. The first survey was directed to 180 teachers (preschool to Grade 9 in Swedish compulsory school), who were participating in in-service courses on mathematics education. A questionnaire was distributed that included questions about: the teacher's personal experience of identifying and supporting students highly able in mathematics, the nature of the teacher's everyday mathematics teaching, and the support given to able students. The second survey was answered by 284 mathematics developers from 229 Swedish municipalities attending a conference. They were asked whether their municipality, to their knowledge, provides any support for gifted mathematics students in the form of action plans that determine means of providing for these individuals, e.g. in terms of the allocation of resources such as special needs teachers, mentors and/or other resources directed towards gifted students for the purpose of helping them meet their potential.

Results and discussion

All of the eleven case study students, but one, were first-born children in their families, which is not uncommon among gifted children and often explained as a result of parents devoting a lot of time to their first child. Furthermore, if siblings arrive, the child must compete for the privileged position, and hence, will often invest much time and effort on developing his or her abilities. Most of the case study students were identified by their parents as exceptionally gifted even before they started school. Also, the parents were often aware of their child's need for additional challenges and support for his/her further development. These results are in agreement with previous international studies on giftedness but they may also be partly due to the method of selecting the students who participated in this study since the selection was based on personal contacts initiated by parents or teachers. There are, however, some exceptions in this study, cases where neither the students nor their family members or teachers were aware of the student's special abilities until later in life.

The case study students have some traits in common. They are all: inquisitive and highly motivated, able to concentrate on challenging tasks, and in possession of a strong will to learn and to master intellectually complex tasks. These characteristic traits are found in most gifted students regardless of their area of interest. But there are also common traits that are characteristic to the subject of mathematics. The case study students all have the ability to formalize mathematical material, to capture the logical structure of a problem, and to concentrate on the whole problem without losing the details. These abilities distinguish this particular intellectual orientation. However, despite the resemblance among these students, they differ in personality and in their ways of expressing their mathematical abilities. Some of them are calm and highly structured in their reasoning; others are impulsive, sometimes unruly or restless, behaviour which can often be interpreted as a reaction to a lack of simulating tasks. When provided with such tasks the students respond in different ways: some of them use algorithms or standard methods to solve the problems whereas others invent their own methods, often using mental arithmetic. To summarise, there seems to be a close relationship between the students' personalities and their ways of expressing their abilities, an observation that was also made in V.A. Krutetskiis famous study (1955-67) on 200 mathematically gifted students.

The results also show the close relationship between the development of the students' mathematical abilities and the activities offered to them in school or in the context of the current study. Most of the case study students' classroom mathematics exercises consisted of individual work in textbooks. Such activities may be in accordance with general social norms constituting what counts as normal practice, i.e. norms that state that students must be silent when working in the classroom in order not to disturb other students. This means that learning is essentially viewed as an individual enterprise. Not only do such norms make it difficult for teachers to observe and aid students in developing their mathematical abilities, they may also conflict with socio-mathematical norms that facilitate an inquiry-based form of practice. The results of the case studies show that a variety of teaching methods, where students are challenged to mathematical discussion by investigative activities, problem solving activities or lab exercises interspersed with individual work in textbooks, is essential for the development of students' abilities. As such the results are in line with current studies in mathematics education. However, such varied activities place considerable demands on the teachers' mathematical competence since it is difficult for the teacher to foresee what will be brought up in an open classroom discussion, and it may be particularly problematic to anticipate the nature of the mathematical topics or questions brought up by gifted students. In order to pursue their interest in the subject these students need additional help from mathematically competent mentors or special needs teachers.

The results of the first survey study on teachers' experiences of teaching mathematics, and in particular their experiences of teaching students highly able in mathematics, concur with the results of previous studies of the activities that characterize normal practice in mathematics teaching in Swedish schools. The results are also supported by Swedish government reports that comment on the results of the TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) and PISA studies (Program for International Student Assessment). Even if the majority of the teachers who participated in the current study stated that they currently had or had previously had mathematically gifted students in their classes, they mostly offered to these students what may be called “more of the same,” that is, individual work in textbooks. Only 1% of the teachers reported that their school provided resources directed towards gifted students, such as special needs teachers, mentors or enriching activities. This result was further supported by the results of the second survey, answered by mathematics developers from 229 Swedish municipalities. The developers stated that they had no access to any formally sanctioned action plans on how to provide for gifted students and only 5% of them answered that their municipality offered at least some kind of help to gifted students in the lower grades of compulsory school. The support given to students in the upper grades mainly consisted of acceleration in textbooks, which suggests that mathematical abilities in students, if observed at all, is seen as students' abilities to work fast and independently, that is, mathematically able students are viewed as equivalent to high achievers. This understanding of giftedness is at odds with the results of the current study as well as with the results of international studies on mathematically gifted students.

Referenser

Alexandersson, M. (1994). *Metod och medvetande.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Anderson, L., & Krathwohl, D. (2001). A taxanomy for learning, teaching and assessing: a revision of Bloom´s taxanomy of educational objectives. New York: Longman.

Aspers, P. (2007). *Etnografiska metoder.* Malmö: Liber.

Assouline, S., & Lupkowski-Shoplik, A. (2005). *Developing Math Talent.* Texas: Prufrock Press.

Axelsson, T. (2007). *Rätt elev i rätt klass.* Linköping: Tema barn, Linköpingsuniversitet.

Backlund, L., & Backlund, P. (Nr. 4 1999). Att förändra arbetssätt - svårt men nödvändigt. *Nämnaren* , ss. 105-112.

Baldwin, A. Y. (1993). Teachers of the Gifted. i K. Heller, F. J. Monks, & A. H. Passow, *International handbook of research and development of giftedness and talent.* (ss. 621-629). Oxford: Pergamon Press.

Barger, R. (1998). *Math for the gifted child.* Jefferson City: Gifted Association of Missouri.

Bates, J., & Munday, S. (2005). *Able, Gifted and Talented.* Cornwall, Bodmin: MPG Books Ltd.

Bentley, P.-O. (2003). *Mathematics teachers and their teaching. A Survey Study.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bergman Ärlebäck , J. (2010). *Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden.* Linköping: Linköpings universitet. Matematiska institutionen.

Bergsten, C. (2006). En kommentar till den matematiska problemlösningens didaktik. i L. B.-S.-L. L. Häggblom, *Perspektiv på kunskapens och lärandets villkor* (ss. 165-176). Vasa: Åbo Akademi.

Bicknell, B. (2009). Who are the Mathematically Gifted? Student, Parent, and Teacher Perspectives. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education, 13(1)* , 63-73.

Bjerneby Häll, M. (2006). Allt har förändrats och allt är sig likt. En longitudinell studie av argument för grundskolans matematikundervisning. Linköping: Linköpings Universitet, Institutionen för beteendevetenskap.

Björklund Boistrup, L., Pettersson, A., & Tambour, T. (2007). Skolmatematik och universitetsmatematik ur ett didaktiskt perspektiv. i T. Englund, A. Pettersson, & T. Tambour, *Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 1.* (ss. 8-26). Stockholm: Avdelningen för matematikens didaktik och PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm.

Björkqvist, O. (1998). Matematiskt rika matematikuppgifter för högstadiet och gymnasiet. Studie- och undervisningsmaterial nr. 22. Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten.

Björkqvist, O. (1999). Rika matematikuppgifter. *Nämnaren, nr. 3* , ss. 35-39.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. i B. Grevholm, *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (ss. 115-132). Lund: Studentlitteratur.

Bloom, B., Englehart, M., Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of edicational goals. Handbook I: Cognitive domain.* New York, Toronto: Longmans, Green.

Bloom, B. (1985). *Developing Talent In Young People.* New York: Ballantine Books.

Boesen, J. (2006). Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact. Umeå: Umeå Universitet.

Brändström, A. (2003). Läroboken - något att fundera på. Nämnaren nr 4 , ss. 21-24.

Brändström, A. (2005). Differential Task in Mathematics Textbooks. Luleå: Luleå Tekniska Universitet.

Brody, L. E. (2004). Grouping and Acceleration Practices in Gifted Education. Thousand Oaks, Califonia: Corwin Press.

Bryman, A. (2004). Social research methods. . Oxford: Oxford University Press.

Clark, B. (1997). No child is born gifted: Creating and developing unlimited potential. Parenting for high potential , ss. 8-11.

Clotfelter, C. T., Ladd, H. F., & Vigdor, J. L. (2006). Teacher-Student Matching and the Assessment of Teacher Effectiveness. Journal of Human Resources , 41(4) 778-820.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. *American Educational Research Journal, Vol. 29 No. 3* , 573-604.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Resarch. Educational Psychologist, 31(3/4) , 175-190.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. The Journal of the Learning Sciences, 10 (1&2) , 113-163.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Reserach Mathods in Education.* London: RoutledgeFalmer.

Csikszentmihalyi, M., Rathunde, K., & Whalen, S. (1997). *Talented Teenagers. The roots of success & failure.* Cambridge: Cambride University Press.

Dai, D., & Renzulli, J. (2008). Snowflakes, Living System and the Mystery of Giftedness. *Gifted Child Quarterly. Vol. 52, Nr. 2* , 114-130.

Deary, I. (2006). Follow-up studies of the Scottish Mental Surveys of 1932 and 1947. i R. &. Peel, *Human Ability. Genetic and Environmental influences* (ss. 91-105). London: Galton Institute.

Diezmann, C. (2005). Challenging Mathematically Gifted Primary Students. *Australasian Journal of Gifted Education. 14(1)* , 50-57.

Edfeldt, Å. (1992). Can early reading lead to academinc prowness? i F. J. Mönks, M. Katzko, & H. W. van Boxtel, *Education of the gifted in Europe: Teoretical and Research Issues* (ss. 47-57). Amsterdam: Swets & Zeitlinger.

Edfeldt, Å. (1993). Ingen männsika föds begåvad... *Ordfront Magasin, 2* , ss. 22-24.

Edfeldt, Å., & Wistedt, I. (2009). High ability education in Sweden: The Swedish model. i T. Balchin, B. Hymer, & D. Matthews, *The Routledge companion to gifted education* (ss. 76-83). London: Routledge.

Emanuelsson, G. (1996). *Matematik - ett kommunikationsämne.* Göteborg: NCM, Göteborgs Universitet.

Emanuelsson, J. (2001). En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap. Göteborg: Acta Universtiatis Gothoburgensis.

Engström, A. (2005a). Matematikbegåvningars revansch. *Nämnaren, nr. 2* , ss. 19-21.

Engström, A. (2005b). Debatt. *Nämnaren, nr. 3* , ss. 56-57.

Engström, A. (2006). *Begåvade elever misslyckas i skolan.* Lärarnas tidning 5.

Ericsson, K. A. (1996). The road to exellense. The acquisition of expert performance in the Arts and Sciences, Sports and Games. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ernest, P. (2006). Relevans och nytta. i NCM, *Lära och undervisa i matematik - internationella perspektiv* (ss. 165-178). Göteborg: Göteborgs Universitet.

Feldhusen, J. F., & Jarwan, F. A. (1993). Identification of gifted and talented youth for educational programs. i K. A. Heller, F. J. Mönks, & A. H. Passow, *International handbook of research and development of giftedness and talent.* (ss. 512-527). Oxford: Pergamon Press.

Feldhusen, J. F. (2005). Giftedness, Talent, Expertise, and Creative Achievement. i R. J. Sternberg, & J. E. Davidson, *Conceptions of Giftedness* (ss. 64-79). New York: Cambridge University Press.

Feldman, D. H., & Goldsmidt, L. T. (1986). Nature´s gambit: Child prodigies and the development of human potential. New York: Basic Books.

Fischer, C., Mönks, F. J., & Grindel, E. (2004). Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung. Begabungen fördern, Lernen individualisieren. Munster, Tyskland: LIT Verlag.

Freeman, J. (2000). Families: The essential context for gifts and talents. i F. J. K. A. Heller, *International Handbook of Giftedness and Talent* (ss. 573-585). Oxford, UK: Pergamon Press.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, Vol 3, no. 1* , 51-75.

Gagné, F. (1993). Constructs and models pertaining to exceptional human abitities. i K. A. Heller, F. J. Mönks, & A. H. Passow, *International handbook of research and development of giftednedd and talent.* (ss. 69-88). Oxford, UK: Pergamon.

Gardner, H. (1983). Frames of mind: A theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., Carroll, S. R., & Sheffield, L. J. (2009). The Impact of Advanced Curriculum on the Achievement of Mathematically Promising Elementay Students. *Gifted Child Quarterly. 53(3)* , 188-202.

George, D. (1992). *The Challenge of the Able Child.* New York: David Fulton Publishers.

Glenn, J. (2000). Before It´s Too Late: A Report to the Nation from the The National Commission on Mathematics and Sceince Teaching for the 21st Century. Washington, DC.: U.S. Department of Education.

Grosin, L. (2004). *Skolklimat, prestationer och anpassning i 21 mellan och 20 högstadieskolor.* Forskningsrapport 71: Stockholms Universitet, pedagogiska institutionen.

Grönqvist, E., & Vlachos, J. (2008). *Hur lärares förmågor påverkar elevers studieresultat.* Rapport 2008:25: IFAU - Institutet för arbetsmarknadspolitisk utvärdering.

Gustafsson, J.-E., & Myrberg, E. (2002). *Ekonomiska resursers betydelse för pedagogiska resultat.* Stockholm: Skolverket.

Gustafsson, L., & Mouwitz, L. (2002). *Vuxna och matematik - ett livsviktigt ämne.* NCM-rapport 2002:3. Göteborg: NCM.

Hagland, K. H., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem - inspiration till variation.* Malmö: Liber AB.

Hansen, J. B., & Feldhusen, J. F. (1994). Comparison of trained and untrained teachers of gifted students. *Gifted Child Quarterly, 38* , ss. 115-121.

Hany, E. (1987). Modelle und Strategien zur Identifikation hochbegabter Schüler. München: Ludwig-Maximilians-Universität.

Hattie, J. (2009). *Visible learning.* London: Routledge.

Hedlund, E. (1995). *Åldersblandad undervisning i praktiken.* HLS förlag: Stockholm.

Hedrén, R., Taflin, E., & Hagland, K. (2005). Vad menar vi med rika problem och vad är de bra till. *Nämnaren, nr.1* , ss. 36-41.

Helenius, O. (2006). Kompetenser och matematik. *Nämnaren nr.3*, ss. 11-15.

Heller, K. A., Mönks, F. J., Sternberg, R. J., & Subotnik, R. F. (2000). *International Handbook of Giftedness and Talent.* Oxford, UK: Elsevier.

Heller, K. A., Perleth, C., & Lim, T. K. (2005). The Munich Model of giftedness Designed to Identify and Promote Gifted Students. i R. J. Davidson, & J. E. Sternberg, *Conceptions of giftedness* (ss. 147-170). Cambridge: Cambridge University Press.

Hellström, L. (14(1) 1987). Den svårhanterliga olikheten. *Nämnaren* , ss. 28-31.

Hiebert, J. (2002). Lektionsplanering. Ny verksamhet i gammal form. *Nämnaren, nr. 1* , ss. 53-57.

Hiebert, J., & m.fl. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Result from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. http://nces.ed.gov/pubs2003/2003013.pdf.

Husén, T., & Härnqvist, K. (2000). *Begåvningsreserven.* Uppsala: Föreningen för svenska utbildningshistoria.

Häggblom, L. (2000). Räknespår: barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder. Åbo, Finland: Åbo Akademi.

Häggblom, L. (2009). Lärarstuderandes syn på lärande i matematik. *Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD, 14(1)* , ss. 7-38.

Härnqvist, K. (1958). *Beräkning av reserver för högre utbildning.* (SOU 1958:11) Stockholm: Ecklesiastikdepartementet.

Jenner, H. (2004). *Motivation och motivationsarbete: i skola och behandling.* Forskning i fokus, nr.19 Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective.* Luleå: Luleå Tekniska Universitet, institutionen för matematik.

Kennerad, R. (2001). *Teaching Mathematically Able Children.* London: David Fulton Piblishers.

Kilborn, W. (1981). Att individualisera är inte att organisera. *Nämnaren nr.2*, ss. 19-23.

Kilborn, W., & Löwing, M. (2002). *Baskunskaper i matematik: för skola, hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington DC: National Academy Press.

Koshy, V. (2001). *Teaching Mathematics to Able Children.* London: David Fulton Publishers.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). Mathematically gifted and talented learners: teory and practice. *International journal of Mathematical Education in Sceince and Technology. Vol. 40, No.2* , 213-228.

Kruse, A. (1910/2010). *Åskådningsmatematik.* Stockholm: Norstedts.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilies in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Kulik, J. (2003). Grouping and tracking. i N. C. (eds), *Handbook of gifted education (3rd ed.)* (ss. 268-281). Boston: Allyn & Bacon.

Kulik, J., & Kulik, C. (1992). Meta-analytic findings on grouping programmes. *The Gifted Child Quaterly 36(2)* , ss. 73-76.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg: Göteborgs Universitet, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Käpnick, F., & Fuchs, M. (2004). Fördermöglichkeiten mathematisch begabter Grundschulkinde. i C. Fischer, F. J. Mönks, & E. Grindel, *Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung* (ss. 333-334). Berlin-Hamburg-Münster: LIT Verlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations:The logic of mathematics.* New York: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal 27(1)* , 29-63.

Larsson, I. (1972). *Individualized Mathematics Teaching.* Lund: CWK Gleerup.

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (2009). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lerman, S. (2006). Att vara matematisk i klassrummet. i NCM, *Lära och undervisa matematik - internationella perspektiv* (ss. 179-190). Göteborg: Göteborgs Universitet.

Lester, F. K., & Lambdin, D. V. (2006). Undervisa genom problemlösning. i J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby, & K. Wallby, *Lära och undervisa i matematik - internationella perspektiv* (ss. 95-108). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs Universitet.

Leyden, S. (2002). *Supporting the Child of Exceptional Ability.* London: David Fulton Publishers.

Linnéuniversitetet. (2011). *Elever med speciella behov i matematik*. Hämtat från http://lnu.se/utbildning/kurser/1MD368

Lithner, J. (2003). Student´s mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics 52(1)* , ss. 29-55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calcules textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior, 23(4)* , 405-427.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67* , 255-276.

Lundin, S. (2008). Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling. Uppsala : Uppsala Universitet, Institutionen för utbildning, kultur och medier.

Löwing, M. (2004). Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare - elevoch matematiklektionens didaktiska ramar. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Madsén, T. (2002). Återupprätta läraren. *Pedagogiska magasinet, 3* , ss. 54-59.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 31, nr. 1 , 97-111.

Mayer, R. (2005). The Scientific Study of Gifteness. i R. J. Sternberg, & J. E. Davidson, *Conceptions of Giftedness* (ss. 437-448). Cambridge: Cambridge University Press.

McHardy, R. (2008). *Buildning Worthwhile Mathematics Program for Prescholl Gifted Children.* Mexico, http://www.icme11.org/node/1644 : 11th International Congress on Mathematical Education.

Merriam, S. (1994). *Fallstudien som forskningsmetod.* Lund: Studentlitteratur.

Mouwitz, L. (2001). *Hur kan lärare lära?* Göteborg: NCM- Rapport 2001:2.

Myndigheten f ör skolutveckling. (2003). *Baskunnande i matematik.* Stockholm: Fritzes.

Myndigheten för skolutveckling. (2007). *Matematik - en samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling. s.26-31.

Myndigheten för skolutveckling. (2008). *Skolutveckling - för bättre resultat och måluppfyllelse.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Mönks, F. (1992). Development of gifted children: The issue of identification and programming. i W. A. Peters, & F. J. Mönks, *Talent for the future* (ss. 191-202). Assen, The Nederlands: Von Gorcum.

Mönks, F. J., Heller, K. A., & Passow, A. H. (2000). The study of giftedness: Reflections on where we are and where we are going. i K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik, *Inernational handbook of giftedness and talent* (ss. 839-864). Amsterdam: Elsevier.

Mönks, F. J., & Pflüger, R. (2005). *Gifted Education in 21 European Countries: Inventory and Perspective.* Nijmegen, Nederländerna: ISBN: 90-9019369-3.

Mönks, F. J., & Katzko, M. W. (2005). Giftedness and Gifted Education. i R. J. Davidson, & J. E. Sternberg, *Conception of giftedness* (ss. 187-200). Cambridge: Cambridge University Press.

Mönks, F. J., & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn.* Stockholm: Natur och Kultur.

NACE. (2011). *National Association for Able Children in Education (NACE).* Hämtat från http://www.nace.co.uk den 20 01 2011

NCM. (2010). *Vad är Kängurun, matematikens hopp?* Hämtat från Nationellt centrum för matematikutbildning: http://ncm.gu.se/node/1525 den 20 01 2011

NCM. (2011). *Matematikutvecklare.* Hämtat från www.matematikutvecklare.se den 29 01 2011

NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, USA: NCTM.

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forksningens karaktät och status. i B. Grevholm, *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (ss. 21-47). Lund: Studentlitteratur.

Niss, M., & Höjgaard-Jensen, T. (2002). Kompetencer og Matematiklearing. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Köpenhamn: Uddannelseministeriet.

Nolté, M. (2004). Der Mathe-Treff für Mathe-Fans. i F. M. C.Fischer, *Curriculum und Didaktik der Begabten förderung* (ss. 356-366). Berlin-Hamburg-Münster: LIT Verlag.

Passow, A. H., Mönks, F. J., & Heller, K. A. (1993). Research and education of the gifted in the year 2000 and beyond. i K. A. Heller, F. J. Mönks, & A. H. Passow, *International handbook of research and development of giftedness and talent.* (ss. 883-903). Oxford: Pergamon.

Persson, R. S. (1997). *Annorlunda land. Särbegåvningens psykologi.* Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Persson, R. S. (1999). Exploring high ability in egalitarian settings: swedish school teachers and gifted students. *Gifted and Talented International, 10 (1)* , ss. 6-11.

Persson, R. S., Joswig, H., & Baloggh, L. (2000). Gifted education in Europe: programs practice, and current research. i K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik, *International handbook of giftedness and talent* (ss. 703-734). Oxford: Elsevier Science.

Persson, R. S. (2005). Voices in the wildness: Counselling gifted students in a Swedish egalitarian setting. *International Journal for the Advancement of Counselling, 27(2)* , ss. 263-276.

Persson, R. S. (2007). The myth of the anti-social genius. A survey study of the socio-emotional aspects of high-IQ individuals. *Gifted and Talented International, 22(2)* , 19-34.

Persson, R. S. (2009). Gifted Education in Europe. i B. A. Kerr, *Encyclopedia of Giftedness, Creativity, and Talent. (Volyme One).* Thousand Oaks, CA: Sage Publications; se länk: http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:hj:diva-10168 hämtat 24 01 2011.

Persson, R. S. (2010). Experiences of intellektually gifted students in an egalitarian and inclusive educational system: a survey study. *Journal for the Education of the Gifted, 33(4)* , 536-569.

Pettersson, A. (2010). Bedömning av kunskap för lärande och undervisning i matematik . Stockholm: Skolverket.

Pettersson, E. (2008). Hur matematiska förmågor uttrycks och tas om hand i en pedagogisk praktik. . Växjö: Växjö Universitet.

Pólya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* Princeton, NJ: Priinceton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method (second ed.).* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (2005). Problemlösning. En handbok i rationellt tänkande av G. Ploya. Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

Price, A. (2006). *Creative Math Activites for Able Students.* London: Paul Chapman Publishing.

Renzulli, J. (2005). The three-ring conception of giftedness. A developmental model for promoting creative productivity. i R. J. Davidson, & J. E. Sternberg, *Conception of giftedness* (ss. 246-279). New York: Cambridge University Press.

Richardsson, G. (1999). *Svensk utbildningshistoria.* Lund: Studentlitteratur.

Robertsson, C. (2009). Läraren är bästa läromedlet. *Pedagogiska magasinet, nr. 4* , ss. 26-31.

Robinson, N. M. (2008). The social world of gifted children and youth. i S. I. Pfeiffer, *Handbook of Giftedness in Children* (ss. 33-51). New York: Springer.

Rosenthal, R., & Jacobson, L. (1968). Pygmalion in the Classroom: Teacher Expectation and Pupils' Intellectual Development. New York: Rinehart & Winston.

Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematik.* Göteborg: NCM.

Shavinina, L. (2009). *International Handbook on Giftedness.* Dordrecht: SpringerScience.

Sheffield, L. J. (1994). The Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards. Connecticut: The National Research Center on the Gifted and Talented.

Sheffield, L. J., Bennett, J., Beriozabal, M., DeArmond, M., & Werthmeimer, R. (1995). *Report of the Task Force on the Mathematically Promising.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics: NCTM News Bulletin,vol. 32, http://www.nku.edu/~sheffield/taskforce.html.

Sheffield, L. J. (2003). *Extending the Challenge in mathematics.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sheffield, L. J. (2009). Developing Mathematical creativity - Questions may be the answer. i R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (ss. 87-100). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sholy, J. (2008). Some Factors Discriminating Matehematically Gifted and Non-Gifted Students. *Journal of the Korea society of mathematical education series D, vo. 12, nr. 4* , 251-258.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher. Vol. 15, Nr. 2* , 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching:foundations of the new reform. *Harward Educational Review, 57* , ss. 1-22.

Silverman, K. (1993). *Counseling the gifted and talented.* Denver, CO: Love.

Sjöberg, G. (2006). Om det inte är dyskalki-vad är det då? En multimetodstudie av eleven i matematikproblem ur et longitudinellt perspektiv. Umeå: Umeå Universitet.

Sjöstrand, W. (1970). Pedagogiska grundproblem i historisk belysning. Lund: Gleerups.

Skolverket. (2000). Kursplaner och betygskriterier 2000 Grundskolan. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2003a). Lusten att lära - med fokus på matematik. Rapport nr. 221. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2003b). Tid för lärande. Skolverkets rapport nr. 222. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2004a). TIMSS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett nationellt och internationellt perspektiv. Rapport nr. 255. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2004b). *Konsekvenser av flexibel skolstart.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2005). Matematik årskurs 9. Ämnesrapport till rapport 251, Nationella utvärderingen av grundskolan 2003. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2006). Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet, Lpo 94. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2007). Skolverkets lägesbedömning 2007. Förskoleverksamhet, skolbarnsomsorg,skola och vuxenutbildning. Rapport 303 Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008a). TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv, rapport 323. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008b). *Skolverkets hemsida*. Hämtat från Statistik och analys 2008: http://www.skolverket.se/sb/d/2026/a/10825 den 03 01 2011

Skolverket. (2009a). Vad påverkar resultaten i svenska grundskola. Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer. Sammanfattande analys. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2009b). *Spetsutbildningar*. Hämtat från http://www.skolverket.se/sb/d/2573/a/14549; http://www.spetsutbildningar.se/ 2011-01-04

Skolverket. (2010). Utvärdering av försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning. Redovisning av uppdrag avseende omfattning och utvärdering av försöksverksamheten med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning. . Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011). Läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr 11. Stockholm: Skolverket.

Sriraman, B. (2008a). *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* Missoula, USA: Information Age Publishing Inc & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Sriramn, B. (2008b). The Characteristics of Mathematical Creativity. i B. Sriraman, *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics* (ss. 1-31). Missoula, USA: Information Age Publishing & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Sriraman, B. (2008c). Are Mathematical Giftedness and Mathematical Creativity Synonyms: A Theoretical Analysis of Constructs. i B. Sriraman, *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics* (ss. 85-112). Missoula, USA: Information Age Publishing & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Stadler, E. (2009). Stadieövergången mellan gymnasiet och universitetet. Växjö: Växjö University Press.

Stamm, M. (2006). Learning developments of students with early reading and mathimatical knowledge. i M. Stamm, *To be young and gifted in Switzerland* (ss. 25-49). Fribourg: Universität Fribourg.

Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (2005). *Conceptions of giftedness.* New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. (2005). The WICS model of giftedness. i R. J. Sternberg, & J. E. Davidson, *Conceptions of giftedness* (ss. 327-342). New York: Cambridge University Press.

Stevenson, H., & Stigler, J. (1992). *The Learning Gap.* New York: Simon & Scuster.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap.* New York: The free press.

Stutz, M., & Stamm, M. (2006). *Proposal for a study on the early Career Development of Precovious Readers and Mathematicians.* http://perso.unifr.ch/margrit.stamm/forschung/fo_projekte.php: University of Fribourg.

Subotnik, R. F., Kassan, L., Summers, E., & Wasser, A. (1993). *Genius revisited: High IQ children grow up.* Norwood, NJ: Ablex.

Subotnik, R. F., & Jarvin, L. (2005). Beyond expertise: Conceptions of giftedness as great performance. i R. J. Sternberg, & E. J. Davidson, *Conceptions of giftedness* (ss. 343-357). New York: Cambridge University Press.

Taflin, E. (2007). Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande. Umeå: Umeå Universitet.

Tengstrand, A. (2010). Kommunala matematikutvecklare - en av förutsättningarna för en hållbar utveckling av sbensk matematikundervisning. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs Universitet.

Terman, L. (1925). *Genetic studies of genius.* Stanford: Stanford University Press.

TIMSS. (2010). TIMSS video studier, http://www.lessonlab.com/TIMMS/index.htm. Santa Monica, CA: LessonLab, Inc.

Tomlinson, C. (2004). *Differentation for Gifted and Talented Students.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Ulin, B. (2007). Om lärarutbildningen och konsten att utveckla sig vidare. i T. Englund, A. Pettersson, & T. Tambour, *Matematikdidaktiska texter. Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 1.* (ss. 81-90). Stockholm: Avdelningen för matematikens didaktik och PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm.

Unenge, J. (1999). Skolmatematiken igår, idag och imorgon: - med mina ögon sett. Stockholm: Natur och kultur.

Usiskin, Z. (2000). The Development Into the Mathematically Talented. *Journal of Secondary Gifted Education. 11(3)* , 152-162.

VanTassel-Baska, J. (2004). *Curriculum for Gifted and Talented Students.* Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Vilkomir, T., & O´Donoghue, J. (2009). Using components of mathematical ability for initial development and identification of mathematically promising students. *International journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 40, No.2* , 183-199.

Vinterek, M. (2006). *Individualisering i ett skolsammanhang.* Forskning i fokus nr. 168 Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society.* Cambridge: Harvard University.

Wahlström, O. (1995). *Begåvade barn i skolan, duglighetens dilemma?* Stockholm: Liber Utbildning AB.

Wallby, K., Carlsson, S., & Nyström, P. (2001a). *Elevgrupperingar - en kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisningen.* Stockholm: Skolverket: Liber.

Wallby, K., Carlsson, S., & Nyström, P. (2001b). Elevers olikheter-organisationsproblem eller undervisningsutmaning. i NCM, *Hög tid för matematik* (ss. 97-106). Göteborg: Livréna AB.

Watson, A. (2007). The Nature of Participation Afforded by Tasks, Questions and Prompts in Mathematics Classrooms. *Research in Mathematics Education 9:1* , 111-126.

Werdelin, I. (1958). The mathematical ability. Experimental and factorial studies. Lund: Gleerups.

Winner, E. (1999). *Begåvade barn.* Jönköping: Brain Books AB.

Wistedt, I., Brattström, G., & Jacobsson, C. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen.* Stockholm: Stockholms Universitet, Pedagogiska institutionen.

Wistedt, I. (2007). Pedagogik för elever med förmåga och fallenhet för matematik. *Stifinneren, Caspars jubileumsskrift, Tangenten 5/17* , ss. 55-62.

Wistedt, I. (2008). Pedagogik för elever med förmåga och fallenhet för matematik. i Vetensapsrådets, *Resultatdialog 2008: Forskning inom utbildningsvetenskap* (ss. 132-136). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wistedt, I., & Sundström, M. R. (2011). Quality and Equity in Mathematics Education: A Swedish Perspective. i B. m. Atweh, *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education* (ss. 339-347). The Netherlans: Springer.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik.* Linköping: Linköpings univeristet. Institutionen för tillämpad lärarkunskap.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Resarch in Mathematics Education, 27* , 458-477.

Yackel, E. (2000). Creating a Mathemtics Classroom Environment that Fosters the Development of Mathematical Argumentation. *Ninth International Congress of Mathematical Education.* Tokyo/Makuhari, Japan: http://www.nku.edu/~sheffield/eyackel.html.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn.* München: Norstedts.

Bilagor

Bilaga 1

Matematikstudie på Anonym skola

Som ni tidigare fått veta genom månadsbrev kommer jag det närmsta året att finnas en hel del på Anonym skola och utföra mina empiriska studier. Jag arbetar vid Blekinge Tekniska Högskola sedan c:a 10 år tillbaka. Här har jag under den störta delen undervisat i matematik för blivande ingenjörer och civilingenjörer men har under senare tid börjat med forskning i matematikdidaktik. Det arbete som jag just nu sysslar med är finansierat av Vetenskapsrådet genom Växjö Universitet och handlar om forskning kring elever med särskild fallenhet för matematik. Första tillfället kommer att vara i slutet av maj 2005. Vid varje besök kommer eleverna att få arbeta kring matematiska problem där jag kommer att lyssna och iaktta deras resonemang. Till min hjälp kommer jag att använda videofilmning och ljudinspelning för att i efterhand lättare kunna bearbeta elevernas kreativitet. Jag kommer också att intervjua vissa grupper av elever efter avslutat arbete. Videofilmerna samt övrigt material kommer jag att arbeta med vid BTH samt Växjö Universitet. Jag kommer att förvara filmerna i vårt låsta arkivskåp under tiden projektet pågår. Min förhoppning är att det också skall generera några artiklar. Naturligtvis kommer det då att vara fingerade namn på elever, lärare och skola. När forskningsprojektet är slut kommer alla videofilmer och annat material att förstöras. För mig är det självklart att allt kommer att skötas på ett professionellt sätt där elevernas identitet i alla lägen kommer att skyddas. Om ni undrar över något mer är ni välkomna att ringa eller skriva till mig.

Med vänliga hälsningar

Eva Pettersson

Eva.Pettersson@bth.se 0709-524 555

Bilaga 2

Frågeformulär till lärare vid Anonym skola

1. Beskriv med dina egna ord vad matematik är för dig.

____

____

____

____

2. Tycker du att matematik är ett svårt (1) eller lätt (5) ämne? Beskriv gärna även med ord.

____

____

____

____

3. Har elevernas kunskaper i matematik ändrats och i så fall hur under din tid som pedagog?

____

____

____

____

4. Beskriv din undervisning i matematik. Vilket/Vilka av följande alternativ stämmer in på din undervisning?

- Helklassundervisning, dvs. läraren instruerar klassen och eleverna övar enskilt.
- Grupperingar inom klassen
- Individualiserad undervisning – dvs. läraren går runt och hjälper enskilda elever som arbetar var för sig.
- Årskurslösa grupper/klasser
- Nivågrupperingar inom klassen eller inom årskurs
- Grupper eller enskilda elever får gå fortare fram i kursen
- Grupper eller enskilda elever får fördjupa sig inom ett område

5. Har du några speciella metoder för att stimulera elever med särskild fallenhet för matematik?

____

____

____

____

6. Skulle du vilja ändra på något i din matematikundervisning?

____

____

____

____

Bilaga 3

Enkätundersökning i samband med föreläsning om elever med särskild förmåga och fallenhet för matematik

1. I vilken årskurs undervisar du just nu? Om du är specialpedagog så ber jag dig svara på frågorna utifrån den klasslärartjänst du haft.

   □ åk 1 - 3

   □ åk 4 - 6

   □ åk 7 - 9

2. Hur många år har du varit aktiv lärare?

   □ 0 – 5 år

   □ 6 – 10 år

   □ 11 – 15 år

   □ ≥ 16 år

3. Hur mycket ”faktisk” tid (x) i veckan ägnar din klass åt matematik?

- ☐ x < 40 minuter
- ☐ 40 minuter ≤ x ≤ 60 minuter
- ☐ 60 minuter < x ≤ 80 minuter
- ☐ 80 minuter < x ≤ 100 minuter
- ☐ x > 100 minuter

4. Hur lång tid (x) i veckan vill du att dina elever ägnar åt matematik hemma?

- ☐ x < 10 minuter
- ☐ 10 minuter ≤ x ≤ 20 minuter
- ☐ 20 minuter < x ≤ 30 minuter
- ☐ 30 minuter < x ≤ 40 minuter
- ☐ 40 minuter < x ≤ 60 minuter
- ☐ x > 60 minuter

5. Vilken undervisningsmodell passar bäst in på dig och din klass? Ange med procentsatser. Totalt 100 %

Tyst matematik med hjälp av läroböcker

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Tyst matematik på annat sätt

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Genomgång med alla elever

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Elever sitter i grupper och arbetar med uppgifter i läroboken.

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Grupparbete med speciella gemensamma uppgifter

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Laborativ matematik i grupp

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Laborativ matematik enskilt

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

Övrigt, ange vad

□ 10 % □ 20 % □ 30 % □ 40 % □ 50 % □ 60 %

□ 70 % □ 80 % □ 90 % □ 100 % □Någon gång ibland

6. Finns det i din klass eller har det tidigare i dina klasser funnits elever som utmärker sig som ”förmågor” inom matematik?

□ Ja □ Nej

Om du svarat Ja på fråga 6 så ber jag dig fortsätta med fråga 7 och 8, annars tackar jag dig för att du tog dig tid med denna enkät.

7. Hur upptäcker (ser) du dessa elever. Om du behöver mer plats så får du gärna använda annat papper.

____

____

____

8. Vad gör du för att stimulera dessa elever?

□ De får fortsätta att räkna framåt och jag hjälper dem så mycket jag hinner.

□ De får arbeta med fler liknande uppgifter inom samma område.

□ De får arbeta med fler svårare uppgifter inom samma område.

- ☐ De får gå upp och arbeta tillsammans med årskursen över för att få fler utmaningar.
- ☐ Vi har en speciallärare som tar hand om dessa elever och ger dem stimulans
- ☐ övrigt, ange vad.

Tack för att du tog dig tid och medverkade i denna enkätundersökning.

Bilaga 4

Enkätstudie i samband med Matematikutvecklarkonferens i Stad

Matematikutvecklare i ___________________ kommun

Arbetar som lärare i ☐ grundskola F-6 ☐ grundskola 7-9 ☐ gymnasieskola

Skolans namn: ____

1. Finns det, som du känner till, någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

   Ja ____ Nej ___

2. Finns det, som du känner till, någon speciell person/speciella resurser för att ta hand om elever som visar särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

   Ja ____ Nej ____

Om Ja, beskriv dessa resurser:

Tack för att du tog dig tid med denna enkät!

Bilaga 5

Hej Anonym!

För ett år sedan var du med vid en Matematikutvecklarkonferens i Stad där jag höll en föreläsning om elever med särskilda förmågor i matematik. Efter föreläsningen bad jag er fylla i en enkät med två frågor med anknytning till detta område. Frågorna var följande:

1. Finns det som du känner till, någon handlingsplan för att bemöta/ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

2. Finns det, som du känner till, någon speciell person/speciella resurser för att ta hand om elever som visar särskilda förmågor i matematik vid den skola/kommun där du själv arbetar?

Jag håller nu på med analyser av de svar som jag fick in, riktigt roligt och intressant att 284 svarade och däribland många positiva. Jag fördjupar mig just nu i fråga 1 och där har du svarat att det i din kommun eller på din skola finns någon form av handlingsplan för att bemöta dessa elever.

Om du har möjlighet att hjälpa mig ytterligare så skulle jag gärna vilja få mer information om denna handlingsplan och vad som har hänt under det senaste året hos er.

Vänliga Hälsningar

Eva

Bilaga 6

Anonym kommuns handlingsplan

för elever i så F-9 med fallenhet för matematik

Kriterier för en elev med fallenhet för matematik:

- Kan tänka abstrakt och se generella mönster.
- God problemlösare som har många olika lösningsmetoder.
- Nyfiken på att lära mer och fördjupa sina kunskaper med kvalité.
- Kan ha en specifik fallenhet för ett speciellt ämnesområde inom matematiken.
- Intresse för matematik.

En elev behöver inte uppfylla alla ovanstående kriterier.

Hur upptäcker vi dessa elever?

- Prata mycket matematik
- Öppna/rika problem
- Delta i matematiktävlingar
- Varierande undervisning
- Logiska uppgifter, t ex olika strategispel

Till sin hjälp här kan man kanske behöva ta hjälp av en matematiksamordnare.

Ovanstående moment behöver göras som klassaktivet för att kunna upptäcka elever med fallenhet.

Hur utvecklar vi deras förmågor?

- Ge dem utmanande uppgifter (fördjupning istället för att arbeta med redan befästa kunskaper)
- Fördjupa sig inom ordinarie område, t ex område som normalt kommer senare under grundskolan.
- Fördjupa sig inom icke ordinarie områden, t ex diskret matematik, kryptering, avancerad problemlösning, Excel mm
- Ge dem stöd kontinuerligt av en handledare/mentor (en liten specialgrupp)
- Delta i matematiktävlingar
- Elever erbjuds möjlighet att samarbeta med gymnasieskolan vid deras föreläsningar.

Tanken är inte att eleverna ska sitta och jobba ensam i en matematikbok för senare årskurser, utan få stöd och handledning av ordinarie lärare, resurs på skolan eller matematiksamordnare.

Vad krävs för att vi lärare ska kunna utveckla dessa elevers förmågor?

- Anställa en matematiksamordnare på heltid, som har huvudansvar för arbetet med dessa elever och kontakten med kommunens skolor och matematiklärare.
- Skapa nätverk för lärare som undervisar i matematik.
- Ordna träffar för lärare som undervisar elever med fallenhet.

För att detta ska fungera är det viktigt att det upprättas en plan för elevens matematiska utveckling och att den medföljer eleven över alla stadiebyten och lärarbyten.

Linnaeus University Dissertations

Nedan följer en lista på skrifter publicerade i serien Linnaeus University Dissertations. För mer information se Linnaeus University Press sidor på Lnu.se

1. Charlotte Silander, 2010, *Pyramider och pipelines. Om högskolesystemets påverkan på jämställdhet i högskolan* (statsvetenskap/political science), ISBN: 978-91-86491-00-0.

2. Anna E. Engberg, 2010. *Biomaterials and Hemocompatibility* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-01-7.

3. Angela Marx Åberg, 2010. *Lesefreude und Lernerorientierung. Eine Untersuchung von Lehrerentscheidungen beim Lesen eines Romans in einer Schülergruppe im schwedischen Unterricht Deutsch als Fremdsprache* (tyska/german), ISBN: 978-91-86491-03-1.

4. Susanne Säve, 2010. A*TP and adenosine in experimental urinary tract infection* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-04-8.

5. Magnus Karlsson, 2010. *Evolution in changing environments revealed by fire melanism in pygmy grasshoppers* (evolutionsbiologi/ evolutionary biology), ISBN: 978-91-86491-05-5.

6. Susanne Syrén, 2010. *Det outsagda och ohörsammade lidandet. Tillvaron för personer med långvarig psykossjukdom och deras närstående* (vårdvetenskap/caring science), ISBN: 978-91-86491-07-9.

7. Ulrika Järkestig-Berggren, 2010. *Personligt ombud och förändringsprocesser på det socialpsykiatriska fältet* (socialt arbete/social work), ISBN: 978-91-86491-09-3.

8. Ingrid-Maria Bergman VDM, 2010. *Polymorphism in pattern recognition receptor genes in pigs* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-10-9.

9. Johan Svanberg, 2010. *Arbetets relationer och etniska dimensioner. Verkstadsföreningen, Metall och esterna vid Svenska Stålpressnings AB i Olofström 1945–1952* (historia/history), ISBN: 978-91-86491-11-6.

10. Joakim Palovaara, 2010. *Conifer embryology. A study of polar auxin transport and WOX transcription factors* (cell- och organismbiologi/ cell and organism biology), ISBN: 978-91-86491-12-3.

11. Martina Meranius Summer, 2010. *"Era delar är min helhet". En studie om att vara äldre och multisjuk* (vårdveternskap/caring science), ISBN: 978-91-86491-13-0.

12. Maria Gullberg, 2010. *PICORNAVIRIDAE. Evolution and adaptation of entero- and parechoviruses* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-14-7.

13. Catharina Frank, 2010. *Tillfället gör delaktighet. Patienters och vårdares erfarenheter av patientdelaktighet på akutmottagning. En deskriptiv, metodutvecklande och utvärderande studie* (vårdvetenskap/caring science), ISBN: 978-91-86491-15-4.

14. Anna Sandgren, 2010. *Deciphering Unwritten Rules. Patients, relatives and nurses in palliative cancer care* (vårdvetenskap/caring science), ISBN: 978-91-86491-19-2.

15. Bo Hovstadius, 2010. *On drug use, multiple medication and polypharmacy in a national population* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-20-8.

16. Gunnar Fredrik Mosnik, 2010. *On Applying Ontologies in Workflows – Ontology driven Workflows for increasing Flexibility and Quality, and reducing Prodution Time and Cost* (systemekonomi/system economics), ISBN: 978-91-86491-21-5.

17. Åsa Devine, 2010. *Internationalization and performance among small and medium-sized firms: A study of furniture producers in Sweden* (skogsindustriella produktionssystem/forest industry production systems), ISBN: 978-91-86491-22-2.

18. Karolina Leberfinger, 2010, *Revealing the role of shredders and detritus in open-canopy, intermittent streams* (akvatisk ekologi/aquatic ecology), ISBN: 978-91-86491-23-9.

19. Susanna Minnhagen, 2010. *Kleptoplasty in Dinophysis spp. Ecological role and evolutionary implications* (marin ekologi/freshwater ecology), ISBN: 978-91-86491-24-6.

20. Reine Johansson, 2010. *The Protein-Carbohydrate Interaction. Analysis of Transient Biomolecular Complexes* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-25-3.

21. Reza Samadi, 2010. *Supply Chain Optimisation and Market Coordinated Inventory Control* (skogsindustriella produktionssystem/forest industry production systems), ISBN: 978-91-86491-26-0.

22. Marie Eriksson, 2010. *Makar emellan. Äktenskaplig oenighet och våld på kyrkliga och politiska arenor, 1810-1880* (historia/history), ISBN: 978-91-86491-28-4.

23. Marcus Edvinsson, 2010. *Parallelized Progam Analysis* (datavetenskap/computer science), ISBN: 978-91-86491-35-2.

24. Baskar Theagarayan, 2010. *Manipulation of Ocular Aberrations in Myopes* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-37-6.

25. Margareta Stigsdotter Ekberg, 2010. *Dom kallar oss värstingar. Om ungas lärande i mötet med skola, socialtjänst och polis* (pedagogik/education), ISBN: 978-91-86491-38-3.

26. Tao Liu, 2010. *Chemoinformatics for green chemistry* (miljövetenskap/environmental science), ISBN: 978-91-86491-40-6.

27. Daniel Spikhol, 2010. *A Design Toolkit for Emerging Learning Landscapes Supported by Ubiquitous Computing* (datavetenskap/computer science), ISBN: 978-91-86491-44-4.

28. Sofia Wastesson, 2010. *L'atténuation en traduction. Étude traductologique des marqueurs de probabilité en français et en suédois* (franska/french), ISBN: 978-91-86491-45-1.

29. Marianne Björn Milrad, 2010. *Studenter med läs- och skrivsvårigheter som deltagare i högre utbildning* (pedagogik/education), ISBN: 978-91-86491-47-5.

30. Barbro Gustafsson, 2010. *Undersökningar av sociovetenskapliga samtal i naturvetenskaplig utbildning* (pedagogik/education), ISBN: 978-91-86491-49-9.

31. Linda M. Haugaard-Kedström, 2011. *Structure and function of relaxins* (organisk kemi/organic chemistry), ISBN: 978-91-86491-55-0.

32. Johanna Jormfeldt, 2011. *Skoldemokratins fördolda jämställdhetsproblem. Eleverfarenheter i en könssegregerad gymnasieskola* (statsvetenskap/political science), ISBN: 978-91-86491-60-4.

33. Astrid Weissbach, 2011. The *role of allelopathy in microbial food webs* (akvatisk ekologi/aquatic ecology), ISBN: 978-91-86491-62-8.

34. Marlene Norrby, 2011. *Gene and protein expression in denervated atrophic and hypertrophic skeletal muscle* (biomedicinsk vetenskap/biomedical sciences), ISBN: 978-91-86491-61-1.

35. Monika Filipsson, 2011. *Uncertainty, variability and environmental risk analysis* (miljövetenskap/environmental science), ISBN: 978-91-86491-63-5.

36. Martin Amstéus, 2011. *Managerial Foresight and Firm Performance* (företagsekonomi/business administration), ISBN: 978-91-86491-64-2.

37. Camilla Fahlgren, 2011. *Microorganisms in the atmosphere* (mikrobiologi/microbiology), ISBN: 978-91-86491-63-5.

38. Goran Orozović, 2011. *Resistance to neuraminidase inhibitorsin influenza A virus isolated from mallards* (biokemi/biochemistry), ISBN: 978-91-86491-66-6.

39. Peter Hultgren, 2011. *Det dubbla statushandikappet och sjukförsäkringens moraliska praktiker – en aktstudie om sjukpenningärenden som får negativa beslut på Försäkringskassan* (sociologi/sociology), ISBN: 978-91-86491-67-3.

40. Dieter Samyn, 2011. *Structure/function relationships of inorganic phosphate transporters* (biokemi/biochemistry), ISBN: 978-91-86491-68-0.

41. Wirginia Bogatic, 2011. *Exilens dilemma: att stanna eller att återvända. Beslut i Sverige av polska kvinnor som överlevde KZ-lägret Ravensbrück och räddades till Sverige 1945-1947* (historia/history), ISBN: 978-91-86491-69-7.

42. Yushu Li, 2011. *Essays on Statistical Testing using Wavelet Methodologies* (statitstik/statistics), ISBN: 978-91-86491-70-3.

43. Ausra Reinap, 2011. *Aerosol deposition to coastal forests: a wind tunnel approach* (miljövetenskap/environmental science), ISBN: 978-91-86491-71-0.

44. Maria Mikkonen, 2011. *Internal Migration, Labour Market Integration, and Job Displacement: An Ethnic Perspective* (nationalekonomi, economics), ISBN: 978-91-86491-72-7.

45. Johan Vessby, 2011. *Analysis of shear walls for multi-storey timber buildings* (byggteknik/civil engineering), ISBN: 978-91-86491-73-4.

46. Anna Augustsson, 2011. *Climate change and metal mobility in an environmental risk perspective* (miljövetenskap/environmental science), ISBN: 978-91-86491-74-1.

47. Mia Berglund, 2011. *Att ta rodret i sitt liv. Lärande utmaningar vid långvarig sjukdom* (vårdvetenskap/caring science), ISBN: 978-91-86491-76-5.

48. Eva Pettersson, 2011. *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor* (matematik med didaktisk inriktning/mathematics education), ISBN: 978-91-86491-77-2.